

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)

# ИНФОРМАТИКА

ТОМ 16

4

ОКТЯБРЬ-ДЕКАБРЬ  
2019

## ОТ РЕДАКЦИИ

В журнале «Информатика» публикуются оригинальные и обзорные статьи, описывающие результаты фундаментальных и прикладных исследований специалистов академического и вузовского профиля в области информатики и информационных технологий. Основной целью журнала является публикация наиболее значимых новых результатов в указанной области. Приветствуются статьи, описывающие заключительные результаты научных проектов и диссертационных исследований, открывающие новые направления исследований, которые находятся на стыке информатики и других наук.

Основные разделы журнала: математическое моделирование; обработка сигналов, изображений и речи; прикладные информационные технологии; интеллектуальные системы; космические информационные технологии и геоинформатика; параллельные вычисления; системы, приборы и устройства; распознавание образов; информационная безопасность; автоматизация проектирования.

Журнал «Информатика» включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в список научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований. В декабре 2017 г. журнал включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ). С помощью инструментов и сервисов, доступных на платформе eLIBRARY (раздел «Личный кабинет»), можно самостоятельно корректировать список своих публикаций и цитирований в РИНЦ.

Журнал рассчитан на широкий круг специалистов в области информатики и информационных технологий.

### Адрес редакции:

ул. Сурганова, 6, к. 305, г. Минск, Беларусь

Тел. +375(017)284 26 22

E-mail: [rio@newman.bas-net.by](mailto:rio@newman.bas-net.by)

Сайт журнала: [inf.grid.by](http://inf.grid.by)

---

## THE EDITOR'S NOTE

The journal «Informatics» is a scientific publication in computer sciences and information technologies which reviews the results in basic and applied research of scientists from the universities and academies in the given field. The journal focuses on the most significant and modern papers such as research projects results and PhD/DSc papers in computer sciences, IT and at the boundaries.

The journal covers the following topics: mathematical modeling; processing and recognition of signals, images and speech; applied information technology; intelligent systems; space information technology and GIS technologies; parallel computing; systems, devices and equipment; image recognition; information security; computer aided design.

The journal «Informatics» is in the list of scientific publications recommended by the Higher Attestation Commission of the Republic of Belarus for scientists to publish the results of PhD/DSc research. In December 2017 the journal was included in the database of the Russian Science Citation Index (RISC) and provides the free access to reviewed electronic scientific paper, improving scientific information traffic and also raising quotation of works of the authors who are published in this journal (please use <https://elibrary.ru> or section for authors [https://elibrary.ru\\_author\\_tools](https://elibrary.ru_author_tools)).

The journal is edited for a wide range of specialists in IT and computer sciences.

### For further information:

Phone +375 (017) 284 26 22

E-mail: [rio@newman.bas-net.by](mailto:rio@newman.bas-net.by)

Office 305, Surganova 6, 220012

Minsk, Belarus

Learn more at: <https://inf.grid.by/jour>

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ИНФОРМАТИКИ  
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

---

---

# ИНФОРМАТИКА

Том 16, № 4, октябрь-декабрь 2019

---

---

*Ежеквартальный научный журнал*

*Издается с января 2004 г.*

Учредитель и издатель – Объединенный институт проблем информатики  
Национальной академии наук Беларуси

Г л а в н ы й р е д а к т о р

**Тузиков Александр Васильевич**, д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент  
Национальной академии наук Беларуси, генеральный директор Объединенного института  
проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

З а м е с т и т е л ь г л а в н о г о р е д а к т о р а

**Ковалев Михаил Яковлевич**, д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент  
Национальной академии наук Беларуси, Объединенный институт проблем информатики  
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я

**Абламейко Сергей Владимирович**, д-р техн. наук, профессор, академик Национальной академии наук  
Беларуси, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

**Анищенко Владимир Викторович**, канд. техн. наук, доцент, ООО «СофтКлуб», Минск, Беларусь

**Бибило Петр Николаевич**, д-р техн. наук, профессор, Объединенный институт проблем информатики  
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

**Бобов Михаил Никитич**, д-р техн. наук, профессор, ОАО «АГАТ – системы управления» – управляющая  
компания холдинга «Геоинформационные системы управления», Минск, Беларусь

**Долгий Александр Борисович**, д-р техн. наук, профессор, Высшая инженерная школа Бретани, Нант,  
Франция

**Дудин Александр Николаевич**, д-р физ.-мат. наук, профессор, Белорусский государственный университет,  
Минск, Беларусь

**Карпов Алексей Анатольевич**, д-р техн. наук, доцент, Санкт-Петербургский институт информатики  
и автоматизации Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

**Килин Сергей Яковлевич**, д-р физ.-мат. наук, профессор, академик Национальной академии наук  
Беларуси, Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

**Краснопрошин Виктор Владимирович**, д-р техн. наук, профессор, Белорусский государственный  
университет, Минск, Беларусь

**Крот Александр Михайлович**, д-р техн. наук, профессор, Объединенный институт проблем информатики  
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

**Кругликов Сергей Владимирович**, д-р воен. наук, канд. техн. наук, доцент, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

**Кундас Семен Петрович**, д-р техн. наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

**Лиходед Николай Александрович**, д-р физ.-мат. наук, профессор, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

**Матус Петр Павлович**, д-р физ.-мат. наук, профессор, Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

**Скляр Валерий Анатольевич**, д-р техн. наук, профессор, Университет Авейру, Португалия

**Сотсков Юрий Назарович**, д-р физ.-мат. наук, профессор, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

**Стемпковский Александр Леонидович**, д-р техн. наук, профессор, академик Российской академии наук, Институт проблем проектирования в микроэлектронике Российской академии наук, Москва, Россия

**Харин Юрий Семенович**, д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь

**Чернявский Александр Федорович**, д-р техн. наук, профессор, академик Национальной академии наук Беларуси, Институт прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь

**Ярмолик Вячеслав Николаевич**, д-р техн. наук, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

---

---

## ИНФОРМАТИКА

Том 16, № 4, октябрь-декабрь 2019

---

---

Ответственный за выпуск *Мойсейчик Светлана Сергеевна*

Редактор *Гончаренко Галина Борисовна*

Корректор *Михайлова Анна Антоновна*

Компьютерная верстка *Бутевич Ольга Борисовна*

---

Сдано в набор 11.11.2019. Подписано в печать 18.12.2019. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография. Усл. печ. л. 13,7. Уч.-изд. л. 13,4. Тираж 50 экз. Заказ 12.

---

Государственное научное учреждение «Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/274 от 04.04.2014. ЛП № 02330/444 от 18.12.13. Ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Беларусь.

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)

THE UNITED INSTITUTE OF INFORMATICS PROBLEMS  
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

---

---

# INFORMATICS

Vol. 16, no. 4, October-December 2019

---

---

*Published quarterly*

*Issued since January 2004*

Founder and publisher – the United Institute of Informatics Problems  
of the National Academy of Sciences of Belarus

## Editor-in-Chief

**Alexander V. Tuzikov**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, General Director of the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

## Deputy Editor-in-Chief

**Mikhail Y. Kovalyov**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

## Editorial Board

**Sergey V. Ablameyko**, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Uladimir V. Anishchanka**, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, SoftClub Ltd., Minsk, Belarus

**Petr N. Bibilo**, Dr. Sci. (Eng.), Professor, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Mikhail N. Bobov**, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Open Joint-Stock Company "AGAT – Control Systems – Managing Company of Geoinformation Control Systems Holding", Minsk, Belarus

**Alexandre B. Dolgui**, Dr. Sci. (Eng.), Professor, IMT Atlantique, Nantes, France

**Alexander N. Dudin**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Alexey A. Karpov**, Dr. Sci. (Eng.), Associate Professor, St. Petersburg Institute of Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia

**Sergey Ya. Kilin**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Viktor V. Krasnoproshin**, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Alexander M. Krot**, Dr. Sci. (Eng.), Professor, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Sergey V. Kruglikov**, Dr. Sci. (Milit.), Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Semen P. Kundas**, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

**Nikolai A. Likhoded**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Petr P. Matus**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Valery A. Sklyarov**, Dr. Sci. (Eng.), Professor, University of Aveiro, Portugal

**Yuri N. Sotskov**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Alexander L. Stempkovsky**, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Academician of the Russian Federation Academy of Sciences, the Institute for Design Problems in Microelectronics of the Russian Federation Academy of Sciences, Moscow, Russia

**Yuriy S. Kharin**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Alexander F. Cherniavsky**, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Vyacheslav N. Yarmolik**, Dr. Sci. (Eng.), Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

---

---

## INFORMATICS

Vol. 16, no. 4, October-December 2019

---

---

Issue Head *Sviatlana S. Maiseichyk*

Editor *Halina B. Hancharenka*

Corrector *Hanna A. Mikhailava*

Computer Imposition *Volha B. Butsevich*

---

---

Sent for press 11.11.2019. Output 18.12.2019. Format 60×84 1/8. Offset paper. Headset Times. Riesography. Printed sheets 13,7. Publisher's signatures 13,4. Circulation 50 copies. Order 12.

---

---

State Scientific Institution "The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus".

Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions

no. 1/274 dated 04.04.2014. License for the press no. 02330/444 dated 18.12.13.

6, Surganov Str., 220012, Minsk, Belarus.

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)

## СОДЕРЖАНИЕ

### *БИОИНФОРМАТИКА*

**Яцков Н. Н., Скакун В. В., Гринев В. В.** Вычислительный подход и программный пакет RNAexploreR для группировки молекул РНК генов человека по их экзонным признакам ..... 7

### *МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ*

**Лемешевский С. В., Чуйко М. М., Шнип А. И., Марцинкевич Г. Л., Лепин В. В., Ирхин В. А.** Математическое моделирование тепловых режимов космических аппаратов негерметичного исполнения ..... 25

**Романчук В. М.** Математическая модель независимых альтернатив в теории рейтингов ..... 40

**Несенчук А. А.** Алгоритм синтеза устойчивых характеристических полиномов динамических систем при условии вариации параметров ..... 51

**Ерофеев В. Т.** Моделирование поверхностных электромагнитных волн с осевой симметрией на биизотропном однослойном плоском экране ..... 63

### *ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ*

**Поттосин Ю. В.** Метод бидекомпозиции частичных булевых функций ..... 77

### *ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ*

**Leont'ev A. V.** On reliability, safety, and readability of programming languages on the example of Ada language ..... 88

### *АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ*

**Прокопович Г. А.** Разработка системы управления учебным роботом-манипулятором параллельной структуры с применением технологии модельно-ориентированного проектирования ..... 99

### *ИНФОРМАЦИЯ*

**Восьмой Белорусский космический конгресс** ..... 115

**XIX Международная конференция «Развитие информатизации и государственной системы научно-технической информации» (РИНТИ–2020)** ..... 117

### *УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ*

**Памяти Владимира Анатольевича Лапицкого посвящается...** ..... 119

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)

## CONTENTS

### *BIOINFORMATICS*

- Yatskou M. M., Skakun V. V., Grinev V. V.** A computational approach and software package RNAexploreR for grouping RNA molecules of human genes by exon features ..... 7

### *MATHEMATICAL MODELING*

- Lemeshevsky S. V., Chuiko M. M., Shnip A. I., Martsynkevich G. L., Lepin V. V., Irkhin U. A.** Mathematical modeling of thermal conditions of non-hermetic spacecrafts ..... 25
- Romanchak V. M.** Mathematical model of independence of alternatives in the theory of ratings..... 40
- Nesenchuk A. A.** Algorithm for synthesis of the stable characteristic polynomials for dynamic systems under parametric variations..... 51
- Erofeenko V. T.** Modeling of surface electromagnetic waves with axial symmetry on a bi-isotropic one-layer plane screen..... 63

### *LOGICAL DESIGN*

- Pottosin Yu. V.** A method for bi-decomposition of partial Boolean functions..... 77

### *INFORMATION TECHNOLOGY*

- Leont'ev A. V.** On reliability, safety, and readability of programming languages on the example of Ada language ..... 88

### *COMPUTER-AIDED DESIGN*

- Prakapovich R. A.** Development of a control system for an educational robot manipulator of a parallel structure using model-based design ..... 99

### *INFORMATION*

- The Eighth Belarussian space congress** ..... 115
- XIX International conference "The development of informatization and state system of scientific and technical information" (DISTI–2020)** ..... 117

### *SCIENTISTS OF BELARUS*

- In the memory of Vladimir A. Lapitsky**..... 119



ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)

## **БИОИНФОРМАТИКА**

## **BIOINFORMATICS**

УДК 51-76[577.21+004.4]; 577.21:519.1

Поступила в редакцию 13.06.2019  
Received 13.06.2019

Принята к публикации 31.07.2019  
Accepted 31.07.2019

# **Вычислительный подход и программный пакет RNAexploreR для группировки молекул РНК генов человека по их экзонным признакам**

**Н. Н. Яцков<sup>✉</sup>, В. В. Скакун, В. В. Гринев**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*  
<sup>✉</sup>E-mail: yatskou@bsu.by

**Аннотация.** Изучение правил комбинаторики экзонов генов человека во время сплайсинга представляет огромный интерес для диагностики и лечения раковых заболеваний. Определенная часть исследований направлена на разработку надежных моделей предсказания глобальной комбинаторики экзонов при образовании зрелой РНК. Первоочередной задачей является разработка стандартов или единых систематизированных статистических подходов к анализу и интерпретации возможных экзонных последовательностей генов.

Предложен вычислительный подход к группировке событий альтернативного сплайсинга в первичных матричных РНК генов человека с целью определения генной принадлежности или класса молекул, методика которого состоит в снижении размерности пространства экзонных признаков и объединении близко расположенных экзонов в ограниченное число классов, замене экзонных путей генерации РНК на последовательности соответствующих меток классов, вычислении расстояний между транскриптами РНК по некоторой мере сходства, объединении близкорасположенных объектов РНК в кластеры. Проверка работоспособности разработанных алгоритмов выполнена на примере наборов молекул РНК отобранных негомологичных генов человека и гибридного онкогена RUNX1/RUNX1T1 человека. Средняя точность отнесения транскрипта к заданному гену составила 99,5 % для рассмотренных негомологичных пар генов.

Разработаны программный пакет и веб-приложение RNAexploreR, интегрирующие реализованные алгоритмы анализа альтернативного сплайсинга РНК-продуктов генов человека. Предложенные алгоритмы и программное обеспечение могут быть использованы для изучения организации и функционирования как aberrантных, так и нормальных генов человека.

**Ключевые слова:** гены человека, гибридный онкоген RUNX1/RUNX1T1, альтернативный сплайсинг, признаки экзонов, интеллектуальный анализ данных, метод главных компонент, кластерный анализ

**Благодарность.** Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2020» Республики Беларусь (грант № 3.08.3, номер госрегистрации 20162176).

**Для цитирования.** Яцков, Н. Н. Вычислительный подход и программный пакет RNAexploreR для группировки молекул РНК генов человека по их экзонным признакам / Н. Н. Яцков, В. В. Скакун, В. В. Гринев // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 7–24.

## A computational approach and software package RNAexploreR for grouping RNA molecules of human genes by exon features

Mikalai M. Yatskou<sup>✉</sup>, Victor V. Skakun, Vasily V. Grinev

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

<sup>✉</sup>E-mail: yatskou@bsu.by

**Abstract.** The study on the exon combinatoric rules of human genes during the process of splicing is of great interest for the diagnosis and treatment of cancer. A certain part of the research is aimed at developing reliable prediction models for global exon combinatorics during the formation of mature RNA. The primary task is to develop standards or uniform systematic statistical approaches to the analysis and interpretation of possible exon sequences of genes.

A computational approach is proposed to group alternative splicing events in primary messenger RNA of human genes with the aim of determining the gene correspondence or molecule class. The method consists of reducing the dimension of the exon feature space and combining closely located exons into a limited number of classes, replacing the exon pathways of RNA generation with sequences of corresponding exon class labels, calculating the distances between RNA transcripts by some measure of similarity, and associating closely spaced RNA objects into clusters. The performance evaluation of developed algorithms has been done using the examples of RNA molecules of selected nonhomologous human genes and human hybrid oncogene RUNX1/RUNX1T1. The mean accuracy of the assignment of the transcript to given gene is about 99,5 % for the considered nonhomologous pairs of genes.

A software package and web application RNAexploreR, integrating the implemented algorithms for the analysis of alternative splicing of human gene RNA products, have been developed. The proposed algorithms and software can be used to study the organization and functioning of both aberrant and normal human genes.

**Keywords:** human genes, hybrid oncogene RUNX1/RUNX1T1, alternative splicing, exon features, data mining, principal component analysis, cluster analysis

**Acknowledgements.** This work was carried out in the framework of the state program of scientific research "Convergence 2020" of the Republic of Belarus (grant no. 3.08.3, number state registration 20162176).

**For citation.** Yatskou M. M., Skakun V. V., Grinev V. V. A computational approach and software package RNAexploreR for grouping RNA molecules of human genes by exon features. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 7–24 (in Russian).

**Введение.** Сплайсинг РНК является фундаментальным процессом, протекающим во всех без исключения клетках эукариот и приводящим к образованию из молекул-предшественников зрелых функционально активных РНК-продуктов [1]. Ключевое событие сплайсинга – это распознавание компонентами сплайсингосомы границ интрона (донорного и акцепторного сайтов сплайсинга) с последующим его удалением из молекулы-предшественника и объединением двух экзонов, ранее разделенных таким интроном, с помощью новой фосфодиэфирной связи [2, 3]. Как правило, в теле гена любой из его интронов фланкирован несколькими альтернативными сайтами сплайсинга разной силы. Кроме того, в непосредственной близости от сайтов сплайсинга как в самом интроне, так и в примыкающих к нему экзонах располагается множество сайтов связывания разнонаправленно действующих белков – регуляторов сплайсинга (как энхансеров, так и сайленсеров), причем разной аффинности [4]. Эти белки во многом определяют, будет ли включен тот или иной экзон в состав зрелой РНК или же он будет исключен вместе с примыкающими к нему интронами. В итоге любой из мультиэкзонных генов потенциально мог бы продуцировать огромное разнообразие вариантов зрелых РНК в зависимости от того, по каким именно сайтам сплайсинга шло бы «монтажное» конечной молекулы РНК [5, 6], но в действительности этого не происходит и каждый ген порождает ограниченный набор зрелых РНК-продуктов.

Правила и механизмы сплайсинга, существенно ограничивающие разнообразие зрелых РНК-продуктов гена, до конца не установлены. Наибольший прогресс здесь достигнут при идентификации детерминант и построении предсказательной модели, описывающей включение

или исключение одного кассетного экзона, фланкированного двумя конститутивными экзонами [7]. Однако даже в этом сравнительно простом случае точное предсказание включения или исключения кассетного экзона невозможно без такого комплексного признака, как тканевая специфичность. Надежной модели, которая позволяла бы только на основании сиквенс-признаков молекулы-предшественника предсказывать как локальную (лишь несколько соседних экзонов), так и, самое главное, глобальную (все экзоны конечного варианта РНК) комбинаторику экзонов при образовании зрелой РНК, на сегодняшний день не разработано.

В связи с этим была предпринята попытка разработать такой алгоритм (или методику вычислительного подхода) интеллектуального анализа данных, который позволял бы, опираясь на множество признаков экзонов, а также фланкирующих их интронных последовательностей, надежно разделять или группировать молекулы РНК, имеющие разные структурную организацию и генную принадлежность. Разработанный алгоритм был успешно апробирован на наборе экспериментально подтвержденных и теоретически предсказанных (на основе графа сплайсинга) молекул РНК гибридного онкогена RUNX1/RUNX1T1 человека, а также аннотированных РНК-транскриптов случайно выбранных нормальных генов человека. Авторы полагают, что разработанная алгоритмическая методика является первым существенным шагом на пути расшифровки закономерностей глобальной комбинаторики экзонов, происходящей при образовании зрелых молекул РНК генов человека.

**Материалы и методы.** В исследование был включен гибридный онкоген RUNX1/RUNX1T1 человека, который является продуктом реципрокной негомологичной транслокации t(8;21)(q22;q22) и появление которого в гемопоэтических стволовых клетках приводит к их перерождению в лейкозные [8]. Кроме того, для исследования были отобраны 14 нормальных (или модельных) генов человека из базы данных Ensembl (выпуск 85, основанный на эталонной сборке GRCh38.p7 генома человека) [9]. В список таких генов вошли семь кодирующих белки генов (ADGRG1, C2orf92, NDRG2, SORBS2, ST5, TCF4 и TEX41) и столько же генов некодирующих РНК (AL157392.3, MIR7515HG, MUC20-OT1, MYO3B-AS1, SATB1-AS1, SOX2-OT и TTN-AS1).

Список экспериментально установленных полноразмерных транскриптов гибридного онкогена RUNX1/RUNX1T1 человека включал 135 изоформ РНК, описанных ранее в работах [5, 6]. Теоретически возможные транскрипты для этого онкогена были рассчитаны путем полного обхода направленного ациклического графа сплайсинга, реконструированного на основе экзон-экзонных стыков, которые были обнаружены в реальных транскриптах гибридного онкогена RUNX1/RUNX1T1. Полный список теоретически возможных транскриптов включал 43 353 изоформы [6]. Кроме того, набор транскриптов включал 892 изоформы РНК отобранных ранее модельных генов человека, аннотированных в базе данных Ensembl.

Все разнообразие транскриптов гибридного онкогена RUNX1/RUNX1T1, отмеченное выше, основано на использовании 99 уникальных вариантов экзонов этого онкогена. Аналогичным образом все разнообразие транскриптов модельных генов порождено комбинаторикой 1762 уникальных экзонов этих генов.

**Экзонные признаки.** Экзоны, вовлеченные в исследование, были описаны с помощью 1438 численных признаков. Эти признаки ассоциированы со сплайсингом и описывают особенности нуклеотидной последовательности самого экзона или фланкирующих его интронов (такие, как сила сайтов сплайсинга, частота или аффинность сайтов связывания для белков – регуляторов сплайсинга, устойчивость вторичной структуры или эволюционный консерватизм последовательности и т. д.). Подробное описание использованных признаков дано в работе [6].

**Методика вычислительного подхода к группировке событий альтернативного сплайсинга.** Решение задачи анализа и моделирования транскрипционных данных реализуется с помощью алгоритмов и программных средств интеллектуального анализа данных (data mining) [10–12]. Прямым способом разделения или группировки теоретических молекул РНК является их векторизация путем составления набора данных, в котором для каждой молекулы РНК экзоны заменяются векторами их признаков в случае наличия соответствующих экзонов и векторами нулей в случае отсутствия указанных экзонов. Затем решается задача классификации и предсказания типов молекул РНК. Основным недостатком данного подхода заключается в со-

ставлении огромного набора данных, содержащего более 40 000 и 100 000 строк и колонок соответственно (например, для гибридного онкогена RUNX1/RUNX1T1 молекул РНК – 43 353 (число строк), экзонов – 99 и признаков экзонов – 1438 (число столбцов 142 362)), что затрудняет применение вычислительных алгоритмов анализа данных. Более усовершенствованным подходом является предсказание молекул РНК с использованием алгоритмов поиска ассоциативных правил [5]. С помощью данных алгоритмов путем анализа структуры экспериментально обнаруженных транскриптов генов формулируются ассоциативные правила, описывающие наиболее значимые и устойчивые комбинации экзонов. Найденные правила последовательно применяются к списку теоретически предсказанных изоформ РНК, тем самым оставляя в нем только те варианты, которые содержат комбинации экзонов, соответствующие правилам. Однако данный подход не учитывает свойства экзонов, входящих в последовательности молекул РНК, что делает результат анализа слишком грубым, определяющим в основном короткие транскрипты или незначительно отличающиеся (в пределах одного-двух экзонов) от наиболее распространенных вариантов экспериментально подтвержденных РНК. Развитием идеи поиска ассоциативных правил является байесовский подход [10, 13], основанный на расчете вероятностей появления молекул РНК исходя из условных вероятностей появления входящих в них экзонов, которые оцениваются по частотам появления экзонов в выборке экспериментально подтвержденных молекул РНК. К недостаткам подхода можно отнести нахождение коротких молекул, состоящих из наиболее вероятных экзонов, и неучет свойств признаков экзонов, что при грубой оценке условных вероятностей появления экзонов весьма критично и может существенно понизить точность определения молекул РНК. Высокий потенциал имеют подходы, основанные на векторизации нуклеотидных последовательностей молекул РНК и применении нейронных сетей глубокого обучения [14–17]. Однако данные подходы весьма затратны в плане потребления вычислительных ресурсов, так как используют ресурсоемкие вычислительные алгоритмы (специальные алгоритмы векторизации нуклеотидных последовательностей, алгоритмы автоматического отбора наиболее информативных признаков (features selection), сверточные нейронные сети), что существенно ограничивает их широкую применимость. Очевидно, что наиболее перспективным способом решения задачи появления молекул РНК определенного класса является подход, позволяющий выполнить прямое сравнение молекул РНК с учетом свойств входящих в них экзонов. В работе предлагается методика для подобного подхода, включающая набор алгоритмов интеллектуального анализа данных, согласно которой молекулы РНК могут сравниваться напрямую без использования грубых или точных, но ресурсоемких вычислительных алгоритмов.

Идея вычислительного подхода состоит в снижении размерности пространства экзонных признаков и объединении близко расположенных экзонов в ограниченное число классов, замене экзонных путей генерации РНК на последовательности соответствующих меток классов экзонов, вычислении расстояний между транскриптами РНК по некоторой мере сходства, объединении близко расположенных объектов РНК в кластеры. Основные этапы подхода с учетом выбранных наиболее оптимальных алгоритмов интеллектуального анализа данных представлены на рис. 1. Рассмотрим их более подробно.

*Этап 1. Снижение размерности пространства признаков экзонов.* Очевидно, что большая часть признаков, описывающих нуклеотидные последовательности экзонов генов, малоинформативная. Учет группы малоинформативных признаков приводит к затруднению анализа данных, а именно к их зашумлению, увеличению объема данных, искажению достоверной информации о кластерах схожих экзонов, снижению точности классификации данных. Для улучшения качества разбиения экзонов на кластеры требуется проведение этапа анализа данных, включающего переход от неинформативных атрибутов экзонов к информативным в смысле их разделения на кластеры. Для выполнения данного преобразования требуется применение алгоритмов снижения размерности данных [18]. Снижение размерности данных является наиболее эффективным подходом для удаления шумовых и неинформативных атрибутов объектов. Методы снижения размерности данных включают две группы алгоритмов: на основе построения (не)линейных комбинаций признаков (feature extraction) и на основе выделения наиболее информативных исходных признаков (feature selection). К алгоритмам первой группы

относятся методы главных и независимых компонент, дискриминантный и факторный анализ [18–21]. Идея алгоритмов данной группы состоит в переходе в пространство низкой размерности (новых признаков) без потери сущности информации. Идея алгоритмов второй группы состоит в выделении небольшой группы исходных наиболее информативных признаков объектов, минимизирующих шум и избыточность в данных и максимизирующих их информативность в смысле разделения на кластеры [22, 23]. Часто применение алгоритмов второй группы является предпочтительным, так как не приводит к изменению исходных данных, в то время как в пространстве новых признаков взаимное расположение кластеров данных может измениться, что приведет к неверной биофизической интерпретации исследуемых процессов. Ввиду того что в данной работе в первую очередь требуется сокращение пространства признаков экзонов и увеличение точности их последующей классификации, принято решение об использовании для снижения размерности данных метода линейного преобразования признаков, а именно метода главных компонент. Метод главных компонент служит базовым алгоритмом сжатия данных. Он обладает высоким быстродействием, что обеспечивает проведение вычислительного эксперимента при малых вычислительных затратах, и является относительно простым для программной реализации.



Рис. 1. Блок-схема вычислительного подхода для группировки событий альтернативного сплайсинга в первичных матричных РНК генов человека

*Этап 2. Объединение экзонов в классы.* Объединение экзонов представляет собой разбиение множества элементов на группы без обучения и является задачей кластерного анализа. Кластерный анализ не требует априорной информации о метках классов данных и позволяет разделить множество исследуемых объектов на группы похожих объектов – кластеры. По способам кластеризации методы кластерного анализа можно условно разделить на две большие группы: иерархические и неиерархические методы [24, 25]. Каждая из групп методов включает множество подходов и алгоритмов. Для кластерного анализа небольших наборов данных экзонов

(до 5000 объектов) предпочтительнее использовать медленные и более точные иерархические методы, для анализа больших наборов данных (более 5000 объектов) – быстрые и менее точные методы неиерархического анализа. В работе применяется иерархическая кластеризация экзонов генов на основе отобранного набора новых признаков (главных компонент). Выполняется разбиение экзонов на кластеры и присвоение каждому кластеру уникального индекса.

*Этап 3. Преобразование транскриптов РНК 1.* Осуществляется преобразование транскриптов первой из сравниваемых молекул РНК. Для уменьшения вычислительной сложности решения задачи предсказания экзонных последовательностей РНК используется прием разделения пространства экзонов гена на непересекающиеся области, при этом каждой области ставится в соответствие символ или метка класса (индекс). Конечное множество символов образует алфавит исследуемых последовательностей. Выполняется преобразование символов последовательностей экспериментально подтвержденных транскриптов РНК (от имен экзонов) в метки или индексы кластеров, в которых расположены соответствующие экзоны. На данном этапе производится удаление транскриптов-дубликатов. В случае необходимости анализ удаленных транскриптов РНК осуществляется после выполнения завершающего этапа подхода.

*Этап 4. Преобразование транскриптов РНК 2.* Выполняется преобразование транскриптов второй молекулы РНК в метки кластеров экзонов и удаление транскриптов-дубликатов. Исследование удаленных транскриптов РНК производится после проведения завершающего этапа подхода.

*Этап 5. Вычисление расстояний между транскриптами РНК и объединение близко расположенных транскриптов РНК.* Суть решаемой задачи состоит в формализации различия между экзонными последовательностями транскриптов РНК и введении отношения расстояния между ними для последующего определения их подобия. При этом принимается ряд допущений: экзоны со схожими характеристиками считаются однотипными, а экзонные последовательности РНК, расположенные на малых расстояниях, – функционально близкими и соответствующими определенным биологическим процессам. Функцией расстояния может являться некоторый алгоритм для вычисления расстояния между символьными строками. Объединение близко расположенных транскриптов РНК производится с помощью методов кластерного анализа. Например, теоретически предсказанные транскрипты РНК некоторого гена, попадающие в кластеры экспериментально подтвержденных транскриптов РНК и определенные по некоторому порогу меры расстояний сходства, считаются наиболее вероятными вариантами альтернативного сплайсинга для указанного гена. Точная мера близости предсказанного транскрипта к заданному экспериментально подтвержденному транскрипту оценивается с помощью заданной функции расстояния, или меры сходства [26, 27].

Следует отметить, что алгоритмы кластерного анализа применяются на втором и пятом этапах разработанного подхода: на втором этапе предпочтительнее использовать иерархические алгоритмы кластерного анализа, так как число кластеризуемых объектов невелико (100–200); на пятом этапе – алгоритмы неиерархического кластерного анализа, так как число объектов может быть велико. Однако в неиерархических итерационных алгоритмах требуется многократное вычисление расстояний между объектами данных на каждой итерации, что существенно замедляет анализ данных в случае расчета мер сходства символьных последовательностей. В иерархических алгоритмах достаточно единожды вычислить матрицу расстояний между объектами, которая затем используется в вычислительных процедурах алгоритмов. Поэтому для кластерного анализа транскриптов РНК также выбраны иерархические алгоритмы.

**Описание вычислительного эксперимента.** Для проверки работоспособности разработанных алгоритмов подхода рассмотрено предсказание событий сплайсинга на примерах экспериментально подтвержденных транскриптов различных пар 14 модельных генов. Случайным образом составлены 10 пар модельных генов (табл. 1). В случае успешной работы вычислительного подхода экспериментально подтвержденные транскрипты РНК различных генов должны быть предсказаны с высокой точностью, т. е. должны сформироваться различные кластеры данных. Анализ составленных пар генов выполнен в соответствии с этапами разработанного подхода.

Таблица 1

Пары сравниваемых 14 модельных генов

Номер пары	Ген 1	Ген 2	Количество экспериментально подтвержденных транскриптов (ген 1 / ген 2)	Количество экзонов, формирующих экспериментально подтвержденные транскрипты (ген 1 / ген 2)
1	ENSG00000228956	ENSG00000205336	65 / 72	118 / 156
2	ENSG00000154556	ENSG00000166444	57 / 50	130 / 121
3	ENSG00000165795	ENSG00000196628	55 / 61	106 / 140
4	ENSG00000226674	ENSG00000228486	78 / 55	126 / 93
5	ENSG00000231898	ENSG00000236172	67 / 53	127 / 107
6	ENSG00000237298	ENSG00000239665	58 / 50	127 / 93
7	ENSG00000242086	ENSG00000242808	121 / 50	221 / 97
8	ENSG00000228956	ENSG00000165795	65 / 55	118 / 106
9	ENSG00000205336	ENSG00000226674	72 / 78	156 / 126
10	ENSG00000154556	ENSG00000231898	57 / 67	130 / 127

Анализ полного набора признаков экзонов на этапе 1 выполнен с использованием метода главных компонент и процедуры стандартизации данных. Процедура стандартизации позволяет устранить чрезмерный эффект влияния признаков с наибольшим разбросом. Реализован отбор первых главных компонент, объясняющих требуемую долю вариации в данных (например, 95 или 99 %).

Для кластерного анализа экзонов генов выбран иерархический агломеративный кластерный анализ. В качестве расстояний между объектами рассмотрены: евклидово (euclidean), Чебышева (maximum), городских кварталов (manhattan) и Минковского (minkowski,  $p = 4$ ); в качестве методов связывания – Уорда (ward), ближайшего (single) и дальнего (complete) соседей, средней связи (average), Маккуити (mcquitty) и центроидное (centroid) [24, 25]. Оптимальное число кластеров экзонов может быть определено в результате дополнительного исследования количества кластеров экзонов, варьируемого от некоторого минимального (например, пять) до максимального значения числа экзонов. Нижняя граница для числа кластеров определяется условием установленной точности классификации, верхняя – вычислительными возможностями исследователя. В данной работе разбиение экзонов производится на 26 кластеров. Это количество является оптимальным в первом приближении для проверки работоспособности предлагаемого подхода и соответствует количеству символов латинского алфавита, что упрощает алфавитное представление экзонов последовательностей РНК в смысле общепринятых лексических ассоциаций.

Для определения наиболее эффективного метрического расстояния и способа связывания объектов в алгоритмах иерархического кластерного анализа рассмотрены кофенетический корреляционный коэффициент  $\kappa$  [28] и обратная величина расчетной статистики критерия  $\chi^2$  [29]. Два наугад выбранных объекта  $l$  и  $m$  на иерархическом дереве связаны между собой так называемым кофенетическим расстоянием  $\rho_{lm}$ . Величина этого расстояния определяется расстоянием между двумя кластерами, в которых находятся данные объекты. Мерой линейной связи между кофенетическими  $\rho$  и метрическими расстояниями  $r$  между объектами данных является кофенетический корреляционный коэффициент  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{\text{cov}_{\rho r}}{\sigma_{\rho} \times \sigma_r}, \quad (1)$$

где  $\text{cov}_{\rho r}$  – ковариация между кофенетическими  $\rho$  и метрическими расстояниями  $r$ ;  $\sigma_{\rho}$  и  $\sigma_r$  – среднеквадратические отклонения для оценок кофенетических  $\rho$  и метрических расстояний  $r$ .

Построение иерархического дерева считается успешным, если кофенетический корреляционный коэффициент близок к единице. К недостатку критерия оценки качества на основе кофенетического корреляционного коэффициента следует отнести неспособность учета равномерности заполнения кластеров данных. Равномерность заполнения кластеров данных снижает эффект множественного появления транскриптов-дубликатов (ввиду наличия большого количества экзонов с определенной меткой класса), что существенно повышает точность последующей классификации транскриптов РНК. Для оценки равномерности заполнения кластеров данных используется величина

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^J \frac{(v_j - n \times p_j)^2}{n \times p_j}, \quad (2)$$

где  $v_j$  – число экзонов в  $j$ -м кластере;  $p_j = 1/J$ ;  $J$  – число кластеров;  $n$  – число экзонов.

Для оценки качества иерархического кластерного анализа рассмотрен интегральный коэффициент качества кластерного анализа  $Q$ , представляющий собой среднее арифметическое кофенетического корреляционного коэффициента и нормированной обратной величины  $\chi^2$ :

$$Q = \frac{1}{2} \times \left( \kappa_{ij} + k \times \frac{1}{\chi_{ij}^2} \right), \quad (3)$$

где  $\kappa_{ij}, \chi_{ij}^2$  – кофенетический корреляционный коэффициент и величина критерия  $\chi^2$  для вычисления расстояния по некоторой мере сходства  $i$  и способу связывания  $j$ . Нормировочный коэффициент  $k$  выбирается из условия приведения к единой шкале двух критериев. В данной работе  $k = 100$ . Примеры оценки качества иерархического кластерного анализа показаны на рис. 2.

В качестве мер сравнения последовательностей транскриптов РНК генов на этапе 4 рассмотрены расстояния Джаро – Винклера ( $jw$ ), оптимального совпадения строк ( $osa$ ), Левенштейна ( $lv$ ), Дамерау – Левенштейна ( $dl$ ), наибольшей общей подстроки ( $lcs$ ),  $q$ -грамм ( $qgram$ ), косинусное ( $cosine$ ), Жаккара ( $jaccard$ ) и расстояние кодирования в фонетический код ( $soundex$ ) [27, 30–32].

Для реализации процедуры кластерного анализа транскриптов молекул РНК различных генов, представленных матрицей вычисленных расстояний между транскриптами, выбран иерархический агломеративный кластерный анализ. В качестве связывания кластеров исследованы методы Уорда, ближайшего и дальнего соседей, средней связи, Маккуити и центроидный.

Для оценки точности отнесения транскриптов РНК к заданному гену используется мера

$$A = 100 \cdot (N_1 + N_2) / N, \quad (4)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  – числа правильно классифицированных транскриптов для двух генов;  $N$  – общее число транскриптов двух генов.

**Результаты исследования. Сравнительный анализ РНК-продуктов нормальных генов человека.** В ходе анализа полного набора признаков экзонов 10 пар модельных генов с использованием метода главных компонент было отобрано от 50 до 100 наиболее значимых компонент, объясняющих 99 % вариаций в данных. Пример, демонстрирующий результаты работы метода главных компонент, представлен на рис. 3, а. Применение метода снижения размерности данных позволило в 15–30 раз сократить пространство признаков экзонов, что привело почти к пропорциональному увеличению производительности вычислений в ходе последующего анализа.



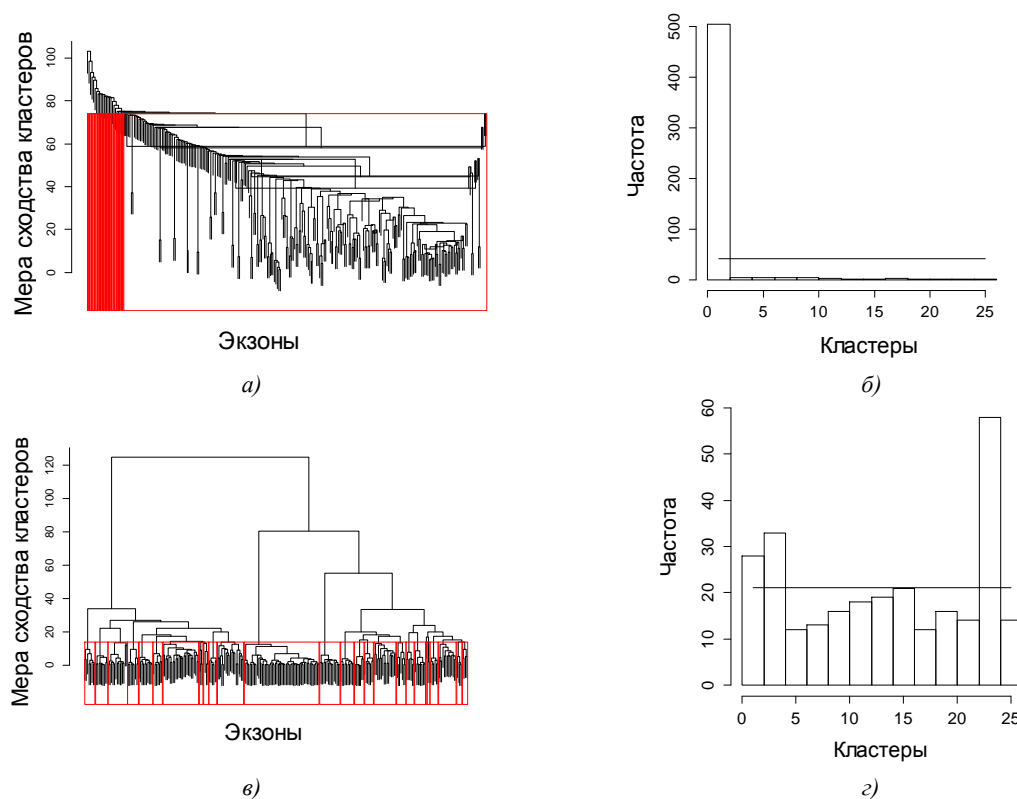


Рис. 2. Примеры оценки качества неудовлетворительного (*а, б*) и успешного (*в, з*) иерархического кластерного анализа экзонов модельных генов: *а*) и *в*) дендрограммы иерархического кластерного анализа (красным цветом выделены кластеры сходных экзонов); *б*) и *з*) гистограммы распределений числа экзонов в кластерах (вертикальные полосы ( $np_j, j = 1, 2, \dots, 26$ ) – нормированные вероятности для равномерной дискретной случайной величины, распределенной в интервале  $[1; 26]$ )

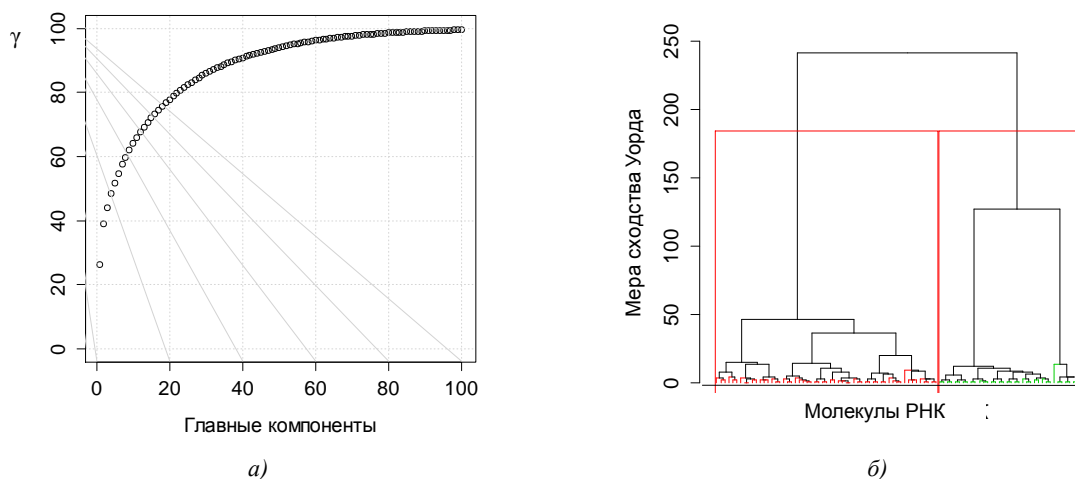


Рис. 3. Результаты работы методов главных компонент и иерархического кластерного анализа для пары генов MUC20-OT1 и SOX2-OT: *а*) относительная кумулятивная доля разброса  $\gamma$  для первых 100 главных компонент, полученная в результате применения метода главных компонент для анализа экзонов пары генов; *б*) результаты работы алгоритма иерархической кластеризации пула уникальных экспериментальных транскриптов двух модельных генов

Результаты иерархического кластерного анализа экзонов 10 пар модельных генов с использованием различных способов вычисления расстояний и связывания кластеров представлены в табл. 2. Наилучшие результаты этого анализа характерны для связывания кластеров по Уорду, для которых среднее качество кластерного анализа  $\langle Q \rangle$  выше 1,3. Наихудшими являются ме-

тоды, включающие медианное и ближайшего соседа объединения кластеров. Следует отметить, что выбор расстояния не столь критичен. Тем не менее иерархический кластерный анализ с использованием расстояний Минковского и связывания по Уорду является наиболее эффективным способом группировки экзонов генов и для дальнейшего исследования выбраны результаты именно этого анализа.

Таблица 2

Рейтинг способов вычисления расстояний и методов связывания иерархического кластерного анализа экзонов 10 пар модельных генов ( $\langle k \rangle$ ,  $\langle \chi^2 \rangle$  и  $\langle Q \rangle$  – оценки математического ожидания для величин  $k$ ,  $\chi^2$  и  $Q$ )

Ранг	Расстояние	Метод	$\langle k \rangle$	$\langle \chi^2 \rangle$	$\langle Q \rangle$
1	minkowski	ward	0,543	59,733	1,311
2	maximum	ward	0,556	61,422	1,294
3	manhattan	ward	0,304	64,557	1,180
4	euclidean	ward	0,478	72,112	1,117
5	maximum	complete	0,573	81,229	0,998
6	minkowski	complete	0,605	135,909	0,711
7	euclidean	complete	0,625	258,160	0,567
8	maximum	average	0,687	304,849	0,542
9	maximum	mcquitty	0,619	234,470	0,542
10	minkowski	average	0,749	436,950	0,517
11	minkowski	mcquitty	0,662	381,170	0,496
12	euclidean	mcquitty	0,707	579,726	0,471
13	euclidean	average	0,820	1154,007	0,467
14	manhattan	average	0,854	2411,358	0,450
15	manhattan	centroid	0,831	2678,246	0,436
16	manhattan	complete	0,598	598,123	0,420
17	manhattan	single	0,797	2599,807	0,419
18	manhattan	median	0,774	2662,043	0,407
19	manhattan	mcquitty	0,715	1219,003	0,407
20	euclidean	centroid	0,710	2566,069	0,376
21	euclidean	single	0,701	2248,179	0,376
22	maximum	centroid	0,644	1425,691	0,371
23	minkowski	centroid	0,655	1757,906	0,365
24	euclidean	median	0,629	2560,567	0,336
25	minkowski	single	0,566	1900,626	0,314
26	minkowski	median	0,536	2092,882	0,295
27	maximum	single	0,512	1776,142	0,292
28	maximum	median	0,469	1555,219	0,274

Результаты иерархического кластерного анализа транскриптов 10 пар различных генов с использованием различных способов вычисления расстояний и связывания кластеров представлены в табл. 3. Пример успешного разделения экспериментально подтвержденных транскриптов показан на рис. 3, б. По вертикальной оси указано расстояние Уорда, по горизонтальной – молекулы РНК. Контурами выделено итоговое разбиение транскриптов РНК на два кластера, соответствующих генам MUC20-OT1 и SOX2-OT. Наилучшим способом

объединения кластеров является связывание по Уорду, наилучшими расстояниями – Жаккара, косинусное и Джаро – Винклера. Расстояние Жаккара и связывание кластеров по Уорду обеспечивают наиболее высокую точность кластеризации. Средняя точность разделения составляет 99,5 % для рассмотренных пар модельных генов, что подтверждает работоспособность разработанного подхода: транскрипты пар модельных генов надежно разделяются на два класса. Следует отметить, что анализ пар генов, характеризуемых полным набором экзонов, не позволяет достичь точности разделения более 88–89 %. Это является весомым аргументом в пользу обязательного применения метода главных компонент не только для снижения размерности данных, но и для повышения точности вычислений.

Таблица 3

Рейтинг способов вычисления расстояний и методов связывания иерархического кластерного анализа транскриптов 10 пар модельных генов (<A> и с.к.о. – оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения для величины точности классификации A)

Ранг	Расстояние	Метод	<A>	С.к.о.
1	jaccard	ward	99,5	0,9
2	cosine	ward	99,1	1,4
3	jw	ward	95,5	6,6
4	lcs	ward	89,2	17,2
5	qgram	ward	88,0	18,1
6	jaccard	single	83,1	22,0
7	cosine	single	78,3	23,0
8	lcs	complete	71,5	22,5
9	qgram	complete	67,5	23,7
10	cosine	complete	67,2	10,8
11	jw	single	66,9	24,4
12	osa	ward	65,6	17,7
13	lv	ward	65,6	17,7
14	dl	ward	65,6	17,7
15	jaccard	complete	65,6	13,9
16	lv	complete	61,2	14,6
17	osa	complete	61,0	14,3
18	dl	complete	61,0	14,3
19	jw	complete	60,3	8,8
20	qgram	single	59,6	14,3
21	lcs	single	56,6	12,3
22	dl	single	56,4	12,0
23	soundex	ward.D2	55,4	10,9
24	soundex	single	54,7	8,9
25	soundex	complete	54,7	8,9
26	osa	single	54,5	11,5
27	lv	single	54,5	11,5

**Сравнительный анализ экспериментально подтвержденных и предсказываемых РНК-продуктов гибридного онкогена RUNX1/RUNX1T1 человека.** Разделение экспериментальных и теоретически возможных транскриптов гибридного онкогена RUNX1/RUNX1T1 яв-

ляется более сложной задачей, чем классификация транскриптов модельных генов. Это обусловлено несколькими причинами. Во-первых, предсказываемые изоформы РНК, будучи путями графа сплайсинга, реконструированного по реальным транскриптам, состоят из тех же экзонов, что и экспериментально обнаруженные молекулы РНК. Во-вторых, многие альтернативные экзоны гибридного онкогена RUNX1/RUNX1T1 лишь незначительно отличаются друг от друга по нуклеотидной последовательности (образуются на основе канонических экзонов путем применения альтернативных 5' и (или) 3' сайтов сплайсинга), что делает их плохо различимыми или полностью неразличимыми по тем признакам, которые были использованы для описания экзонов. В-третьих, многие пути в графе сплайсинга уникальны лишь по таким упомянутым выше и плохо различимым экзонам. Как следствие, и сами пути очень плохо различаются. Наконец, в-четвертых, как было показано ранее [5, 6, 33], одной из ключевых мод альтернативного сплайсинга РНК изучаемого онкогена является выбор альтернативных 5' и (или) 3' сайтов сплайсинга, находящихся, как правило, на небольшом расстоянии от канонических сайтов. Наравне с пропуском экзонов эта мода сплайсинга обеспечивает образование подавляющего большинства изоформ РНК гибридного онкогена RUNX1/RUNX1T1, что опять же затрудняет разделение таких вариантов РНК.

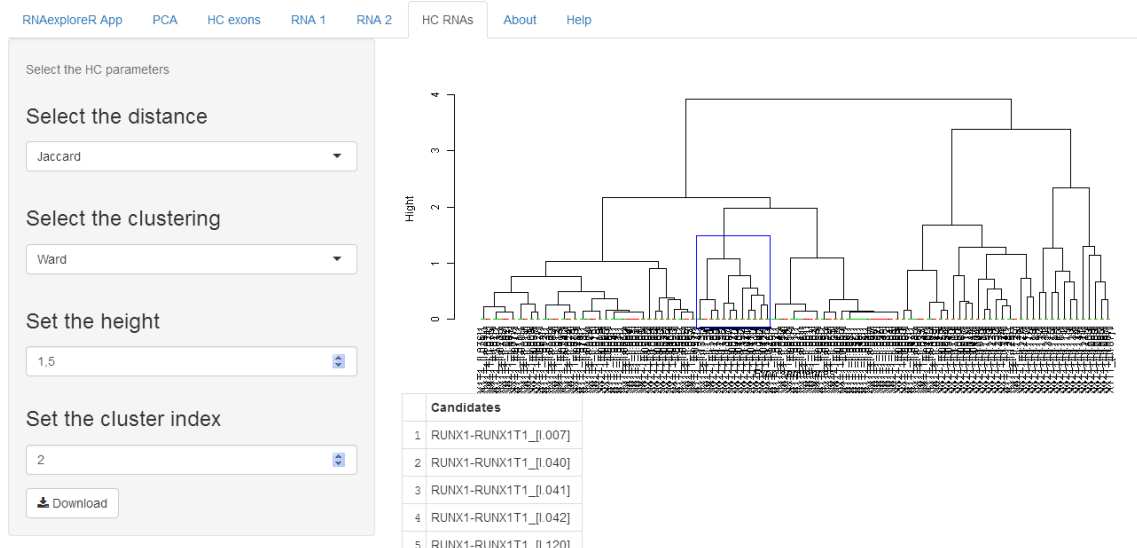
Тем не менее, несмотря на отмеченные выше сложности, разработанный алгоритм анализа обладает достаточной чувствительностью к небольшим различиям в структуре транскриптов, чтобы относительно успешно их разделять. Поскольку транскрипты гибридного онкогена RUNX1/RUNX1T1 генерируются разными путями и между ними есть существенные структурные различия [6, 33], то первоначально была проведена кластеризация самих экспериментально подтвержденных транскриптов и только после этого сопоставлены эти транскрипты с теоретически предсказанными изоформами РНК. Такой подход вместе с разработанным алгоритмом анализа позволяет разнести экспериментально подтвержденные и предсказанные транскрипты по двум разным группам, что наглядно подтверждает работоспособность разработанного метода (рис. 4).

Следует отметить, что в данной работе определение изоформ РНК эквивалентно нахождению наиболее вероятных транскриптов из списка теоретически предсказанных молекул РНК, сформированного путем полного обхода графа сплайсинга. В случае добавления некоторой новой изоформы, не входящей в список предсказанных изоформ данного гена, исследование выполняется аналогично: формируются метки экзонов данной изоформы, вычисляются расстояния от изоформы до экспериментально подтвержденных транскриптов РНК, определяется минимальное расстояние до некоторого экспериментально подтвержденного транскрипта РНК, мера близости к которому является предсказательной оценкой событий альтернативного сплайсинга.

**Программный пакет RNAexploreR.** Для реализации программного обеспечения используются различные вычислительные платформы и технологии программирования. В большинстве публикаций, посвященных сравнительному анализу бесплатных пакетов по дисциплине «Интеллектуальный анализ данных», нет явного лидера. В настоящее время в открытом доступе находится большое количество программных средств интеллектуального анализа данных, среди которых можно выделить WEKA, Tanagra, Rapid Miner, KNIME, Python- и R-платформы [34]. Достоинствами того или иного программного ресурса являются: вычислительная производительность, широкий набор подключаемых библиотек, кроссплатформенность, возможность выполнения параллельных вычислений и работы напрямую с базами и хранилищами данных.

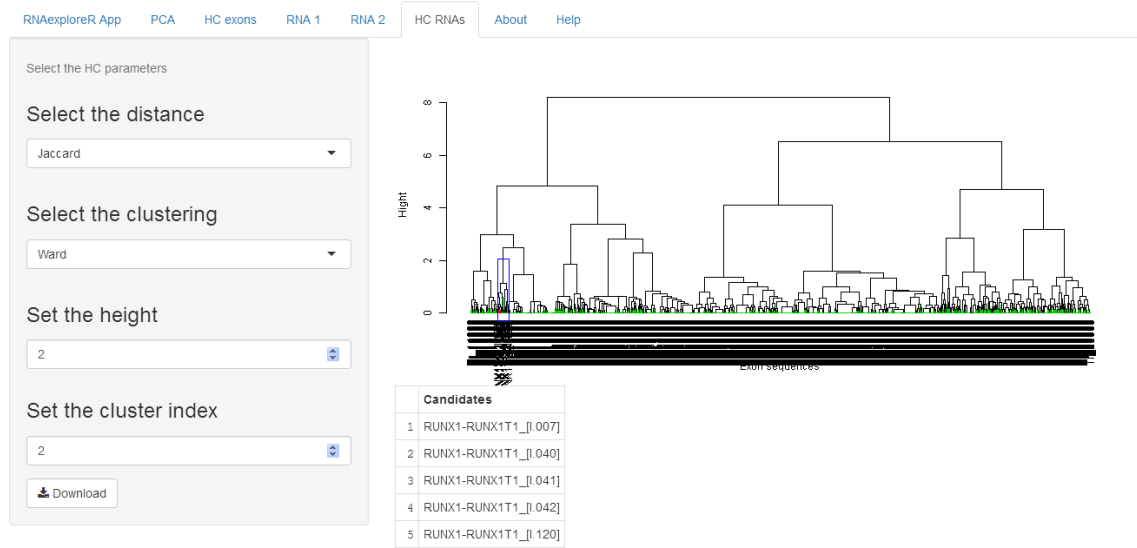
Основным преимуществом среды статистического программирования R является возможность использования огромного набора биоинформационных алгоритмов, алгоритмов интеллектуального анализа данных и разнообразных статистических вычислительных ресурсов научного сообщества [35, 36]. Главный ее недостаток – невысокая вычислительная производительность. Данное ограничение можно частично или полностью устранить с помощью процедур распараллеливания вычислений, подключения библиотек высокопроизводительных математических вычислений (например, Microsoft R Open (MRO) и Intel Math Kernel Library (MKL)) или же процедур компиляции и подключения программного кода, реализованного на других специализированных языках программирования (например, с помощью R-пакетов Rcpp, Rinside, inline, rJava, reticulate). Наиболее популярными пакетами для разработки пользовательских интерфейсов программных приложений, интегрирующими R-коды, являются gWidgets, rpanel, svDialogs, RGtk2, qtbase, tcltk [35].

## RNAexplorerR



a)

## RNAexplorerR



б)

Рис. 4. Дендрогаммы иерархического кластерного анализа: а) уникальных экспериментально подтвержденных транскриптов гибридного онкогена RUNX1/RUNX1T1; б) случайной выборки из 3000 предсказываемых изоформ РНК и кластера экспериментально подтвержденных транскриптов (выделен рамкой синего цвета). По вертикальной оси указано расстояние Уорда, по горизонтальной – молекулы РНК. Мера расчета близости молекул – расстояние Жаккара

Новое направление в разработке R-приложений связано с созданием «реактивных» веб-интерфейсов с помощью пакета Shiny и размещением программной реализации на ресурсе shinyapps.io, предоставляемом разработчиками открытого программного обеспечения RStudio [37]. Достоинством данного подхода является возможность удаленной работы с приложением широкой научной аудитории пользователей в режиме онлайн через сеть Интернет. Для реализации программного приложения в работе выбраны вычислительная среда R и пакет Shiny для создания веб-интерфейса приложения.

Рассмотренные алгоритмы запрограммированы на языке R и собраны в единый модуль. Реализовано несколько вариантов программных пакетов: онлайн, офлайн, оптимизированный и распараллеленный. Онлайн-вариант программного пакета размещен в сети Интернет на веб-ресурсе [https://dsa-cm.shinyapps.io/NIR\\_bio\\_code\\_Sh-MolBio/](https://dsa-cm.shinyapps.io/NIR_bio_code_Sh-MolBio/) [38].

Разработанное веб-приложение RNAexploreR интегрирует реализованные алгоритмы методики вычислительного подхода. Главное окно интерфейса пакета (рис. 5) состоит из восьми панелей, соответствующих пяти этапам анализа, информации об авторах разработки и странице помощи. На каждом этапе анализа пользователь должен выбрать соответствующий файл (экзонов, экспериментально подтвержденных транскриптов или молекулы РНК 1 / RNA 1, теоретически предсказанных транскриптов или молекулы РНК 2 / RNA 2) и установить системные параметры алгоритмов. Результаты анализа, а также список транскриптов сохраняются в отдельный csv-файл.

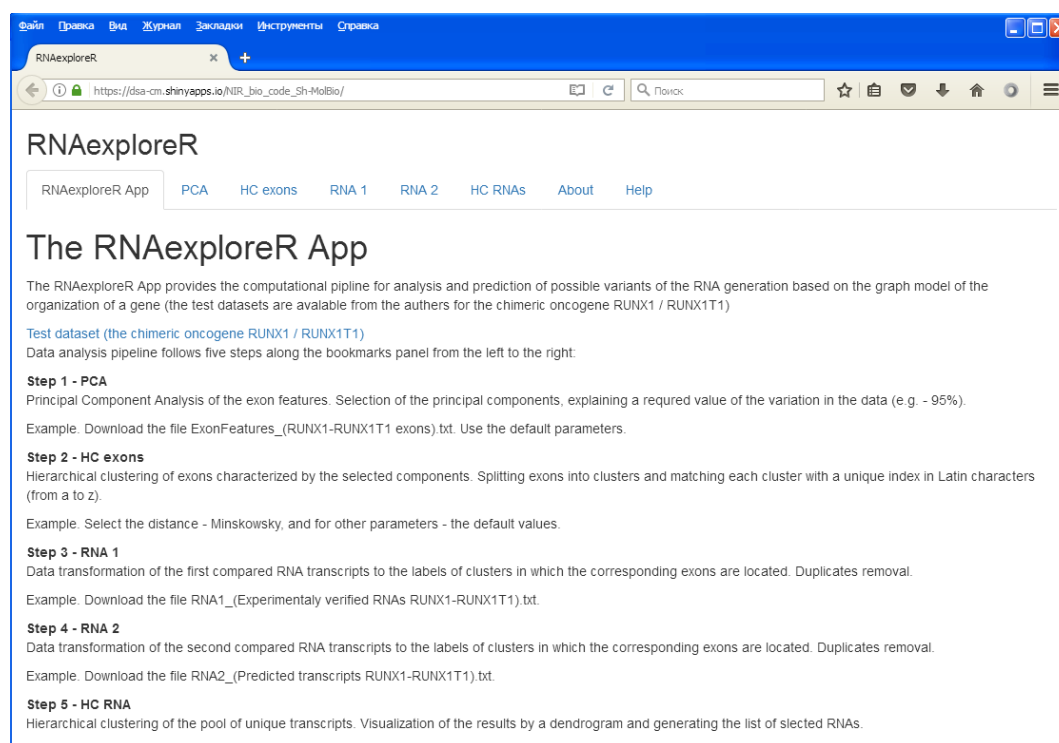


Рис. 5. Главное окно интерфейса пакета RNAexploreR

**Заключение.** Впервые предложен и исследован на модельных генах человека системный вычислительный подход к сравнению транскриптов генов человека, основанный на применении алгоритмов снижения размерности данных, иерархического кластерного анализа, сравнения символьных последовательностей. Средняя точность отнесения транскрипта к заданному гену составляет более 99 % для рассмотренных пар нормальных генов человека. Вычислительный подход позволяет разнести выборки экспериментально подтвержденных и предсказанных транскриптов по двум разным группам молекул РНК гибридного онкогена RUNX1/RUNX1T1.

Разработаны программный пакет RNAexploreR и одноименное веб-приложение, интегрирующие все реализованные алгоритмы анализа альтернативного сплайсинга РНК-продуктов генов человека. Новизна разработки состоит в том, что пакет включает методологию анализа событий альтернативного сплайсинга молекул РНК генов человека, основанную на моделировании экзонных графов генов и применении эффективных алгоритмов интеллектуального анализа данных. Разработка имеет ряд преимуществ в сравнении с традиционными программными решениями: позволяет осуществлять высокоточную классификацию молекул РНК генов человека по множеству экзонных признаков и структуре таких молекул, автоматизирует анализ генетических данных, обеспечивает высокое качество анализа в условиях высокого экспери-

ментального шума, интегрирует набор усовершенствованных алгоритмов интеллектуального анализа данных, предоставляет возможность удаленной работы с приложением широкой научной аудитории пользователей в режиме онлайн через сеть Интернет, использует распараллеливание вычислительных ресурсов.

Предложенные алгоритмы и программное обеспечение могут применяться для изучения организации и функционирования как aberrантных, так и нормальных генов человека, а получаемые при этом данные могут быть полезны для дифференциальной диагностики и построения прогноза течения заболеваний, имеющих генетическую природу.

### Список использованных источников

1. Baralle, F. E. Alternative splicing as a regulator of development and tissue identity / F. E. Baralle, J. Giudice // *Nat. Rev. Mol. Cell Biol.* – 2017. – Vol. 18. – P. 437–451.
2. Nilsen, T. W. Expansion of the eukaryotic proteome by alternative splicing / T. W. Nilsen, B. R. Graveley // *Nature.* – 2010. – Vol. 463. – P. 457–463.
3. Ramanouskaya, T. V. The determinants of alternative RNA splicing in human cells / T. V. Ramanouskaya, V. V. Grinev // *Mol. Genet. Genomics.* – 2015. – Vol. 292. – P. 1175–1195.
4. Sequence, structure, and context preferences of human RNA binding proteins / D. Dominguez [et al.] // *Mol. Cell.* – 2018. – Vol. 70. – P. 854–867.
5. Изучение закономерностей сплайсинга РНК гибридного онкогена RUNX1-RUNX1T1 человека с помощью методов интеллектуального анализа данных и высокопроизводительного секвенирования / И. Н. Ильюшенок [и др.] // *Молекулярная и прикладная генетика.* – 2017. – № 23. – С. 92–101.
6. Decoding of exon splicing patterns in the human RUNX1-RUNX1T1 fusion gene / V. V. Grinev [et al.] // *Intern. J. Biochem. Cell Biol.* – 2015. – Vol. 68. – P. 48–58.
7. Deciphering the splicing code / Y. Barash [et al.] // *Nature.* – 2010. – Vol. 465. – P. 53–59.
8. Расширяя гипотезу «двух ударов»: молекулярные механизмы RUNX1-RUNX1T1-опосредованного лейкозогенеза / И. Н. Ильюшенок [и др.] // *Журн. Белорус. гос. ун-та. Биология.* – 2017. – № 2. – С. 3–16.
9. Ensembl 2018 / D. R. Zerbino [et al.] // *Nucleic Acids Res.* – 2018. – Vol. 46(D1). – P. D754–D761.
10. Яцков, Н. Н. Интеллектуальный анализ данных : пособие / Н. Н. Яцков. – Минск : БГУ, 2014. – 151 с.
11. Bramer, M. Principles of Data Mining / M. Bramer. – 2nd ed. – London : Springer, 2013. – 440 p.
12. Aggarwal, C. C. Data Mining: The Textbook / C. C. Aggarwal. – Gewerbestrasse : Springer, 2015. – 734 p.
13. Hastie, T. The Elements of Statistical Learning. Data Mining, Inference, and Prediction / T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman. – 2nd ed. – N. Y. : Springer, 2009. – 739 p.
14. Разработка алгоритмов и программных средств классификации кодирующих и не кодирующих нуклеотидных последовательностей / В. Р. Закирова [и др.] // *Информатика.* – 2019. – Т. 16, № 2. – С. 111–120.
15. Zhang, S. W. Gene prediction in metagenomic fragments with deep learning / S. W. Zhang, X. Y. Jin, T. Zhang // *BioMed Res. Intern.* – November 2017.
16. Al-Ajlan, A. Feature selection for gene prediction in metagenomic fragments / A. Al-Ajlan, A. El Allali // *BioData Min.* – 2018. – Vol. 11.
17. Al-Ajlan, A. CNN-MGP: Convolutional neural networks for metagenomics gene prediction / A. Al-Ajlan, A. El Allali // *Interdisciplinary Sciences.* – December 2018.
18. Прикладная статистика: классификация и снижение размерности : справ. изд. / С. А. Айвазян [и др.] ; под ред. С. А. Айвазяна. – М. : Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
19. Jolliffe, I. T. Principal Component Analysis / I. T. Jolliffe. – 2nd ed. – N. Y. : Springer, 2002. – 487 p.
20. Hyvaerinen, A. Independent Component Analysis / A. Hyvaerinen, J. Karhunen, O. Erkki. – N. Y. : John Wiley&Sons Inc., 2001. – 481 p.
21. Лагутин, М. Б. Наглядная математическая статистика : учеб. пособие / М. Б. Лагутин. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 472 с.
22. Saeys, Y. A review of feature selection techniques in bioinformatics / Y. Saeys, I. Inza, P. Larranaga // *Bioinformatics.* – 2007. – Vol. 23. – P. 2507–2517.
23. Волков, А. В. Отбор информативных признаков экзонов генов человека / А. В. Волков, Н. Н. Яцков, В. В. Гринев // *Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика.* – 2019. – № 1. – С. 77–89.
24. Мандель, И. Д. Кластерный анализ / И. Д. Мандель. – М. : Финансы и статистика, 1988. – 176 с.
25. Технологии анализа данных: Data Mining, Visual Mining, Text Mining, OLAP / А. А. Барсегян [и др.]. – 2-е изд. – СПб. : БХВ-Петербург, 2007. – 384 с.
26. Леск, А. М. Введение в биоинформатику : пер. с англ. / А. М. Леск. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 318 с.

27. Van der Loo, M. P. J. The stringdist package for approximate string matching / M. P. J. Van der Loo // *The R Journal*. – 2014. – Vol. 6. – P. 111–122.
28. Uragn, B. The discrimination of interaural level difference sensitivity functions: development of a taxonomic data template for modeling / B. Uragn, R. Rajan // *BMC Neuroscience*. – 2013. – Vol. 14. – P. 1–19.
29. Yatskou, M. *Computer Simulation of Energy Relaxation and Transport in Organized Porphyrin Systems* / M. Yatskou. – The Netherlands, Wageningen : Ponsen & Looijen Printing Establishment, 2001. – 176 p.
30. Boytsov, L. Indexing methods for approximate dictionary searching: comparative analyses / L. Boytsov // *ACM Journal of Experimental Algorithmics*. – 2011. – Vol. 16. – P. 1–88.
31. Navarro, G. A guided tour to approximate string matching / G. Navarro // *ACM Computing Surveys*. – 2001. – Vol. 33. – P. 31–88.
32. Cohen, W. A comparison of string metrics for matching names and records / W. Cohen // *KDD*. – 2003. – Vol. 3. – P. 73–78.
33. Вклад различных механизмов генерации альтернативных транскриптов в разнообразие мРНК гибридного онкогена RUNX1-RUNX1T1 человека / И. Н. Ильющёнок [и др.] // *Журн. Белорус. гос. ун-та. Биология*. – 2019. – № 2. – С. 45–59.
34. Программный пакет RNAexploreR для предсказания вариантов альтернативного сплайсинга в первичных мРНК химерного онкогена RUNX1/RUNX1T1 человека / Н. Н. Яцков [и др.] // *Информационные технологии и системы 2018 (ИТС–2018) : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 25 окт. 2018 г.* – Минск : БГУИР, 2018. – С. 282–283.
35. R Core Team. R: A language and Environment for Statistical Computing [Electronic recourse] / R Foundation for Statistical Computing. – 2014. – Mode of access: <http://www.R-project.org/>. – Date of access: 08.02.2019.
36. Gentleman, R. Bioconductor: Open software development for computational biology and bioinformatics / R. Gentleman, V. J. Carey, D. M. Bates // *Genome Biology*. – 2004. – Vol. 5, no. 10, R80.
37. RStudio: Integrated Development for R [Electronic recourse]. – 2015. – Mode of access: <http://www.rstudio.com/>. – Date of access: 13.06.2019.
38. Yatskou, M. M. RNAexplorerR : Application of the Computational Pipeline for Analysis and Prediction of Possible Variants of the RNA Generation Based on the Graph Model of the Organization of a Gene [Electronic recourse] / M. M. Yatskou, V. V. Skakun, V. V. Grinev. – Mode of access: [https://dsa-cm.shinyapps.io/NIR\\_bio\\_code\\_Sh-MolBio/](https://dsa-cm.shinyapps.io/NIR_bio_code_Sh-MolBio/). – Date of access: 13.06.2019.

---

## References

1. Baralle F. E., Giudice J. Alternative splicing as a regulator of development and tissue identity. *Nature Reviews Molecular Cell Biology*, 2017, vol. 18, pp. 437–451.
2. Nilsen T. W., Graveley B. R. Expansion of the eukaryotic proteome by alternative splicing. *Nature*, 2010, vol. 463, pp. 457–463.
3. Ramanouskaya T. V., Grinev V. V. The determinants of alternative RNA splicing in human cells. *Molecular Genetics and Genomics*, 2015, vol. 292, pp. 1175–1195.
4. Dominguez D., Freese P., Alexis M. S., Su A., Hochman M., ..., Burge C. B. Sequence, structure, and context preferences of human RNA binding proteins. *Molecular Cell*, 2018, vol. 70, pp. 854–867.
5. Ilyushonak I. M., Gunko E. P., Antonovich M. L., Yatskou M. M., Kustanovich A. M., ..., Grinev V. V. Izucheniye zakonmernostey splajsinga RNK gibridnogo onkogena RUNX1-RUNX1T1 cheloveka s pomoshyu metodov intellektualnogo analiza dannyh i vysokoproizvoditelnogo sekvenirovaniya [Study of RNA splicing patterns of the human RUNX1-RUNX1T1 fusion oncogene by the methods of data mining and high-throughput DNA sequencing]. *Molekuljarnaja i prikladnaja genetika [Molecular and Applied Genetics]*, 2017, vol. 23, pp. 92–101 (in Russian).
6. Grinev V. V., Migas A. A., Kirsanova A. D., Mishkova O. A., Siomava N., ..., Aleinikova O. V. Decoding of exon splicing patterns in the human RUNX1-RUNX1T1 fusion gene. *The International Journal of Biochemistry & Cell Biology*, 2015, vol. 68, pp. 48–58.
7. Barash Y., Calarco J. A., Gao W., Pan Q., Wang X., ..., Frey B. J. Deciphering the splicing code. *Nature*, 2010, vol. 465, pp. 53–59.
8. Ilyushonak I. M., Sauryskaya H. A., Yatskou M. M., Skakun V. V., Grinev V. V. Rasshiryaya gipotezu "dvuh udarov": molekulyarnye mehanizmy RUNX1-RUNX1T1-oposredovannogo lejkozogeneza [Extending the "two-hits" hypothesis: the molecular mechanisms of RUNX1-RUNX1T1-mediated leukemogenesis]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Biologija [Journal of the Belarusian State University. Biology]*, 2017, no. 2, pp. 3–16 (in Russian).



9. Zerbino D. R., Achuthan P., Akanni W., Amode M. R., Barrell D., ..., Flicek P. Ensembl 2018. *Nucleic Acids Research*, 2018, vol. 46(D1), pp. D754–D761.
10. Yatskou M. M. Intellektualnyj analiz dannyh. *Data Mining*. Minsk, Belarusian State University, 2014, 151 p. (in Russian).
11. Bramer M. *Principles of Data Mining*. 2nd ed. London, Springer, 2013, 440 p.
12. Aggarwal C. C. *Data Mining: The Textbook*. Gewerbestrasse, Springer, 2015, 734 p.
13. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. *The Elements of Statistical Learning. Data Mining, Inference, and Prediction*. 2nd ed. New York, Springer, 2009, 739 p.
14. Zakirava V. R., Syrovash D. A., Hileuski S. V., Nazarov P. V., Yatskou M. M. Razrabotka algoritmov i programmnyh sredstv klassifikacii kodiruyushih i nekodiruyushih nukleotidnyh posledovatelnostej [Development of algorithms and software for classification of nucleotide sequences]. *Informatika [Informatics]*, 2019, vol. 16, no. 2, pp. 111–120 (in Russian).
15. Zhang S. W., Jin X. Y., Zhang T. Gene prediction in metagenomic fragments with deep learning. *BioMed Research International*, November 2017. DOI: 10.1155/2017/4740354
16. Al-Ajlan A., El Allali A. Feature selection for gene prediction in metagenomic fragments. *BioData Mining*, 2018, vol. 11. DOI: 10.1186/s13040-018-0170-z
17. Al-Ajlan A., El Allali A. CNN-MGP: Convolutional neural networks for metagenomics gene prediction. *Interdisciplinary Sciences*, December 2018. DOI: 10.1007/s12539-018-0313-4
18. Aivazyan S. A., Buchstaber V. M., Yenyukov I. S., Meshalkin L. Prikladnaya statistika: klassifikaciya i snizhenie razmernosti. *Applied Statistics: Classification and Reduction of Dimensionality*. In S. A. Aivazyan (ed.). Moscow, Finansy i statistika, 1989, 607 p. (in Russian).
19. Jolliffe I. T. *Principal Component Analysis*. 2nd ed. New York, Springer, 2002, 487 p.
20. Hyvaerinen A., Karhunen J., Erkki O. *Independent Component Analysis*. New York, John Wiley & Sons Inc., 2001, 481 p.
21. Lagutin, M. B. Naglyadnaya matematicheskaya statistika. *Visual Mathematical Statistics*. Moscow, BINOM, Laboratoriya znaniy, 2007, 472 p. (in Russian).
22. Saeys Y., Inza I., Larranaga P. A review of feature selection techniques in bioinformatics. *Bioinformatics*, 2007, vol. 23, pp. 2507–2517.
23. Volkau A. U., Yatskou M. M., Grinev V. V. Otbor informativnyh priznakov ekzonov genov cheloveka [Selecting informative features of human gene exons]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics]*, 2019, no. 1, pp. 77–89 (in Russian).
24. Mandel I. D. Klasternyj analiz. *Cluster Analysis*. Moscow, Finansy i statistika, 1988, 176 p. (in Russian).
25. Barsegyan A. A., Kupriyanov M. S., Stepanenko V. V., Holod I. I. Tehnologii analiza dannyh : Data Mining, Visual Mining, Text Mining, OLAP. *Data Analysis Technologies : Data Mining, Visual Mining, Text Mining, OLAP*. 2nd ed. Saint Petersburg, BHV-Peterburg, 2007, 384 p.
26. Lesk A. M. *Introduction to Bioinformatics*. Oxford, Oxford University Press, 2002, 283 p.
27. Van der Loo M. P. J. The stringdist package for approximate string matching. *The R Journal*, 2014, vol. 6, pp. 111–122.
28. Uragan B., Rajan R. The discrimination of interaural level difference sensitivity functions: development of a taxonomic data template for modeling. *BMC Neuroscience*, 2013, vol. 14, pp. 1–19.
29. Yatskou M. *Computer Simulation of Energy Relaxation and Transport in Organized Porphyrin Systems*. The Netherlands, Wageningen, Ponsen & Looijen Printing Establishment, 2001, 176 p.
30. Boytsov L. Indexing methods for approximate dictionary searching: comparative analyses. *ACM Journal of Experimental Algorithmics*, 2011, vol. 16, pp. 1–88.
31. Navarro G. A guided tour to approximate string matching. *ACM Computing Surveys*, 2001, vol. 33, pp. 31–88.
32. Cohen W. A comparison of string metrics for matching names and records. *KDD*, 2003, vol. 3, pp. 73–78.
33. Ilyushonak I. M., Migas A. A., Sukhareuski A. Y., Schneider A. D., Grinev V. V. Vklad razlichnyh mehanizmov generacii alternativnyh transkriptov v raznoobrazie mRNK gibridnogo onkogeno RUNX1-RUNX1T1 cheloveka [The contribution of various mechanisms to mRNA diversity of human fusion oncogene RUNX1-RUNX1T1]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Biologiya [Journal of the Belarusian State University. Biology]*, 2019, no. 2, pp. 45–59 (in Russian).
34. Yatskou M. M., Skakun V. V., Grinev V. V. Programmnyj paket RNAexploreR dlya predskazaniya variantov alternativnogo splajsinga v pervichnyh mRNK himernogo onkogeno RUNX1/RUNX1T1 cheloveka [The software package RNAexploreR for predicting alternative splicing variants in primary mRNAs of the human chimeric oncogene RUNX1/RUNX1T1]. *Informacionnye tehnologii i sistemy 2018 (ITS-2018): materialy Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, Minsk, 25 oktjabrja 2018 [Information Technologies and*

*Systems 2018 (ITS–2018): Proceedings of the International Scientific Conference, Minsk, 25 October 2018*]. Minsk, Belorusskij gosudarstvennyj universitet informatiki i radioelektroniki, 2018, pp. 282–283 (in Russian).

35. *R Core Team. R: A language and Environment for Statistical Computing*, 2014. Available at: <http://www.R-project.org/> (accessed 08.02.2019).

36. Gentleman R., Carey V. J., Bates D. M. Bioconductor: Open software development for computational biology and bioinformatics. *Genome Biology*, 2004, vol. 5, no. 10, R80.

37. *RStudio: Integrated Development for R*, 2015. Available at: <http://www.rstudio.com/> (accessed 13.06.2019).

38. Yatskou M. M., Skakun V. V., Grinev V. V. *RNAexplorerR : Application of the Computational Pipeline for Analysis and Prediction of Possible Variants of the RNA Generation Based on the Graph Model of the Organization of a Gene*. Available at: [https://dsa-cm.shinyapps.io/NIR\\_bio\\_code\\_Sh-MolBio/](https://dsa-cm.shinyapps.io/NIR_bio_code_Sh-MolBio/) (accessed 13.06.2019).

### Информация об авторах

*Яцков Николай Николаевич*, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры системного анализа и компьютерного моделирования, факультет радиофизики и компьютерных технологий, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.

E-mail: yatskou@bsu.by

*Скакун Виктор Васильевич*, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой системного анализа и компьютерного моделирования, факультет радиофизики и компьютерных технологий, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.

E-mail: skakun@bsu.by

*Гринеv Василий Викторович*, кандидат биологических наук, доцент, доцент кафедры генетики, биологический факультет, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.

E-mail: grinev\_vv@bsu.by

### Information about the authors

*Mikalai M. Yatskou*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Systems Analysis and Computer Modelling, Faculty of Radiophysics and Computer Technologies, Belarusian State University, Minsk, Belarus.

E-mail: yatskou@bsu.by

*Victor V. Skakun*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Head of Department of Systems Analysis and Computer Modelling, Faculty of Radiophysics and Computer Technologies, Belarusian State University, Minsk, Belarus.

E-mail: skakun@bsu.by

*Vasily V. Grinev*, Cand. Sci. (Biol.), Associate Professor, Department of Genetics, Faculty of Biology, Belarusian State University, Minsk, Belarus.

E-mail: grinev\_vv@bsu.by

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**  
**MATHEMATICAL MODELING**

УДК 519.6:536.33:629.78

Поступила в редакцию 13.05.2019  
Received 13.05.2019

Принята к публикации 01.07.2019  
Accepted 01.07.2019

**Математическое моделирование тепловых режимов  
космических аппаратов негерметичного исполнения**

**С. В. Лемешевский<sup>1</sup>, М. М. Чуйко<sup>1</sup>✉, А. И. Шнип<sup>2</sup>, Г. Л. Марцинкевич<sup>1</sup>,  
В. В. Лепин<sup>1</sup>, В. А. Ирхин<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*  
✉E-mail: chuiko@im.bas-net.by

<sup>2</sup>*Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

**Аннотация.** Предлагается описание программного комплекса для моделирования тепловых режимов космических аппаратов негерметичного исполнения в условиях полета по круговым и эллиптическим орбитам. Приводятся состав и структура программного комплекса, математические модели тепловых процессов при наличии системы обеспечения тепловых режимов космических аппаратов. Для расчета тепловых процессов используется метод сосредоточенных параметров. Даются результаты вычислительных экспериментов по термостабилизации макета орбитального оптического прибора. Программный комплекс может быть использован при проектировании и создании систем обеспечения тепловых режимов космических аппаратов негерметичного исполнения, а также при определении причин нештатных ситуаций в данных системах на орбите.

**Ключевые слова:** математическая модель, тепловые процессы, космический аппарат, система обеспечения тепловых режимов, лучистый теплообмен, элемент Пельтье

**Для цитирования.** Математическое моделирование тепловых режимов космических аппаратов негерметичного исполнения / С. В. Лемешевский [и др.] // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 25–39.

**Mathematical modeling of thermal conditions  
of non-hermetic spacecrafts**

**Sergey V. Lemeshevsky<sup>1</sup>, Mikhail M. Chuiko<sup>1</sup>✉, Aleksandr I. Shnip<sup>2</sup>,  
Grigori L. Martsynkevich<sup>1</sup>, Victor V. Lepin<sup>1</sup>, Uladzimir A. Irkhin<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*  
✉E-mail: chuiko@im.bas-net.by

<sup>2</sup>*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

**Abstract.** A description of the software complex for modeling the thermal conditions of non-hermetic spacecrafts in circular and elliptical orbits is given. The software complex structure, mathematical models of thermal processes in the presence of thermal control system are presented. For thermal processes calculation the method of lumped parameters is used. The results of thermal stabilization for model of orbital optical device are given. The software complex can be used in the design and development of thermal control systems of non-hermetic spacecraft, and in the determination of the causes of emergency situations in these systems in orbit as well.

**Keywords:** mathematical model, thermal processes, spacecraft, thermal control system, radiative heat transfer, Peltier element

**For citation.** S. V. Lemeshevsky, M. M. Chuiko, A. I. Shnip, G. L. Martsynkevich, V. V. Lepin, U. A. Irkhin. Mathematical modeling of thermal conditions of non-hermetic spacecrafts. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 25–39 (in Russian).

**Введение.** Одним из непреходящих условий надежного функционирования космического аппарата (КА) и его систем, а следовательно, и оправдания значительных затрат на его создание является обеспечение необходимого теплового режима элементам КА [1–7].

КА, находящийся вне пределов атмосферы планеты, является объектом, распределение температур в котором определяется полем внешних тепловых потоков, свойствами поверхности аппарата, ориентацией его в пространстве, энергопотреблением бортовой аппаратуры, тепловыми связями в аппарате и рядом других факторов. Так как многие элементы и приборы аппарата работоспособны в строго определенных диапазонах температур, современный КА невозможен без системы обеспечения теплового режима (СОТР).

Создание СОТР конкретного аппарата включает три стадии:

- расчетно-теоретический анализ процессов теплообмена в КА и теплового режима аппарата в целом, сравнение возможных схем решения задачи обеспечения теплового режима и окончательную расчетную проверку выбранного варианта СОТР;

- экспериментальную проверку и отработку СОТР в наземных условиях главным образом на основе моделирования реальных тепловых условий функционирования КА;

- окончательную проверку и отработку СОТР на основе результатов натурных испытаний.

В связи с тем что экспериментальная отработка требует создания уникальной экспериментальной базы и поэтому, как и отработка при натурных испытаниях, связана со значительными материальными затратами, расчетно-теоретические методы анализа и проверки теплового режима и эффективности СОТР играют весьма важную роль в решении задачи обеспечения теплового режима КА. Они необходимы не только на стадии проектирования СОТР, но и на стадии экспериментальной и натурной проверки принятых технических решений.

Конструкция КА является достаточно сложной для аналитического расчета теплового режима. Особенности теплообмена внутри КА и с окружающим пространством еще более усложняют расчет. Это обуславливает актуальность программных комплексов, которые позволили бы при минимальных трудовых затратах провести всю серию необходимых расчетов и получить достаточно полное представление о тепловом режиме КА.

**Тепловая модель.** При расчете тепловых процессов КА обычно используется метод сосредоточенных параметров [8–10]. Сущность данного метода состоит в следующем: моделируемый объект разбивается на отдельные дискретные элементы таким образом, что температуру каждого элемента в некотором приближении можно считать однородной и изменяющейся только со временем. Эти элементы называются узлами. Каждый узел состоит из одной или нескольких поверхностей с заданными коэффициентами поглощения солнечного излучения  $A_{(s)}$  и степенями черноты  $\varepsilon$ , описывающими их радиационные свойства.

Математическая модель объекта строится как система уравнений теплового баланса для каждого узла и включает тепловые потоки к узлу от лучистого и кондуктивного теплообмена его с другими узлами, потоки от тепловыделяющего оборудования, нагревателей системы терморегулирования и от внешнего окружения (Земли и Солнца). Так как конвективный теплообмен в орбитальных условиях отсутствует, то система дифференциальных уравнений, описывающая тепловую математическую модель объекта, имеет вид

$$c_i \frac{dT_i}{dt} = \sum_{j=1}^N (\alpha_{ij} (T_j - T_i) + \beta_{ij} (T_j^4 - T_i^4)) + \sum_{k=1}^{N_{non}} \alpha_{ik,non} (T_{k,non} - T_i) + \beta_i^{space} (T_{space}^4 - T_i^4) + f_i(t), \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $N$  – число узлов;  $i$  – номер узла;  $T_i$ ,  $c_i$  – температура и теплоемкость  $i$ -го узла;  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  – термические проводимости и коэффициенты лучистой термической связи между  $i$ -м и  $j$ -м узлами соответственно;  $T_{k,non}, N_{non}, \alpha_{ik,non}$  – температуры немоделируемых объектов, их

количество и кондуктивные связи с расчетными узлами;  $T_{space}$  – температура открытого космоса;  $f_i(t) = Q_i^{source}(t) + Q_i^{SOTR}(t) + Q_i^{out}(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $Q_i^{out}$  – внешние тепловые потоки от Земли и Солнца, поглощенные поверхностью  $i$ -го узла;  $Q_i^{source}$ ,  $Q_i^{SOTR}$  – тепловые потоки к  $i$ -му узлу от тепловыделяющего оборудования и СОТР КА.

Так как основные законы лучистого теплообмена справедливы для замкнутой системы поверхностей, в математическую модель введен дополнительный нерасчетный узел «космос» с фиксированной температурой  $T_{space}$ , представляющий собой сферу с абсолютно черной внутренней поверхностью, которая содержит геометрическую модель КА.

Системы терморегулирования могут быть двух типов: релейные и на основе элементов Пельтье. Принцип построения системы первого типа базируется на том, что для регулируемого узла (или группы узлов) путем подбора радиационных свойств поверхности, применения экранирования или соединения его тепловой трубой с радиатором создается отрицательный средневитковый тепловой баланс, а дефицит тепла компенсируется нагревателями СОТР, контролируемые по показаниям датчиков температуры, которые установлены на регулируемом узле (узлах). Включение и выключение нагревателей элемента СОТР релейного типа зависит от температуры на датчике  $T_C$ , заданной температурной уставкой  $T_{stab}$  и величины интервала стабилизации температуры  $[T_{stab} - \Delta T_{stab}, T_{stab} + \Delta T_{stab}]$ . Включение нагревателей фиксированной мощности происходит при выполнении условия  $T_C < T_{stab} - \Delta T_{stab}$ , а выключение – условия  $T_C > T_{stab} + \Delta T_{stab}$ .

В основе работы СОТР на элементах Пельтье (термоэлектрических охлаждающих модулях) лежит эффект поглощения или выделения тепла в местах контактов (спаях) разнородных проводников при протекании постоянного электрического тока в цепи. В тепловой математической модели элемент Пельтье моделируется двумя расчетными элементами: внутренним и наружным спаями с температурами  $T_B$  и  $T_H$ . Количество теплоты, поглощаемое или выделяемое на спаях, зависит от величины и направления тока и вычисляется по формулам

$$Q_B = -k_1 \left( \frac{T_B + T_H - \text{sign}(I)(T_H - T_B)}{2} \right) I + k_2 I^2 + [k_3 (T_H - T_B)],$$

$$Q_H = k_1 \left( \frac{T_B + T_H - \text{sign}(I)(T_H - T_B)}{2} \right) I + k_2 I^2 + [k_3 (T_B - T_H)],$$

где  $k_1, k_2, k_3$  – коэффициенты, определяемые по техническим характеристикам элемента Пельтье.

Величина тока, подаваемая на элемент Пельтье, регулируется с помощью пропорционально-интегрально-дифференцирующего (ПИД) регулятора и зависит от рассогласования измеренной температуры на датчике  $T_C$  и заданной температурной уставкой  $T_{stab}$ :

$$I(t) = k_p \left( \Delta T(t) + k_D \frac{d\Delta T(t)}{dt} + k_I \int_0^t \Delta T(t) dt \right), \quad (2)$$

где  $k_p$  – коэффициент пропорциональности;  $k_D, k_I$  – весовые коэффициенты дифференциального и интегрального членов ПИД-регулятора;  $\Delta T = T_C - T_{stab}$ .

**Расчет лучистых связей.** Базовым инструментом расчета лучистого теплообмена является безразмерный угловой коэффициент  $F_{ij}$ , который описывает долю теплового потока, излученного с  $i$ -й поверхности площадью  $S_i$  и попавшего на  $j$ -ю поверхность площадью  $S_j$  для случая абсолютно черных поверхностей. Коэффициент рассчитывается следующим образом [1, 2]:

$$F_{ij} = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \beta_i \cos \beta_j}{\pi r_{ij}^2} dS_j dS_i,$$

где  $r_{ij}$  – расстояние между элементарными площадками  $dS_i$  и  $dS_j$ ;  $\beta_i$  и  $\beta_j$  – углы между направлениями внешних нормалей к площадкам и отрезком  $r_{ij}$ , соединяющим центры элементарных площадок.

Расчет угловых коэффициентов между поверхностями с учетом экранирования является наиболее трудоемкой процедурой в моделировании лучистого теплообмена ввиду большого объема вычислительной работы и сложности определения взаимных видимостей поверхностей. В программном комплексе эта задача решается с помощью триангуляции поверхностей геометрической модели КА и суммирования элементарных угловых коэффициентов между парами треугольников с учетом наличия видимости между ними:

$$F_{ij} = \frac{1}{S_i} \sum_{m=1}^{N_i} \sum_{n=1}^{N_j} a_{nm} \frac{\cos \beta_n \cos \beta_m}{\pi r_{nm}^2} \Delta S_n \Delta S_m,$$

где  $a_{nm}$  – элементы матрицы видимости;  $\Delta S_n$  и  $\Delta S_m$  – площади элементарных площадок (треугольников)  $i$ -й и  $j$ -й поверхностей. Для вычисления матрицы видимостей используется метод трассировки лучей. Если отрезок, соединяющий центры треугольников с номерами  $n$  и  $m$ , не пересекается ни с какими другими треугольниками, то  $a_{nm} = 1$ . В противном случае  $a_{nm} = 0$ .

Для ускорения трассировки лучей применялось построение иерархии ограничивающих объемов (Bounding Volume Hierarchy, BVH), которая сохраняется в виде двоичного дерева [11, 12]. Используется один из типов BVH – AABB-дерева (Axis-Aligned Bounding Box). В AABB-дереве хранится распределение треугольников геометрической модели КА по иерархии ограничивающих объемов. Этот тип структуры данных обладает высокой скоростью поиска треугольников при трассировке лучей.

В случае не абсолютно черных поверхностей каждая пара поверхностей термически взаимодействует не только через прямое излучение между собой, но и через отраженную от других поверхностей часть излучения. В силу этого радиационные термические связи определяются посредством относительных угловых коэффициентов  $F_{ij}$ , площадей излучающих поверхностей  $S_i$  и степеней черноты  $\varepsilon_i$ . Эту зависимость можно найти из следующих базовых соотношений, связывающих результирующие тепловые потоки  $Q_i$  к каждой поверхности от всех других поверхностей замкнутой полости с абсолютными температурами этих поверхностей [13]:

$$\sum_{j=1}^M (\delta_{kj} - F_{kj} (1 - \varepsilon_j)) \frac{Q_j}{S_j \varepsilon_j} = \sum_{i=1}^M (F_{ki} - \delta_{ki}) \sigma T_i^4, \quad k = 1, \dots, M, \quad (3)$$

где  $\delta_{kj}$  – символ Кронекера;  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана;  $M$  – общее количество поверхностей, включая открытый космос. Из системы уравнений (3) можно получить следующее выражение для результирующих тепловых потоков:

$$\mathbf{Q} = \sigma \mathbf{G} \mathbf{T}^4, \quad \mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (4)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица;  $\mathbf{F}$  – матрица угловых коэффициентов;  $\mathbf{Q}$  – вектор-столбец результирующих потоков;  $\mathbf{T}^4$  – вектор-столбец возведенных в четвертую степень температур поверхностей;  $\mathbf{M}$  – матрица, элементы которой  $m_{kj} = \sum_{j=1}^M (\delta_{kj} - F_{kj} (1 - \varepsilon_j)) \frac{1}{S_j \varepsilon_j}$ .

Из общих законов лучистого теплообмена следует [1, 2], что элементы матрицы  $\mathbf{G}$  обладают свойствами

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad \sum_{j=1}^M g_{ij} = 0$$

и выражение (4) можно записать в виде

$$Q_k = \sigma \sum_{j=1}^M \tilde{g}_{kj} (T_j^4 - T_k^4), \quad k=1, \dots, M, \quad (5)$$

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij}, \quad i \neq j, \quad \tilde{g}_{ii} = 0,$$

где элементы  $\tilde{g}_{kj}$  являются лучистыми связями между поверхностями, рассчитанными с учетом их отражательных свойств. Термические связи  $\beta_{ij}$  в (1) между узлами, состоящими из нескольких поверхностей, вычисляются суммированием лучистых связей между соответствующими поверхностями:

$$\beta_{ij} = \sum_{k \in \gamma_i} \sum_{l \in \gamma_j} \tilde{g}_{kl}, \quad i, j=1, \dots, N, \quad (6)$$

где  $\gamma_i$  и  $\gamma_j$  – множества номеров поверхностей узлов  $i$  и  $j$  соответственно.

**Расчет внешних потоков.** При математическом моделировании тепловых процессов в КА при его полете по орбите необходимо определять циклограммы внешних потоков (прямого и отраженного от Земли солнечного и инфракрасного излучений Земли) к расчетным узлам. При этом необходимо учитывать экранирование радиационных тепловых потоков от Земли и прямого излучения от Солнца. Для определения тепловых потоков от Земли к поверхностям геометрической модели КА производится триангуляция видимого с КА участка Земли (сферического сегмента), размер которого зависит от высоты орбиты. При нахождении падающих потоков от Солнца полагается, что солнечное излучение представляет собой пучок параллельных лучей (бесконечно удаленный точечный источник).

Ориентация элементарной площадки поверхности КА в любой момент времени определяется тремя углами: углом  $\psi_0$  между направлениями из центра Земли на Солнце и на КА и углами  $\psi$  и  $\psi_1$  между внешней нормалью  $\mathbf{n}$  площадки и направлениями на центр Земли и на Солнце соответственно. Указанные углы зависят от времени и определяются движением КА по орбите, его вращением относительно оси собственного вращения, поворотами на угол тангажа, крена и рыскания. Для построения зависимости от времени указанных параметров использовалась мировая (не связанная с суточным вращением Земли) геоцентрическая система координат, в которой направляющие векторы оси орбитального вращения КА  $\mathbf{m}_{orb}$  из центра Земли на Солнце  $\mathbf{n}_s$  и из центра Земли на КА  $\mathbf{n}_{ка}$  имеют вид

$$\mathbf{m}_{orb} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\gamma) \\ -\cos(\gamma) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_{ка}(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega_{II} + \upsilon(t)) \\ 0 \\ -\cos(\omega_{II} + \upsilon(t)) \end{pmatrix},$$

где  $\gamma$  – разворот орбиты (угол между плоскостью орбиты и направлением на Солнце),  $\omega_{II}$  – угол перигея,  $\upsilon(t)$  – истинная аномалия положения КА на орбите,  $\omega_{II} + \upsilon(t)$  – угловое расстояние КА вдоль орбиты от восходящего узла.

Тогда зависимость от времени радиуса-вектора текущего положения КА на орбите в данной системе координат определяется как

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{n}_{KA}(t), \quad r(t) = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos(\nu(t))},$$

где  $e$  – эксцентриситет,  $a$  – длина большой полуоси эллиптической орбиты.

С целью сокращения количества вычислений в качестве системы координат для расчетов угловых коэффициентов поверхностей КА на Землю и Солнце выбрана строительная система координат КА. В этом случае для каждого момента времени вычисления внешних потоков требуется нахождение в строительной системе координат направляющих векторов из центра Земли на Солнце  $\mathbf{n}_{S,BC}$  и на КА  $\mathbf{n}_{KA,BC}$ :

$$\mathbf{n}_{S,BC}(t) = \left( \mathbf{A}(\mathbf{m}_{sat}, \theta_{sat}(t)) \mathbf{B}_{WCBC} \mathbf{A}_{turn} \right)^{-1} \mathbf{n}_S; \quad (7)$$

$$\mathbf{n}_{KA,BC}(t) = \left( \mathbf{A}(\mathbf{m}_{sat}, \theta_{sat}(t)) \mathbf{B}_{WCBC} \mathbf{A}_{turn} \right)^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{m}_{orb}, \nu(t) + \omega_{II}) \mathbf{n}_{KA}, \quad (8)$$

а также перерасчет координат вершин треугольников построенной триангуляции видимого участка Земли.

В выражениях (7) и (8)  $\mathbf{A}(\mathbf{m}, \alpha)$  – матричная функция, определяющая в векторном пространстве поворот на угол  $\alpha$  вокруг оси с направляющим единичным вектором  $\mathbf{m}$ ;  $\mathbf{B}_{WCBC}$  – ортогональная матрица, определяющая поворот строительной системы координат относительно мировой в момент времени  $t = 0$  (момент пересечения КА плоскости эклиптики на солнечной стороне орбиты);  $\theta_{sat}(t)$  – угол поворота КА относительно оси собственного вращения с направляющим вектором  $\mathbf{m}_{sat}$ . Ортогональная матрица  $\mathbf{A}_{turn}$  определяет поворот строительной системы координат по тангажу, крену и рысканью при маневрировании КА:

$$\mathbf{A}_{turn} = \mathbf{A}(\mathbf{m}_r, \alpha_r) \mathbf{A}(\mathbf{m}_{kr}, \alpha_{kr}) \mathbf{A}(\mathbf{m}_{ig}, \alpha_{ig}).$$

В двух частных случаях ориентации КА на орбите (орбитальной и инерциальной) имеем следующие значения определяющих ее параметров:

– для орбитальной ориентации

$$\mathbf{m}_{sat} = \mathbf{m}_{orb}, \quad \theta_{sat} = \nu(t) + \omega_{II};$$

– для инерциальной ориентации

$$\mathbf{m}_{sat} = \mathbf{m}_{orb}, \quad \theta_{sat} = 0.$$

Искомые зависимости от времени углов  $\psi$ ,  $\psi_0$  и  $\psi_1$  определяются следующим образом:

$$\psi(t, \mathbf{n}) = \arccos(\mathbf{n}_{KA,BC}(t) \cdot \mathbf{n}),$$

$$\psi_0(t) = \arccos(\mathbf{n}_{S,BC}(t) \cdot \mathbf{n}_{KA,BC}(t)),$$

$$\psi_1(t, \mathbf{n}) = \arccos(\mathbf{n}_{S,BC}(t) \cdot \mathbf{n}),$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к рассматриваемой площадке в строительной системе координат;  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  – скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .



Угловые коэффициенты поверхностей КА относительно Земли

$$F_{k,Earth} = \frac{1}{S_k} \sum_{i=1}^{N_k} F_{di,Earth} \Delta S_i, \quad S_k = \sum_{i=1}^{N_k} \Delta S_i,$$

$$F_{di,Earth} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N_{Earth}} a_{di,dj} \frac{\cos \beta_i \cos \beta_j}{r_{ij}^2} \Delta S_j$$

и угловые коэффициенты относительно Солнца

$$F_{k,Solar} = \frac{1}{S_k} \sum_{i=1}^{N_k} F_{di,Solar} \Delta S_i, \quad S_k = \sum_{i=1}^{N_k} \Delta S_i,$$

$$F_{di,Solar} = a_{di,Solar} \cos(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_S)$$

определяются с учетом матрицы  $(a_{di,dj}, i=1, \dots, N, j=1, \dots, N_{Earth})$  взаимной видимости элементарных площадок КА и Земли и вектора видимости  $(a_{di,Solar}, i=1, \dots, N)$  элементарных площадок КА и Солнца. Здесь  $\beta_i$  и  $\beta_j$  – углы между радиусом-вектором  $\mathbf{r}_{ij}$ , соединяющим центры площадок  $\Delta S_i$  КА и  $\Delta S_j$  Земли, и внешними нормальными к этим площадкам. Для ускорения вычислений матриц взаимной видимости при трассировке лучей от Земли и Солнца используется ААВВ-дерево треугольников модели КА.

Три составляющие внешнего теплового потока, падающего на  $k$ -ю поверхность КА (инфракрасный поток собственного излучения Земли  $Q_{ir,k}$ , поток прямого солнечного излучения  $Q_{ds,k}$  и поток отраженного от Земли солнечного излучения  $Q_{rs,k}$ ), определяются по формулам

$$Q_{ir,k} = S_k F_{k,Earth} \frac{1-a}{4} C,$$

$$Q_{rs,k} = S_k F_{k,Earth} \Phi_3(\Psi_0) a C,$$

$$Q_{ds,k} = S_k F_{k,Solar} \Phi_4(\Psi_0) C,$$

где  $a$  – альbedo Земли;  $C$  – солнечная постоянная;  $\Phi_3(\Psi_0) = 0,5(\cos \Psi_0 + |\cos \Psi_0|)$ ;  $\Phi_4(\Psi_0)$  – функция определения периода нахождения КА в тени Земли, экранирующей прямое солнечное излучение:

$$\Phi_4(\Psi_0) = \begin{cases} 0 & \text{для } |\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_S) \mathbf{n}_S| < R_{Earth} \text{ и } \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_S < 0, \\ 1 & \text{для остальных случаев.} \end{cases} \quad (9)$$

Для внешних потоков, так же, как и для внутренних, возникает задача перераспределения отраженной части падающего на некоторую поверхность потока по всем остальным поверхностям. При этом будем учитывать, что прямое и отраженное от Земли солнечное излучение распределяется по поверхностям замкнутой полости по тем же законам, что и инфракрасное, только вместо степеней черноты ту же роль играют коэффициенты поглощения солнечного излучения  $A_{(S)}$ . Суммарный внешний поток, поглощенный  $i$ -м узлом, вычисляется через падающие потоки по формуле

$$Q_i^{out} = \sum_{l \in \gamma_i} \sum_{k=1}^{M-1} \left( \tilde{g}_{lk} \frac{Q_{ir,k}}{S_k} + \tilde{g}_{lk} \frac{Q_{rs,k} + Q_{ds,k}}{S_k} \right),$$

где  $\tilde{g}_{lk}$  и  $\tilde{g}_{lk}$  – лучистые связи между поверхностями  $l$  и  $k$ , рассчитанные с учетом степеней черноты и коэффициентов поглощения солнечного излучения соответственно.

**Программно-моделирующий комплекс.** Моделирование тепловых режимов КА негерметичного исполнения в условиях орбитального полета вокруг Земли предполагает выполнение следующих этапов:

- выбора и разработки трехмерной геометрической модели КА;
- определения угловых и разрешающих коэффициентов между поверхностями узлов;
- задания орбитальных данных и определения циклограмм внешних лучистых потоков от Земли и Солнца;
- задания кондуктивных термических связей между узлами объекта;
- выбора математической модели СОТР (задания каналов системы, описания расположения нагревателей и датчиков, параметров ПИД-регуляторов для элементов Пельтье, мощностей нагревателей каналов релейного типа);
- задания циклограмм мощностей источников тепловыделения, температур немоделируемых объектов;
- расчета с учетом отражательных свойств поверхностей радиационных связей между узлами, внешних поглощенных потоков и решения систем дифференциальных уравнений (1);
- визуализации, анализа и интерпретации результатов моделирования.

С целью решения данной задачи разработан программно-моделирующий комплекс для разработки орбитальных систем терморегулирования КА, обеспечивающий возможность расчета тепловых режимов узлов КА для полетных заданий по круговым и эллиптическим орбитам. Программный комплекс включает в себя модуль разработки трехмерной геометрической модели КА, модуль построения триангуляции поверхностей, модуль генерации матриц лучистых связей, модуль расчета циклограмм внешних тепловых потоков, предпроцессор подготовки математической модели, модуль решения систем дифференциальных уравнений (1), постпроцессор для визуализации и постобработки информации. Главное окно программного комплекса содержит строку меню, панель работы с проектами, панель инструментов для запуска программных модулей, панель управления отображением триангуляции объекта, окно визуализации 3D-модели объекта, окна «Проект», «Разбиение», «Орбитальные данные», «Геометрия», «Окно сообщений» (рис. 1).

Для создания и редактирования трехмерной геометрической модели объекта предназначен 3D-конструктор. В него включены следующие примитивы: параллелепипед, пирамида, конус, цилиндр, треугольник, четырехугольник, линия, ломаная. Примитивы «линия» и «ломаная» предназначены для задания образующих при генерации как замкнутых, так и незамкнутых поверхностей вращения (цилиндрических, конических). Включена возможность трансформации (перемещения, поворота, масштабирования) выделенных объектов (поверхностей) геометрической модели. Для обеспечения доступа к поверхностям сложных геометрических объектов в 3D-конструкторе реализована система слоев.

Информация о геометрической модели КА, различных вариантах построенных для нее тепловых моделей, а также результаты моделирования тепловых процессов хранятся в файле проекта. В рамках проекта для сгенерированной трехмерной геометрической модели объекта могут быть разными способами произведены разбиения ее на расчетные узлы. Для каждого разбиения могут быть построены различные триангуляции поверхностей расчетных узлов. Для каждой триангуляции могут быть рассчитаны матрицы угловых коэффициентов и определены циклограммы внешних падающих потоков для заданных пользователем условий полета (орбитальных данных).

Модуль подготовки орбитальных данных служит для задания и корректировки параметров орбиты (эксцентриситета, длины большой полуоси, угла разворота плоскости орбиты относительно направления Земля – Солнце, направляющего вектора оси орбитального вращения КА в мировой системе координат), данных о связи строительной и мировой систем координат, циклограмм смены ориентации КА на орбите, данных о маневрировании КА.

Орбитальные данные и результаты триангуляции поверхностей геометрической модели КА являются входными данными модуля построения циклограмм внешних потоков.

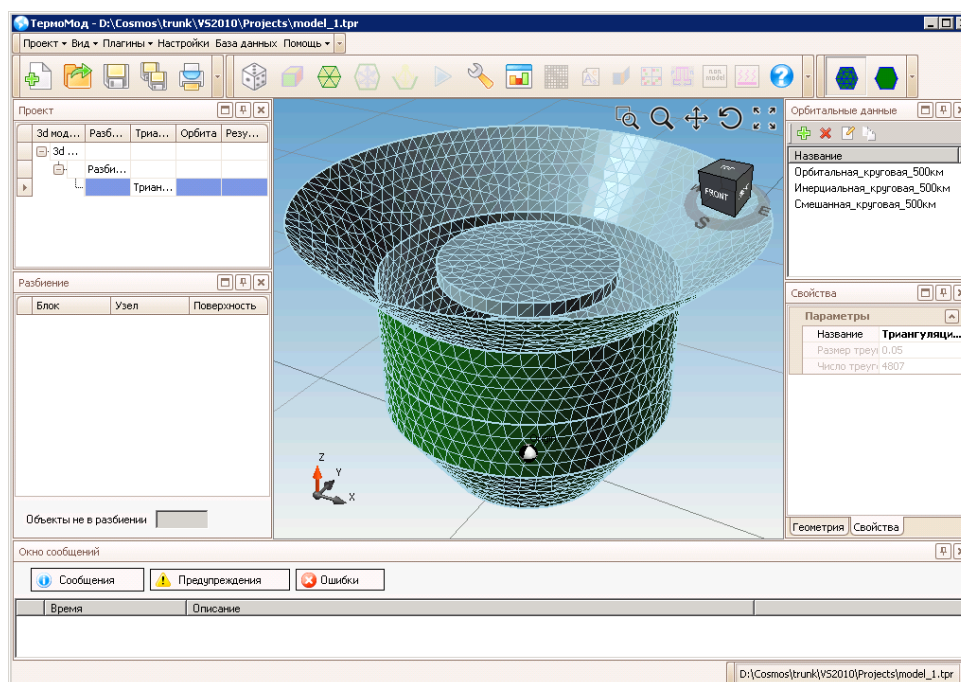


Рис. 1. Главное окно программного комплекса

Модуль задания теплофизических параметров состоит из следующих подмодулей: генерации теплоемкостей; задания радиационных характеристик поверхностей узлов (степени черноты и коэффициента поглощения) и кондуктивных термических связей; задания параметров СОТР релейного типа и элементов Пельтье, немоделируемых объектов и тепловыделяющих элементов (рис. 2).

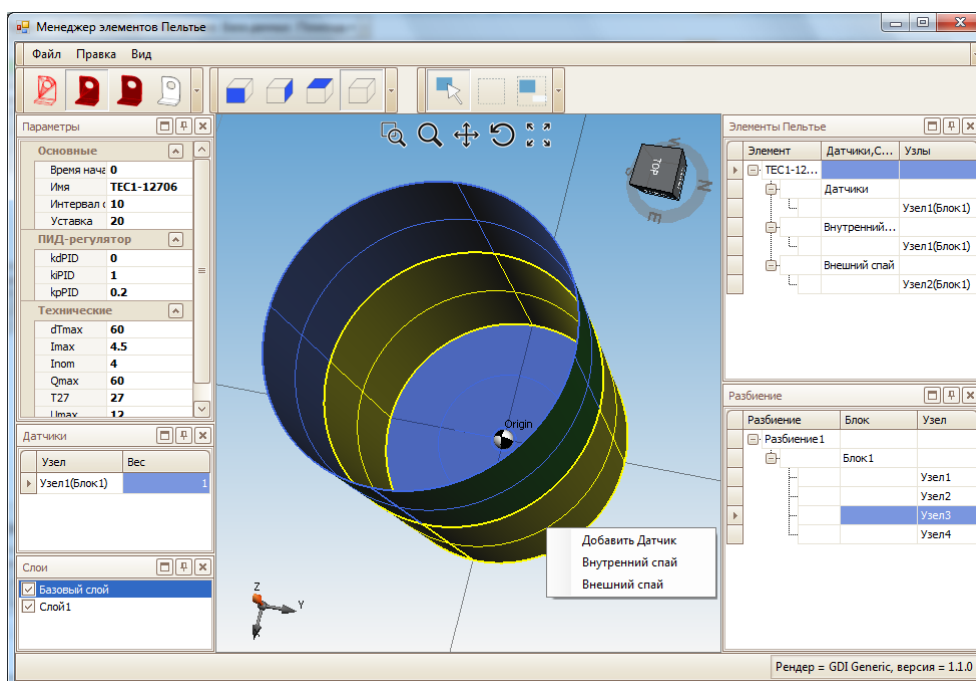


Рис. 2. Окно задания параметров элементов Пельтье

Для численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) в программно-алгоритмический комплекс включены неявный метод Эйлера, алгоритм Рунге – Кутты четвертого порядка с автоматическим выбором шага и алгоритм Дормана – Принса 5(4).

Модуль визуализации результатов моделирования предназначен для представления в удобной графической форме результатов моделирования либо на экране монитора, либо при выводе на печать. Пользователю предоставляется возможность выбора узлов, для которых необходимо представить в графической форме изменение температур и внешних потоков.

В программный комплекс включены базы данных по материалам и покрытиям, наиболее часто применяемым в космическом машиностроении. База содержит значения плотностей, удельных теплоемкостей, коэффициентов теплопроводности (для материалов), а также излучательные свойства поверхностей: степени черноты и коэффициенты поглощения солнечного излучения (для материалов и покрытий).

**Вычислительный эксперимент. Модель 1.** Ниже представлены результаты моделирования тепловых режимов упрощенного макета зеркального орбитального оптического прибора. Его геометрическая модель представляет собой открытый цилиндр диаметром 0,565 м и высотой 0,7 м, который можно трактовать как бленду. Основание цилиндра соответствует зеркалу прибора, а открытое основание – это апертура. Бленда в модели разбита на два пояса. Таким образом, модель содержит три узла: первый – зеркало, второй – пояс 1 (0,4 м), третий – пояс 2 (0,3 м), теплоемкости которых  $c_1 = 2460$ ,  $c_2 = 3200$ ,  $c_3 = 3270$  Дж/К. Степени черноты и коэффициенты поглощения солнечного излучения составляли  $\varepsilon = A_{(S)} = 0,95$  для поверхности бленды и  $\varepsilon = A_{(S)} = 0,06$  для зеркала. Внутренние ненулевые кондуктивные связи:  $a_{12} = a_{21} = 0,1$ ,  $a_{23} = a_{32} = 0,021$  Вт/К.

Оптический прибор расположен в открытой для апертуры полости корпуса КА с термостабилизированными стенками при температуре  $T_{КА} = 20$  °С, который является немоделируемым объектом. Термические кондуктивные связи расчетных узлов с корпусом КА составляют по 0,01 Вт/К.

Параметры СОТР релейного типа: нагреватель мощностью 30 Вт на узле 2, датчик – на узле 1. Заданная температура стабилизации составляла  $T_{stab} = 20$  °С с пределами допустимого диапазона изменения температуры  $\pm 0,5$  °С относительно  $T_{stab}$ .

Параметры полетного задания: высота орбиты 500 км, угол  $\gamma = 0$ , ориентация КА орбитальная (апертура оптического прибора ориентирована на Землю).

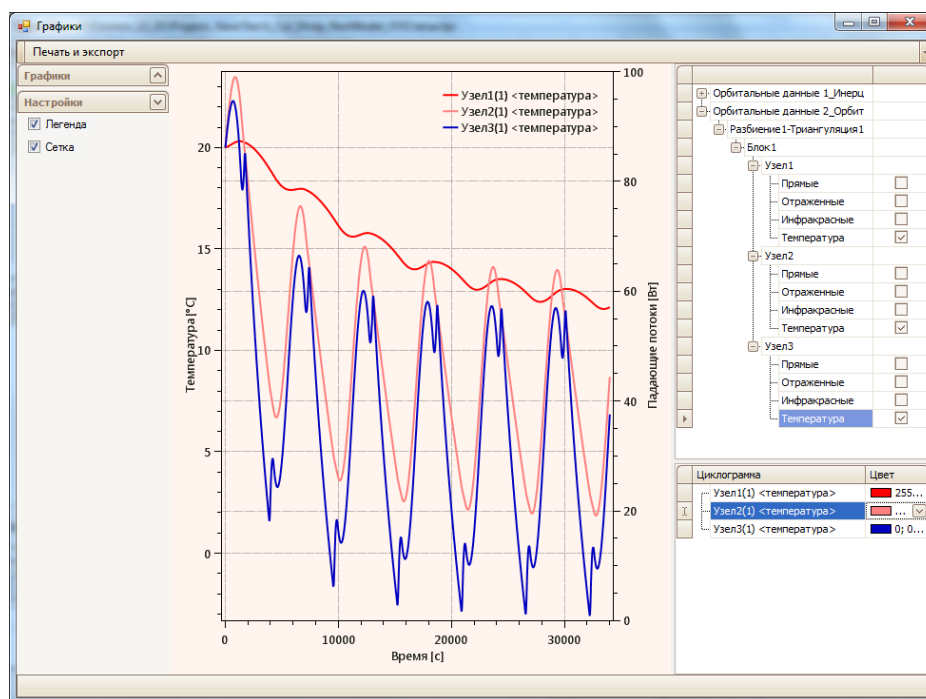
Общее число треугольников при триангуляции геометрической модели оптического прибора составило 1602 (задаваемые максимальные размеры сторон треугольников – 0,05 м), а число треугольников сферической поверхности «открытый космос» – 760.

Циклограммы падающих внешних потоков рассчитывались для одного витка орбиты с временным шагом 100 с. Максимальный шаг интегрирования систем дифференциальных уравнений составлял 10 с. Начальные температуры узлов задавались равными 20 °С. Интервал опроса датчиков СОТР составлял 10 с.

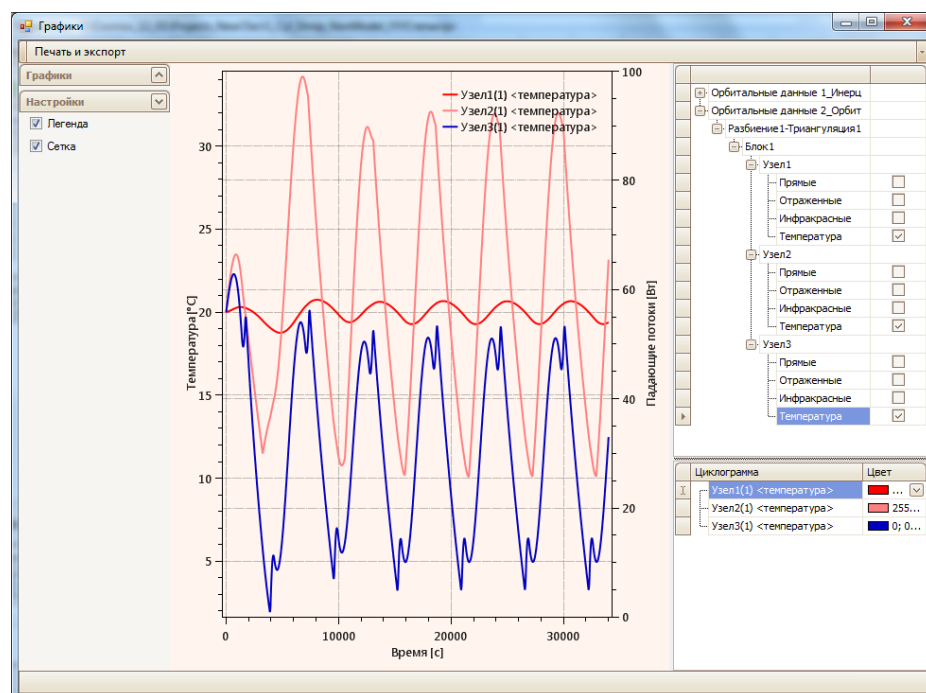
На рис. 3, а представлены рассчитанные циклограммы температур узлов оптического прибора для шести витков орбиты без терморегулирования. Результаты моделирования показывают, что при выключенной СОТР прибор захлаживается до недопустимых температур и в течение шести витков его тепловой режим остается еще далеким от установившегося.

При включенной СОТР (рис. 3, б) установившийся режим практически достигается уже на третьем витке, а температура зеркала (узел 1) колеблется около коридора  $20 \pm 0,5$  °С. Пилообразная кривая на графике отвечает циклограмме температуры узла 2, на котором установлен нагреватель СОТР, а нижние и верхние изломы кривой соответствуют моментам включения и выключения этого нагревателя. На графике кривой видно, что включение нагревателя происходит в момент достижения узлом 2 температуры 19,5 °С, а выключение – температуры 20,5 °С. Однако, поскольку нагреватель и датчик установлены на разных узлах, возникает эффект тепловой инерции, заключающийся в том, что температура зеркала (узел 1) продолжает падать, несмотря на включение нагревателя. Это происходит в силу того, что температура ближайшего к зеркалу элемента (узел 2) все еще остается меньшей, чем его собственная. Падение сменяется ростом только после того, как температура узла 2 превысит температуру зеркала. До этого мо-

мента температура зеркала успевае опуститься более чем на градус ниже границы температурного коридора. Аналогичная картина, но еще более выраженная, наблюдается и на верхней границе температурного коридора при отключении нагревателя СОТР. Вследствие этого термостабилизация зеркала происходит в температурном интервале, более широком, чем определено температурной уставкой. Данное явление хорошо известно в практике терморегулирования, и его следует учитывать при разработке схемы терморегулирования.

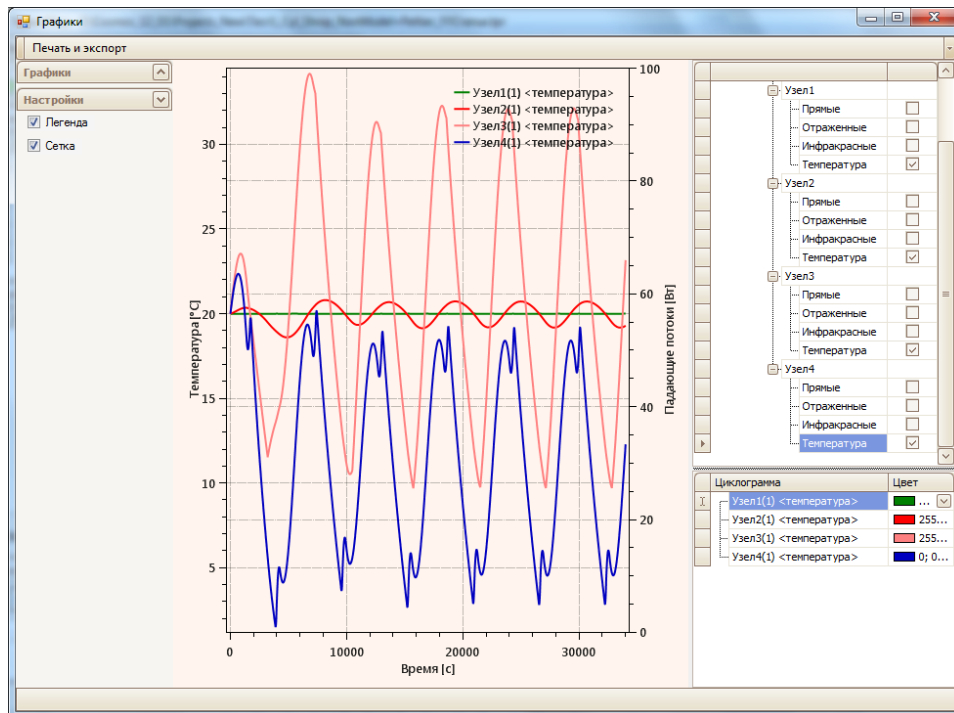


а)

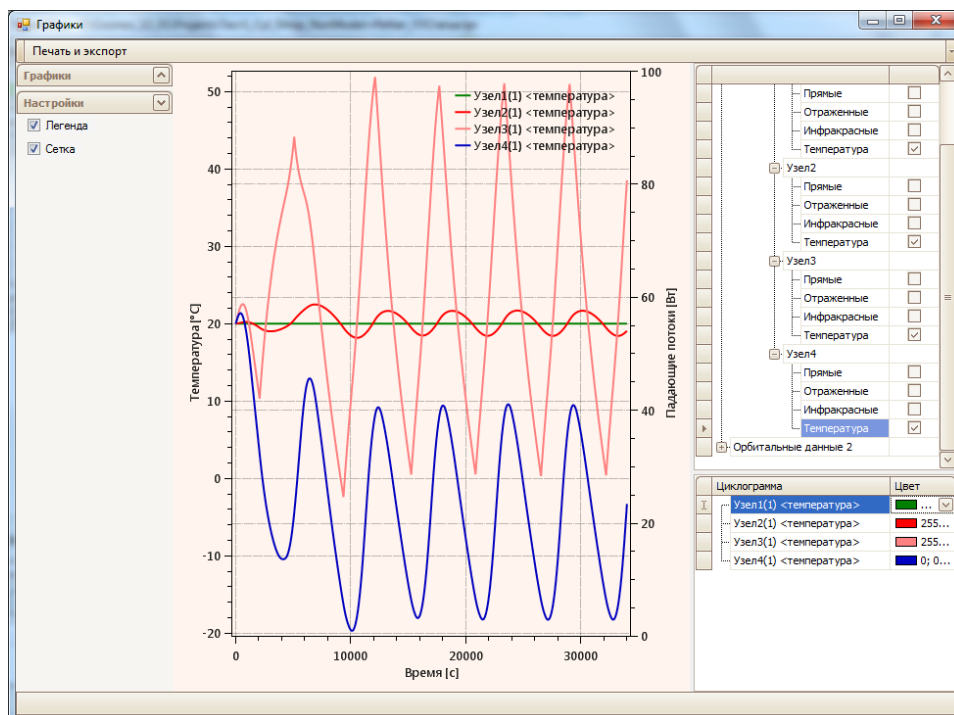


б)

Рис. 3. Циклограммы температур расчетных узлов оптического прибора:  
а) без терморегулирования; б) с включенной СОТР релейного типа



а)



б)

Рис. 4. Циклограммы температур расчетных узлов зеркально-линзового прибора. СОТР релейного типа и элемент Пельтье TEC1-12706: а) орбитальная ориентация КА; б) инерциальная ориентация КА

**Модель 2.** В последнее время в терморегулировании КА все большее применение находят элементы Пельтье [14], которые позволяют поддерживать постоянную температуру узла даже в случае, если баланс падающих к узлу тепловых потоков положителен. Для иллюстрации работы СОТР такого типа взят упрощенный макет катодиотрического (зеркально-линзового) оптического прибора. Его геометрическая модель совпадает с рассмотренной выше моделью 1 за

исключением того, что основание цилиндра разбито на два узла: круг диаметром 0,0565 м (линзовый окуляр), центр которого совпадает с центром основания цилиндра, и оставшуюся часть основания – кольцо (главное зеркало).

Таким образом, модель содержит четыре узла: 1 – линзовый окуляр, 2 – главное зеркало, 3 – пояс 1 бленды (0,3 м), 4 – пояс 2 (0,3 м), теплоемкости которых  $c_1 = 246$ ,  $c_2 = 2214$ ,  $c_3 = 3200$ ,  $c_4 = 3270$  Дж/К. Степени черноты и коэффициенты поглощения солнечного излучения составляли  $\varepsilon = A_{(s)} = 0,95$  для поверхности бленды и  $\varepsilon = A_{(s)} = 0,06$  для линзового окуляра и зеркала. Ненулевые кондуктивные связи между узлами:  $a_{12} = a_{21} = 0,01$ ,  $a_{23} = a_{32} = 0,1$ ,  $a_{34} = a_{43} = 0,021$  Вт/К. На термические кондуктивные связи расчетных узлов 2–4 с корпусом КА приходится по 0,01 Вт/К.

Наряду с СОТР релейного типа (модель 1) для более точной стабилизации температуры линзового окуляра использовался элемент Пельтье ТЕС1-12706 с внутренним спаем на линзовом окуляре и внешним спаем на основном зеркале. Номинальное напряжение питания 12 В, максимальный ток при номинальном напряжении 4,5 А, мощность устройства 60 Вт, наибольшая разница температур, которую дает модуль, 60 °С, размер 40×40×4 мм, вес до 25 гр.

Для линзового окуляра задавалась температура стабилизации  $T_{stab} = 20$  °С. Величина тока, подаваемая на элемент Пельтье, регулировалась с помощью ПИД-регулятора с коэффициентами  $k_p = 0,2$ ,  $k_D = 0$ ,  $k_I = 1$  (2).

Использовались орбитальные данные из модели 1. На рис. 4, а показаны рассчитанные циклограммы температур узлов зеркально-линзового оптического прибора для шести витков орбиты с включенными СОТР на основе элемента Пельтье на узле 1 и с релейной СОТР на узле 2. Видно, что температура на узле 1 поддерживается стабильной с высокой точностью. На практике такая точность достигаться, конечно, не будет в силу того, что точность большинства современных температурных датчиков и точность поддержания постоянства параметров источников питания значительно ниже.

На рис. 4, б представлены циклограммы температур узлов зеркально-линзового прибора для инерциальной ориентации КА (апертура оптического прибора ориентирована на Землю в начальный момент времени и сохраняет направление в течение всего витка). В этом случае оптимальной является мощность нагревателя 70 Вт. Это объясняется тем, что апертурное отверстие на значительной части витка направлено в открытый космос и баланс внешних потоков, падающих на прибор, меньше, чем в случае орбитальной ориентации.

**Заключение.** В последние десятилетия в связи с бурным развитием вычислительной техники в практике научных исследований и технических разработок вместо дорогостоящего физического эксперимента все более широко внедряется компьютерное моделирование. Однако создание достаточно детальной и адекватной тепловой математической модели такого объекта, как КА, также требует значительных затрат трудовых ресурсов. Одним из путей их сокращения является создание универсальных программно-алгоритмических комплексов для моделирования тепловых процессов КА. В данной работе представлен образец такого комплекса.

С помощью программного комплекса пользователь может генерировать трехмерную геометрическую модель КА, определять ее разбивку на расчетные узлы и блоки, задавать теплофизические свойства расчетных узлов, параметры системы обеспечения теплового режима и бортового тепловыделяющего оборудования, параметры околоземной орбиты и ориентации на орбите, вычислять все необходимые параметры тепловой математической модели, а затем на ее основе рассчитывать нестационарный тепловой режим КА на орбите. На основе такого моделирования можно обрабатывать принципиальные схемы организации СОТР, их технические параметры, выявлять уязвимые места, находить причины возникновения нештатных ситуаций в орбитальных условиях.

#### Список использованных источников

1. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В. С. Авдеевский [и др.]. – М. : Машиностроение, 1992. – 528 с.

2. Залетаев, В. М. Расчет теплообмена космического аппарата / В. М. Залетаев, Ю. В. Капинос, О. В. Сургучев. – М. : Машиностроение, 1979. – 208 с.
3. Внешний теплообмен космических объектов / Г. П. Кобранов [и др.]. – М. : Машиностроение, 1977. – 104 с.
4. Моделирование тепловых режимов космического аппарата и окружающей его среды / под ред. Г. И. Петрова. – М. : Машиностроение, 1971. – 380 с.
5. Фаворский, О. Н. Вопросы теплообмена в космосе / О. Н. Фаворский, Я. С. Каданер. – М. : Высшая школа, 1967. – 248 с.
6. Гушин, В. Н. Основы устройства космических аппаратов / В. Н. Гушин. – М. : Машиностроение, 2003. – 272 с.
7. Залетаев, С. В. Программный комплекс теплового проектирования и анализа тепловых режимов космических аппаратов / С. В. Залетаев, Р. М. Копяткевич // Космонавтика и ракетостроение. – 2014. – № 4. – С. 84–91.
8. Тепловое проектирование систем терморегулирования оптико-электронной аппаратуры космических аппаратов на основе математического моделирования / А. И. Шнип [и др.] // Тепло- и массоперенос–2011 : докл. Минского Междунар. форума по тепломассообмену. – Минск : ИТМО имени А. В. Лыкова НАН Беларуси, 2011. – С. 86–90.
9. Gilmore, D. G. *Spacecraft Thermal Control Handbook. Vol. 1: Fundamental Technologies* / D. G. Gilmore. – The Aerospace Press, 2002. – 854 p.
10. Karam, R. D. *Satellite Thermal Control for Systems Engineers* / R. D. Karam. – Gaithersburg, Maryland, 1998. – 274 p.
11. Zhang, X. Interactive collision detection for deformable models using streaming AABBs / X. Zhang, Y. J. Kim // *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. – 2007. – Vol. 13, no. 2. – P. 318–329.
12. Van den Bergen, G. Efficient collision detection of complex deformable models using AABB trees / G. van den Bergen // *Journal of Graphics Tools*. – 1997. – Vol. 2, no. 4. – P. 1–13.
13. Зигель, Р. Теплообмен излучением : пер. с англ. / Р. Зигель, Дж. Хауэлл. – М. : Мир, 1975. – 935 с.
14. Семена, Н. П. Особенности использования термоэлектрических преобразователей в системах терморегулирования космического применения / Н. П. Семена // Теплофизика и аэромеханика. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 213–224.

---

## References

1. Avduevsky V. S., Galicejskij V. M., Glebov G. A., Danilov Ju. I., Drejcer G. A., ..., Solncev V. P. Osnovy teploperedachi v aviacionnoj i raketno-kosmicheskoy tehnike. *Fundamentals of Heat Transfer in Aviation and Rocket and Space Technology*. Moscow, Mashinostroenie, 1992, 528 p. (in Russian).
2. Zaletaev V. M., Kapinos Yu. V., Surguchev O. V. Raschet teploobmena kosmicheskogo apparata. *Heat Transfer Calculation of Spacecraft*. Moscow, Mashinostroenie, 1979, 208 p. (in Russian).
3. Kobranov G. P., Tsvetkov A. P., Belov A. I., Suhnev V. A. Vneshnij teploobmen kosmicheskikh objectov. *External Heat Exchange of Space Objects*. Moscow, Mashinostroenie, 1977, 104 p. (in Russian).
4. Modelirovanie teplovyh rezhimov kosmicheskogo apparata i okruzhayushchey ego sredy. *Spacecraft and its Environment Thermal Conditions Simulation*. G. I. Petrov (ed.). Moscow, Mashinostroenie, 1971, 380 p. (in Russian).
5. Favorsky O. N., Kadaner Ya. S. Voprosi teploobmena v kosmose. *Heat Transfer in Space*. Moscow, Vyschaya shkola, 1967, 248 p. (in Russian).
6. Gushchin V. N. Osnovy ustrojstva kosmicheskikh apparatov. *Fundamentals of Spacecraft Design*. Moscow, Mashinostroenie, 2003, 272 p. (in Russian).
7. Zaletaev S. V., Kopyatkevich R. M. Programnyj kompleks teplovogo proektirovaniya i analiza teplovyh rezhimov kosmicheskikh apparatov [Software package of a thermal design and an analysis of spacecraft thermal conditions]. *Kosmonavtika i raketostroenie [Space and Rocket Science]*, 2014, no. 4, pp. 84–91 (in Russian).
8. Shnip A. I., Marach S. O., Brin A. A., Ivankin P. S. Teplovoe proektirovanie system termoregulirovaniya optiko-elektronnoj apparatury kosmicheskikh apparatov na osnove matematicheskogo modelirovaniya [Design of thermal control system for spacecraft optoelectronic equipment]. *Teplo- i massoperenos–2011: doklady Minskogo Mezhdunarodnogo foruma po teplomassoobmenu [Heat and Mass Transfer–2011: Reports of the Minsk International Forum on Heat and Mass Transfer]*. Minsk, A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, 2011, pp. 86–90 (in Russian).



9. Gilmore D. G. *Spacecraft Thermal Control Handbook. Vol. 1: Fundamental Technologies*. The Aerospace Press, 2002, 854 p.
10. Karam R. D. *Satellite Thermal Control for Systems Engineers*. Gaithersburg, Maryland, 1998, 274 p.
11. Zhang X., Kim Y. J. Interactive collision detection for deformable models using streaming AABBs. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2007, vol. 13, no. 2, pp. 318–329.
12. Van den Bergen, G. Efficient collision detection of complex deformable models using AABB trees. *Journal of Graphics Tools*, 1997, vol. 2, no. 4, pp. 1–13.
13. Siegel R., Howell J. *Thermal Radiation Heat Transfer*. New York, McGraw-Hill Book Co., 1972, 803 p.
14. Semena N. P. Osobennosti ispol'zovaniya termojelektricheskikh preobrazovatelej v sistemah termoregulirovaniya kosmicheskogo primeneniya [The features of application of thermoelectric converters in spacecraft systems of temperature control]. *Teplofizika i aeromehanika [Thermophysics and Aeromechanics]*, 2013, vol. 20, no. 2, pp. 213–224 (in Russian).

### Информация об авторах

*Лемешевский Сергей Владимирович*, кандидат физико-математических наук, директор Института математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

E-mail: svl@im.bas-net.by

*Чуйко Михаил Матвеевич*, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела вычислительной математики Института математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

E-mail: chuiko@im.bas-net.by

*Шнип Александр Иванович*, кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией теории переноса Института тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

E-mail: shnip@hmti.ac.by

*Марцинкевич Григорий Леонидович*, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела вычислительной математики Института математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

E-mail: martsynkevich@im.bas-net.by

*Лепин Виктор Васильевич*, кандидат физико-математических наук, ученый секретарь Института математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

E-mail: lepin@im.bas-net.by

*Ирхин Владимир Александрович*, младший научный сотрудник отдела информационных технологий Института математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

E-mail: vovair@im.bas-net.by

### Information about the authors

*Sergey V. Lemeshevsky*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Director, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: svl@im.bas-net.by

*Mikhail M. Chuiko*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher of the Department of Computational Mathematics, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: chuiko@im.bas-net.by

*Aleksandr I. Shnip*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Drying Thermal Processes Laboratory, A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: shnip@hmti.ac.by

*Grigori L. Martsynkevich*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Researcher of the Department of Computational Mathematics, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: martsynkevich@im.bas-net.by

*Victor V. Lepin*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Scientific Secretary, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: lepin@im.bas-net.by

*Uladzimir A. Irkhin*, Junior Researcher of the Department of Information Technologies, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: vovair@im.bas-net.by

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)  
УДК 519.816

Поступила в редакцию 15.02.2019  
Received 15.02.2019

Принята к публикации 20.06.2019  
Accepted 20.06.2019

## Математическая модель независимых альтернатив в теории рейтингов

В. М. Романчук

*Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь*  
E-mail: Romanchak@bntu.by

**Аннотация.** Рассматривается альтернативный вариант теории измерений – теория рейтингов. Существуют два определения рейтинга. В классическом случае, если величина некоторых объектов изменяется равномерно, рейтинг объекта равен его порядковому номеру. Аксиоматическое определение рейтинга основывается на понятиях теории категорий. В этом случае областью определения рейтинга является множество объектов и множество упорядоченных пар объектов. Рейтинг – это преобразование, которое отображает множество объектов на множество числовых значений и множество упорядоченных пар объектов – на разности соответствующих числовых значений. Нахождение рейтинга методом субъективного измерения требует особого контроля получаемой информации. С этой целью можно использовать метод альтернатив для проверки адекватности экспериментальных данных аксиоматическому определению рейтинга.

Дается определение независимости двух переменных по величине. Предполагается, что для независимых переменных существует аддитивное или мультипликативное представление рейтинга. Рассматривается пример субъективного измерения с помощью многокритериальной теории полезности (Multi-Attribute Utility Theory, MAUT), метода анализа иерархий (МАИ) и теории рейтингов. Эвристический МАИ может приводить к ошибкам в классификации. Математическая модель функции полезности в аксиоматическом методе MAUT является мультипликативной или аддитивной и в целом соответствует модели рейтинга с независимыми переменными.

**Ключевые слова:** теория категорий, репрезентативная теория измерений, законы Фехнера и Стивенса, функция полезности, метод анализа иерархий Саати, метод многофакторной теории полезности

**Для цитирования.** Романчук, В. М. Математическая модель независимых альтернатив в теории рейтингов / В. М. Романчук // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 40–50.

---

---

## Mathematical model of independence of alternatives in the theory of ratings

Vasily M. Romanchak

*Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus*  
E-mail: Romanchak@bntu.by

**Abstract.** This paper considers the alternative theory of measurement – theory of ratings. The axiomatic definition of ranking is based on definitions from category theory. The scope of the rating definition is the set of objects and the set of ordered pairs of objects. The rating is the transformation that maps the set of objects to the set of numeric values and the set of ordered pairs of objects to the difference of the corresponding numeric values. Finding the rating by subjective measurement requires special control of the information received. The method of alternatives can be used to verify the adequacy of experimental data to the axiomatic definition of the rating.

In the paper the definition of the independence of two variables in magnitude is formulated. It is assumed that for independent variables there is an additive or multiplicative representation of the rating. An example of subjective measurement using multi-criteria utility theory (MAUT), hierarchy analysis (AHP) and rating theory is considered. The AHP heuristic method can lead to classification errors. The mathematical model of the utility function in the axiomatic method MAUT is multiplicative or additive and generally corresponds to the rating model with independent variables.

**Keywords:** category theory, representational measurement theory, the laws of Fechner and Stevens, the utility function, analytic hierarchy process Saaty, multi-attribute utility theory

**For citation.** Romanchak, V. M. Mathematical model of independence of alternatives in the theory of ratings. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 40–50 (in Russian).

**Введение.** В настоящее время в теории измерений выделяют классическую и репрезентативную теории [1, 2]. В классической теории измерений задают операцию физического объединения (сложения) и аддитивную функцию. Например, для объектов  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  определена операция объединения  $A_3 = A_1 + A_2$  и функция  $q_i = q(A_i) > 0$ , при этом выполняется равенство  $q(A_1 + A_2) = q(A_1) + q(A_2)$ . Понятия классической теории измерений обобщаются в теории меры. Классическую теорию измерений применяют при измерении аддитивных физических величин.

Для измерения неаддитивных величин была разработана теория репрезентативных измерений, базирующаяся на теории систем с отношениями. В процессе измерения объекты эмпирической системы  $A_1, A_2, \dots, A_n$  отображаются функцией  $q_i = q(A_i)$  на множество значений  $q_1, q_2, \dots, q_n$  числовой системы таким образом, что отношения между числами сохраняют отношения между объектами. Например, бинарное отношение  $B$  состоит из упорядоченных пар  $(A_i, A_j)$  и отображается в бинарное отношение на множестве чисел  $B^*$  так, что выполняется выражение

$$(A_i, A_j) \in B \Leftrightarrow (q(A_i), q(A_j)) \in B^*.$$

Тип шкалы определяется видом и свойствами функции  $q$ . Универсальная теория репрезентативных измерений на практике используется редко. Отмечается, что абстрактные математические понятия репрезентативной теории не имеют реальной интерпретации и не воспринимаются прикладными специалистами как инструмент измерения и анализа [3]. Применение теории репрезентативных измерений должно включать в себя валидацию метода измерения, что в некоторых случаях может быть затруднительным. Поэтому в настоящей работе рассматривается альтернативный вариант теории измерений – теория рейтингов [4, 5]. В теории рейтингов отмеченная проблема сводится к проверке соответствия математической модели рейтинга результатам измерений.

Теория рейтингов опирается на теорию категорий [6]. Рейтинг ( $R$ ) – это отображение объектов  $A_i$  и упорядоченных пар  $(A_i, A_j)$  в числовые значения  $R(A_i)$  и  $R(A_i, A_j)$  [4, 5]. Рейтинг упорядоченных пар по определению является аддитивным:

$$R(A_i, A_j) = R(A_i, A_k) + R(A_k, A_j).$$

Значения рейтинга  $R_i = R(A_i)$  определены как решение системы линейных уравнений  $R_{ij} = R_i - R_j$ . Значения величины являются функцией рейтинга:  $q_i = q(R_i) = q(R(A_i))$  [4, 5]. Теория рейтингов может иметь некоторое преимущество перед классическим методом измерения и теорией репрезентативных измерений. Так, в ходе измерения получаем значения рейтинга, которые должны удовлетворять аксиоматическому определению рейтинга. Это позволяет выполнить проверку адекватности математической модели результатам измерения. Значения величины находят на основании значений рейтинга, тем самым процесс измерения отделяется от выбора шкалы измерений и нахождения значений величины. Отделение процесса измерения является конструктивным. Используя рейтинг, можно доказать эквивалентность психофизических законов Фехнера и Стивенса.

Цель настоящего исследования – сформулировать понятие независимости переменных в теории рейтингов.

**Классическое определение рейтинга.** Если в классической теории вероятностей аксиоматически определяются эквивалентные по вероятности элементарные события, то в классическом определении рейтинга [4, 5] таким образом рассматриваются эквивалентные по величине упорядоченные пары объектов  $(A_1, A_2), (A_2, A_3), \dots, (A_{n-1}, A_n)$ . Тогда упорядоченное множество объектов  $A_1, A_2, \dots, A_n$  обладает особым свойством: значения величины объектов изменяются равномерно от объекта к объекту. Поскольку в первую очередь интерес вызывают субъективные измерения, приведем примеры таких объектов. Фехнер в своих опытах использовал «едва

заметные различия» субъективных ощущений и считал их равными [7]. Терстоун предложил шкалу «равнокажущихся» интервалов для измерения субъективной величины, которая изменяется равномерно вместе с номером интервала [8]. Астроном Гиппарх, наблюдая за звездами, разделил их на шесть классов, одинаково отличающихся по яркости [9].

В случае если определены эквивалентные по величине упорядоченные пары объектов  $(A_1, A_2), (A_2, A_3), \dots, (A_{n-1}, A_n)$ , будем говорить, что величина объектов  $A_1, A_2, \dots, A_n$  изменяется равномерно. Для таких объектов зададим отображение на множество действительных чисел. В основном используют два способа численного сравнения: по разности и отношению размеров величины. Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – конечное число объектов, для которых существует величина  $Q$ , принимающая значения  $q_i, q_i = q(A_i), i = 1, 2, \dots, n$ . Будем считать, что если величина  $Q$  изменяется равномерно от объекта к объекту, то разности и отношения последовательных значений величины постоянны. Для определенности считаем, что значения величины  $Q$  расположены в порядке возрастания. Это означает, что для первого способа сравнения выполняется равенство

$$q_{i+1} - q_i = \lambda, \quad q_i, q_{i+1} \in \mathfrak{R}, \lambda > 0,$$

для второго способа – равенство

$$q_{i+1}/q_i = \lambda, \quad q_i, q_{i+1} \in \mathfrak{R}^+, \lambda > 1,$$

где  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ;  $\lambda$  – неизвестная постоянная;  $\mathfrak{R}$  – множество всех действительных чисел;  $\mathfrak{R}^+$  – множество всех положительных чисел. Следовательно, если выбран первый способ сравнения, выполняется равенство

$$q_i - q_j = \lambda(i - j), \quad q_i, q_j \in \mathfrak{R}; \quad (1)$$

если второй способ, – равенство

$$\ln(q_i/q_j) = \lambda(i - j), \quad q_i, q_j \in \mathfrak{R}^+, \quad (2)$$

где  $\lambda$  – неизвестная постоянная,  $\lambda > 0$ . Обозначим правую часть выражений (1) и (2) как преобразование  $R(A_i, A_j) = \lambda(i - j)$ .

**Определение 1.** Пусть величина объектов  $A_1, A_2, \dots, A_n$  изменяется равномерно. Рейтинг пары объектов  $R(A_i, A_j) = \lambda(i - j)$  и рейтинг объектов  $R(A_i) = \lambda i + C$ , которые обозначим одинаковой буквой  $R$ , будем называть рейтингом, где  $C, \lambda$  – постоянные. Для рейтинга выполняется свойство  $R(A_i, A_j) = R(A_i) - R(A_j)$ .

Определение 1 рейтинга назовем классическим. В частном случае значения рейтингов равны разнице порядковых номеров объектов и номеру объекта  $r(A_i, A_j) = i - j, r(A_i) = i$ . Если величина объектов не изменяется, то  $r(A_i, A_{i+1}) = 0, i = 1, 2, \dots, n - 1, r(A_i) = C, i = 1, 2, \dots, n$ .

**Пример 1.** Пусть в качестве объектов  $A_1, A_2, \dots, A_6$  выбраны круги, площади которых, с точки зрения респондента, изменяются равномерно (табл. 1). Тогда в качестве значения рейтинга  $r_i = R(A_i)$  можно выбрать номер круга:  $r_i = i, i = 1, 2, \dots, 6$ . Рейтинг площади объекта характеризует субъективный размер площади объекта. Значения рейтинга  $R(A_i)$  можно рассматривать как аналог делений на шкале прибора измерения, а значения  $R(A_i, A_j)$  – как расстояние между делениями шкалы.

Таблица 1  
Равномерное изменение площади

$r_i$	1	2	3	4	5	6
$A_i$	●	●	●	●	●	●

Прямое измерение означает сравнение величины объекта с единицей измерения. Для этого шкала должна содержать фиксированный ноль. Если единица измерения отсутствует, единственным способом получения измерительной информации является сравнение объектов между собой. В результате сравнения двух объектов по величине получаем разницу значений величины (рейтинг) с точностью до неизвестного масштаба измерения. В рассматриваемом примере это означает, что возможны эквивалентные оценки рейтинга, например 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 3, 5, 7, 9, 11, 13. В общем случае рейтинг можно рассматривать, ориентируясь на определение функтора в теории категорий [6]. Ради простоты изложения непосредственно определения теории категорий не используются.

**Аксиоматическое определение рейтинга.** Областью определения рейтинга является множество объектов  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и множество упорядоченных пар  $(A_i, A_j)$ , причем выполняются условия:

- 1) для каждой пары объектов  $A_i, A_j$  определена единственная упорядоченная пара  $(A_i, A_j)$ ,  $i > j$ ;
- 2) для упорядоченных пар  $(A_i, A_k)$  и  $(A_k, A_j)$  существует упорядоченная пара  $(A_i, A_j)$ , которая называется суммой (композицией) упорядоченных пар  $(A_i, A_k) + (A_k, A_j) = (A_i, A_j)$ ;
- 3) для каждого объекта  $A_i$  существует тождественная пара  $(A_i, A_i)$ .

Определение 2. Рейтинг  $R$  – это отображение объектов  $A_i$  и упорядоченных пар объектов  $(A_i, A_j)$  в числовые значения  $R(A_i)$  и  $R(A_i, A_j)$ , которое обладает следующими свойствами:

$$R(A_i, A_j) = R(A_i, A_k) + R(A_k, A_j), \quad (3)$$

$$R(A_i, A_j) = R(A_i) - R(A_j), \quad (4)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ . Чтобы сравнивать объекты в любом порядке, дополнительно считаем, что выполняется соотношение

$$R(A_i, A_j) = -R(A_j, A_i). \quad (5)$$

Если рейтинг пары объектов  $R(A_i, A_j)$  получают сравнением объектов по величине, будем называть его *рейтингом величины*. В предлагаемой схеме измерения экспериментально сравнивают пары объектов  $(A_i, A_j)$  по величине и в результате находят рейтинг величины  $R(A_i, A_j)$ . Далее проверяют выполнение равенства (3) и находят значения рейтинга  $R(A_i)$ , используя формулу (4). Возможен альтернативный способ, при котором в результате эксперимента получают значения рейтинга  $R(A_i)$ . В этом случае равенство (3) выполняется тождественно и для проверки модели измерения необходимо сопоставлять отношения, которые состоят из упорядоченных пар  $(A_i, A_j)$  и  $(R(A_i), R(A_j))$ . Такой анализ соответствует репрезентативной теории измерения и в настоящей работе не рассматривается.

Пусть для объектов  $A_1, A_2, \dots, A_n$  получены числовые значения рейтинга  $R_{ij} = R(A_i, A_j)$ , которые удовлетворяют равенству (3), где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ . Тогда значения  $\lambda R_{ij}$  также удовлетворяют равенству (3), где  $\lambda$  – положительное действительное число. В дальнейшем будем считать, что  $R(A_i, A_j) = \lambda r_{ij}$ , где  $r_{ij}$  – численные значения рейтинга,  $\lambda$  – неизвестная положительная постоянная. Тогда система линейных уравнений для нахождения рейтинга объектов  $R(A_i)$  примет вид

$$\lambda r_{ij} = R_i - R_j, \quad (6)$$

где  $\lambda$  – неизвестная положительная постоянная;  $r_{ij}$  – частные значения рейтинга,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $R_i$  – значения  $R_i = R(A_i)$  рейтинга объектов. Система уравнений (6) разрешима, поскольку выполняются равенства (3), (5) и в качестве решения системы (6) можно взять  $R_i = \lambda r_{i1}$ . Решение системы уравнений (6) определено с точностью до линейного преобразования  $R_i = \lambda r_i + C$ , где  $r_i$  – частное решение системы уравнений (6),  $C$  – постоянная. Для доказательства достаточно рассмотреть различные решения системы (6)  $R_{1i}$  и  $R_{2i}$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда  $\lambda_2(R_{1i} - R_{1j}) = \lambda_1(R_{2i} - R_{2j})$ , где  $\lambda_1, \lambda_2$  – неизвестные постоянные. Следовательно,  $\lambda_2(R_{1i} - R_{11}) = \lambda_1(R_{2i} - R_{21})$ . Утверждение доказано, т. е. рейтинг объектов  $R(A_i)$  определен с точностью до линейного преобразования, а рейтинг пары объектов  $R(A_i, A_j)$  – с точностью до постоянной. Если величина объектов  $A_1, A_2, \dots, A_n$  изменяется равномерно, то  $R(A_i, A_{i+1}) = \lambda$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , и аксиоматическое определение рейтинга совпадает с классическим определением.

**Критерий существования рейтинга.** Субъективное измерение имеет свои особенности. Например, если повторять вопросы, то респондент может просто повторять неправильные ответы, чтобы не выглядеть некомпетентным. В методе альтернатив вопросы не повторяют, а задают по-разному: в первом случае все объекты сравнивают с объектом  $A_1$ , во втором случае – с объектом  $A_2$ . В итоге получают две альтернативные системы уравнений:

$$\lambda r_{i1} = R_i - R_1, \quad (7)$$

$$\lambda r_{i2} = R_i - R_2, \quad (8)$$

где  $R_i$  – рейтинг объектов,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $\lambda$  – постоянная;  $r_{i1}, r_{i2}$  – частные значения рейтинга пар объектов, которые оценивают экспериментально. Система уравнений (7) является подсистемой системы линейных уравнений (6), любое уравнение системы (6) является линейной комбинацией строк системы уравнений (7). Следовательно, система (7) эквивалентна системе уравнений (6). Также можно показать, что система (8) эквивалентна системе уравнений (6). Если для экспериментальных данных альтернативные системы уравнений (7) и (8) эквивалентны, то это может служить подтверждением существования рейтинга субъективного измерения. Запишем для частного случая  $j = 1, k = 2$  равенство (3):

$$R_{i1} = R_{i2} + R_{21}, \quad (9)$$

где  $R_{i1} = R(A_i, A_1)$ ,  $R_{i2} = R(A_i, A_2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $R_{21} = -R_{12}$ . Тогда для некоторых  $\lambda_1, \lambda_2$  выполняется  $R_{i1} = \lambda_1 r_{i1}$  и  $R_{i2} = \lambda_2 r_{i2}$ ,  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ , где  $r_{i1}, r_{i2}$  – частные рейтинги. Считаем, что  $r_{i1} = r_{i1}^1 + v_i^1$ ,  $r_{i2} = r_{i2}^2 + v_i^2$ , где  $r_{i1}^1, r_{i2}^2$  – экспертные оценки рейтингов,  $v_i^1, v_i^2$  – случайные ошибки (значения случайной величины). Тогда из равенства (9) следует выражение

$$\lambda_1 r_{i1}^1 = \lambda_2 r_{i2}^2 - \lambda_2 r_{1,2}^2 - \lambda_1 v_i^1 + \lambda_2 v_i^2. \quad (10)$$

Подставив экспертные оценки рейтинга  $r_{i1}^1, r_{i2}^2$  в левую часть альтернативных систем (7), (8) для  $\lambda = 1$  (можно выбрать любое другое число с  $\lambda \neq 0$ ), получим альтернативные системы уравнений  $M_1$  и  $M_2$ :

$$r_{i1}^1 = r_i^1 - r_1^1, \quad (11)$$

$$r_{i2}^2 = r_i^2 - r_2^2, \quad (12)$$

где  $r_i^1, r_i^2$  – решения альтернативных систем (11) и (12),  $i = 1, 2, \dots, n$ . Будем считать, что  $r_1^1, r_2^2$  – произвольные постоянные. Из выражений (10)–(12) следует соотношение

$$\lambda_1 r_i^1 = \lambda_2 r_i^2 + (\lambda_1 r_1^1 - \lambda_2 r_2^2) + (\lambda_2 v_i^2 - \lambda_1 v_i^1), \quad (13)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – постоянные,  $v_i^1, v_i^2$  – случайные величины;  $r_i^1, r_i^2$  – частные решения систем (11) и (12),  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда в первых скобках в выражении (13) находится неизвестная постоянная, а во вторых – нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией (если предположить, что  $v_i^1, v_i^2$  – независимые и нормально распределенные случайные величины с равным нулю математическим ожиданием и постоянной дисперсией). Когда эксперт отвечает на вопросы двух различных тестов так, что случайные величины  $r_i^1$  и  $r_i^2$  оказываются коррелированными, есть основание считать, что построена хорошая математическая модель. В этом случае между частными решениями систем (11) и (12) существует линейная зависимость (13) с точностью до неизвестной постоянной и случайных ошибок. Сформулируем критерий существования рейтинга.

**Критерий  $K_1$ .** Значения  $r_{ij} = r(A_i, A_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , являются оценками рейтинга, если решения альтернативных систем  $M_1$  и  $M_2$  связаны адекватной линейной зависимостью

$$r_i^2 = kr_i^1 + C + \varepsilon_i, \quad (14)$$

где коэффициент регрессии  $k$  положителен и значим;  $i = 1, \dots, n$ ;  $C$  – неизвестная постоянная;  $\varepsilon_i$  – случайные ошибки, независимые нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием  $E(\varepsilon_i) = 0$  и постоянной дисперсией;  $r_i^1$  и  $r_i^2$  – частные решения альтернативных систем (11) и (12).

Таким образом, выполнение равенства (14) означает, что значения  $r_{ij}$  являются оценками рейтинга и для них выполняются равенства (3).

**Пример 2.** Психологи выяснили, что индивидуальные предпочтения в выборе цвета субъективны. Для нахождения рейтинга цвета можно взять за основу метод парных сравнений. Пусть испытуемому в случайном порядке предъявляют шесть объектов (цветные карты  $A_1, A_2, \dots, A_6$ ) и просят в каждой паре выбрать наиболее красивый цвет. Каждая пара предъявляется по 50 раз. В результате для каждой пары  $(A_i, A_j)$  можно получить разность частот, которую обозначим  $r_{ij}$  (табл. 2). Например, если в 50 испытаниях 30 раз была выбрана карта  $A_i$  и 20 раз карта  $A_j$ , то  $r_{ij} = 30 - 20 = 10$ . Если разность частот  $r_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, 6$ , удовлетворяет условиям (3) и (5), то значения  $r_{ij}$  можно рассматривать как рейтинг упорядоченных пар  $r_{ij} = r(A_i, A_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, 6$ . Поскольку данные в табл. 2 могут содержать случайные ошибки, применим статистический критерий  $K_1$ .

Таблица 2

Результаты парных сравнений,  $r_{ij}$ 

$A_i \backslash A_j$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
$A_1$	0	4	10	17	21	24
$A_2$	-4	0	1	8	17	20
$A_3$	-10	-1	0	1	7	18
$A_4$	-17	-8	-1	0	3	9
$A_5$	-21	-17	-7	-3	0	3
$A_6$	-24	-20	-18	-9	-3	0

Выбрав два столбца в табл. 2,  $r_{i1}, r_{i4}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , получим две альтернативные системы уравнений  $M_1$  и  $M_2$ , аналогичные системам (7) и (8). Альтернативные значения рейтинга  $\mathbf{r}^1$  и  $\mathbf{r}^2$  (для  $r_6 = 0$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ) приведены в табл. 3.

Таблица 3

Рейтинг альтернатив

$\mathbf{r}^1$	24	20	14	7	3	0
$\mathbf{r}^2$	26	17	10	9	6	0
$\mathbf{r}^3$	8,0	6,7	4,7	2,3	1,0	0,0

Критерий  $K_1$  позволяет показать, что значения  $r_{ij} = r(A_i, A_j)$  можно считать оценками рейтинга. Значение статистики Фишера  $F(1,4) = 39,8$  с уровнем  $p < 0,0033$  подтверждает гипотезу об адекватности модели  $r^2 = -0,083 + 1,007r^1$ . Кроме того, коэффициент регрессии  $k = 1,007$  статистически значим с уровнем  $p < 0,0033$ . На основании критерия  $K_1$  делаем вывод о существовании рейтинга. В третьей строке табл. 3 приведены значения рейтинга, полученные преобразованием  $\mathbf{r}^3 = \frac{1}{3}\mathbf{r}^1$ .

**Независимость переменных.** Переменной может быть как реальная физическая, так и некоторая абстрактная величина. В данной работе ограничимся случаем двух переменных. Пусть  $X$  и  $Y$  – две дискретные переменные, которые принимают значения  $x_1, x_2, \dots, x_L$  и  $y_1, y_2, \dots, y_M$ .

Областями определения рейтинга являются множество объектов  $(x_i, y_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , и множество упорядоченных пар объектов  $((x_i, y_j), (x_k, y_l))$ ,  $i, k = 1, 2, \dots, L$ ,  $j, l = 1, 2, \dots, M$ . В соответствии с общей схемой измерения считаем, что определен рейтинг объектов как функция двух переменных  $R_{ij} = R(x_i, y_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , с точностью до линейного преобразования  $R(x_i, y_j) = \lambda r(x_i, y_j) + C$ , где  $r(x_i, y_j)$  – частные значения рейтинга,  $\lambda > 0$ ,  $\lambda, C$  – постоянные.

Определение 3. Пусть определен рейтинг двух переменных  $R(x_i, y_j) = \lambda r(x_i, y_j) + C$ . Переменные  $X$  и  $Y$  независимы, если для рейтинга  $R(x_i, y_j)$  существуют частные значения рейтинга  $r_{ij} = r(x_i, y_j)$ , для которых верно выражение

$$r(x_i, y_j) = r(x_i, y_1) + r(x_1, y_j) \quad (15)$$

или

$$r(x_i, y_j) = r(x_i, y_1)r(x_1, y_j), \quad (16)$$

где  $r(x_i, y_1)$ ,  $r(x_1, y_j)$  – условные значения рейтинга объектов  $i = 1, 2, \dots, L$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ . В первом случае необходимо выполнить условие  $r(x_1, y_1) = 0$ , а во втором случае – условие  $r(x_1, y_1) = 1$ .

Если в равенстве (15)  $i = j = 1$ , то  $r(x_1, y_1) = 2r(x_1, y_1)$  и, соответственно, выполняется условие  $r(x_1, y_1) = 0$ . Если в равенстве (16)  $i = j = 1$ , то  $r(x_1, y_1) = (r(x_1, y_1))^2$ . Следовательно, выполняется условие  $r(x_1, y_1) = 1$  или  $r(x_1, y_1) = 0$ . Если  $r(x_1, y_1) = 0$  и выполняется равенство (16), то  $r(x_i, y_j) = r(x_i, y_1)r(x_1, y_j)r(x_1, y_1) = 0$  и модель становится вырожденной. Вырожденную модель можно рассматривать как частный случай аддитивной модели (15).

Если известны условные рейтинги  $r_{i1} = r(x_i, y_1)$  и  $r_{1j} = r(x_1, y_j)$ , то рейтинг  $r_{ij} = r(x_i, y_j)$  находится по формуле (15) или (16) в предположении, что переменные  $X$  и  $Y$  независимы по величине. В общем случае значения рейтинга  $r'_{ij} = r'(x_i, y_j)$  определены с точностью до линейного преобразования. Пусть  $r'_{ij} = \lambda r_{ij} + \gamma$ , где  $i = 1, 2, \dots, L$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ ;  $r_{ij}$  – нормализованные значения рейтинга,  $r_{ij} = r(x_i, y_j)$ , для которых выполняется условие  $r_{11} = 0$ ;  $\lambda, \gamma$  – неизвестные постоянные. Из формулы (16) получаем равенство

$$\lambda r_{ij} + \gamma = (\lambda r_{i1} + \gamma)(\lambda r_{1j} + \gamma). \quad (17)$$

Так как  $r_{11} = 0$ , то из уравнения (17) следует, что  $\gamma = 1$  или  $\gamma = 0$ . Тогда если  $\gamma = 1$ , то на основании формулы (17) получаем равенство

$$\lambda r_{ij} + 1 = (\lambda r_{i1} + 1)(\lambda r_{1j} + 1). \quad (18)$$

Если  $\gamma = 0$ , модель (17) сводится к вырожденной:  $r_{ij} = \lambda r_{i1}r_{1j} = (\lambda r_{i1})^2 r_{1j} r_{11} = 0$ . Сделав аналогичные замены переменных во втором соотношении (15):  $r'_{ij} = \lambda r_{ij} + \gamma$ , где  $i = 1, 2, \dots, L$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  и  $\lambda \neq 0$ ,  $r_{11} = 0$ , получим  $\gamma = 0$  и аддитивное представление

$$r_{ij} = r_{i1} + r_{1j}. \quad (19)$$

Мультипликативная модель (18) при малых  $\lambda$  становится аддитивной (19). Действительно, пусть  $r_{i1}$  и  $r_{1j}$  фиксированы и  $\lambda \rightarrow 0$ , тогда выполняется равенство

$$r_{ij} = (\lambda r_{i1} + 1)(\lambda r_{1j} + 1) - 1 / \lambda \rightarrow r_{i1} + r_{1j}.$$

Сравним теорию рейтингов с МАУТ [10] и МАИ [11]. Общим для всех трех методов является возможность субъективно оценивать величину. В МАИ математическая модель строится эвристически, в МАУТ – аксиоматически. Рассмотрим пример, представленный в работе [12]. Чтобы получить рейтинг величины, можно использовать вербальную шкалу различий [5] (табл. 4), где  $r_{ij}$  – результат субъективного сравнения объектов  $A_i$  и  $A_j$  по величине.



Таблица 4  
Вербальная шкала различий

Степень проявления	Числовая оценка $r_{ij}$
Отсутствует	0
Малая	2
Средняя	4
Большая	6
Максимальная	8
Промежуточных значений	1, 3, 5, 7
$r(A_j, A_i)$	$r_{ji} = -r_{ij}$

**Пример 3.** Эксперт оценивает качество подготовки четырех респондентов с помощью двух эквивалентных по сложности тестов. Пусть респонденты получили оценки

$$(5, 4), (3, 5), (4, 4), (5, 3). \quad (20)$$

Запись (5, 4) означает, что первый респондент по первому тесту получил оценку 5, а по второму тесту – 4. Требуется дать комплексную оценку качества подготовки каждого респондента.

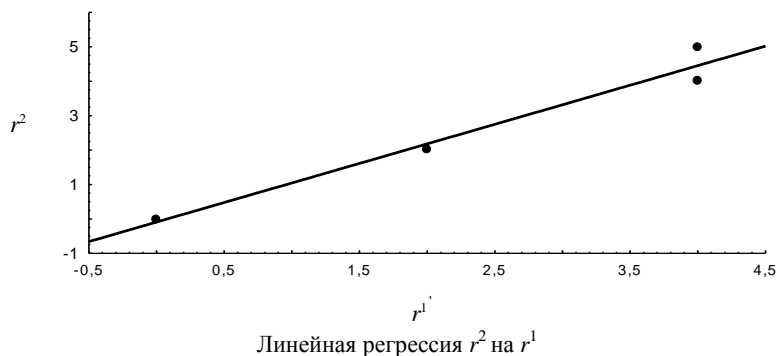
**Теория рейтингов.** Пусть переменная  $X$  принимает значения  $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5$ , а переменная  $Y$  – значения  $y_1 = 3, y_2 = 4, y_3 = 5$ . Определим объекты  $A_{ij} = (x_i, y_j)$  и зададим значения рейтинга пары объектов  $r_{ij,kl} = r(A_{ij}, A_{kl})$  и значения рейтинга объектов  $r_{ij} = r(A_{ij}), r_{kl} = R(A_{kl}), i, j = 1, 2, 3, k, l = 1, 2, 3$ . Рассмотрим пример планирования эксперимента, представленный в табл. 5. Сравнивая объекты  $A_{21} = (4,3)$  и  $A_{11} = (3,3)$ , эксперт считает, что объект  $A_{21}$  имеет малое преимущество перед объектом  $A_{11}$ . Согласно табл. 4 рейтинг пары объектов  $(A_{21}, A_{11})$  равен двум,  $r_{21,11} = 2$ , ему соответствует уравнение альтернативной системы  $M_1$ . В табл. 5 приводятся значения вектора  $\mathbf{r}^1$ , являющегося частным решением системы  $M_1$  при  $\lambda_1 = 1, r_{11} = 0$ , планы эксперимента, уравнения альтернативной системы  $M_2$  и значения вектора  $\mathbf{r}^2$  (частного решения системы  $M_2$ ) для  $\lambda_2 = 1, r_{11} = 0$ .

Планирование эксперимента

Таблица 5

План	Система $M_1$	$\mathbf{r}^1$	План	Система $M_2$	$\mathbf{r}^2$
$(A_{21}, A_{11})$	$r_{21} - r_{11} = 2$	$r_{21} = 2$	$(A_{21}, A_{11})$	$r_{11} - r_{31} = -4$	$r_{21} = 2$
$(A_{31}, A_{11})$	$r_{31} - r_{11} = 4$	$r_{31} = 4$	$(A_{31}, A_{21})$	$r_{21} - r_{31} = -2$	$r_{31} = 4$
$(A_{33}, A_{11})$	$r_{33} - r_{11} = 4$	$r_{33} = 4$	$(A_{33}, A_{31})$	$r_{33} - r_{31} = 1$	$r_{33} = 5$

Для подтверждения линейной зависимости между решениями систем  $M_2$  и  $M_1$  отметим на рисунке точки  $(r_i^2, r_i^1)$  и построим уравнение регрессии  $r^2 = -0,091 + 1,13r^1$ .



Визуальный анализ графика показывает, что данные сгруппированы вблизи линии регрессии. Значение статистики Фишера  $F(1, 2) = 52,1$  с уровнем  $p < 0,019$  подтверждает гипотезу об адекватности модели. Кроме того, коэффициент детерминации  $R^2$  показывает, что

на 96,3 % значения переменной  $r^2$  обусловлены вариацией переменной  $r^1$ . Статистика Стьюдента  $t(2) = 7,22$  с уровнем  $p = 0,019$  подтверждает статистическую значимость коэффициента регрессии  $k = 1,13$ . Поэтому можно сделать вывод, что измерение рейтинга надежно.

Значения рейтинга  $r_{13}$  и  $r_{31}$  совпадают в силу симметрии, поскольку оба теста считаются одинаково важными. Если известны значения рейтинга  $r_{1i}$ ,  $r_{i1}$  и  $r_{33}$ , то можно найти рейтинг  $r_{ij}$ . Рассмотрим два случая, которые отличаются только значениями  $r_{33}$ .

1. Выбираем значения рейтинга из третьего столбца в табл. 5 и на основании равенства (18) получаем уравнение для определения параметра  $\lambda$ :

$$\lambda r_{33} + 1 = (\lambda r_{31} + 1)(\lambda r_{13} + 1). \quad (21)$$

Решая уравнение (21), находим значение параметра  $\lambda = -0,25$ . Тогда на основании соотношения (18) рейтинг произвольного объекта (табл. 6) рассчитывается по формуле

$$r_{ij} = 4 - (4 - r_{i1})(4 - r_{1j})/4. \quad (22)$$

2. Выбираем значения рейтинга из третьего столбца в табл. 5, но считаем, что  $r_{33} = 8$ . Тогда из уравнения (21) следует, что  $8\lambda + 1 = (4\lambda + 1)(4\lambda + 1)$  и  $\lambda = 0$ . Следовательно, надо использовать аддитивное представление (19).

Рейтинги, найденные по мультипликативной (табл. 6) и аддитивной (табл. 7) формулам, отличаются существенно. Жирным шрифтом в табл. 6 и 7 выделены значения, найденные экспериментально.

Таблица 6  
Мультипликативная модель рейтинга  $r_{ij}$

$i \backslash j$	1	2	3
1	<b>0,00</b>	<b>2,00</b>	<b>4,00</b>
2	<b>2,00</b>	3,00	4,00
3	<b>4,00</b>	4,00	<b>4,00</b>

Таблица 7  
Аддитивная модель рейтинга  $r_{ij}$

$i \backslash j$	1	2	3
1	<b>0,0</b>	<b>2,0</b>	<b>4,0</b>
2	<b>2,0</b>	4,0	6,0
3	<b>4,0</b>	6,0	<b>8,0</b>

**Многокритериальная теория полезности [10].** Функция полезности имеет аксиоматическое обоснование, с ее помощью можно представить предпочтения на некотором множестве альтернатив. В частности, если факторы  $X = (x_1, x_2, x_3)$  и  $Y = (y_1, y_2, y_3)$  независимы по полезности, то функция полезности  $u(x_i, y_j)$  от двух аргументов  $x_i$  и  $y_j$  является полилинейной и может быть записана для  $k \neq 0$  и  $k = 0$  соответственно в виде

$$ku(x_i, y_j) + 1 = (1 + ku(x_i, y_1))(1 + ku(x_1, y_j)) \quad (23)$$

и

$$u(x_i, y_j) = u(x_i, y_1) + u(x_1, y_j). \quad (24)$$

Здесь  $u(x_i, y_1)$ ,  $u(x_1, y_j)$  – частные функции полезности, где  $i = 1, 2, 3$  и  $j = 1, 2, 3$ ,  $k$  – постоянные, которые находят, используя дополнительную информацию. При этом  $u(x_1, y_1) = 0$ ,  $u(x_3, y_3) = 1$ . Неизвестные значения  $u(x_2, y_3)$  и  $u(x_3, y_2)$  находятся из равенств

$$u(x_1, y_3) = (1 - p_1)u(x_1, y_1) + p_1u(x_3, y_3), \quad (25)$$

$$u(x_1, y_2) = (1 - p_2)u(x_1, y_1) + p_2u(x_3, y_3). \quad (26)$$

Чтобы найти вероятность  $p_1$  в уравнении (25), эксперту предлагается сделать выбор из двух вариантов: сразу получить альтернативу  $(x_1, y_3)$  либо участвовать в лотерее, в которой можно получить самую лучшую альтернативу  $(x_3, y_3)$  с вероятностью  $p_1$  или самую худшую  $(x_1, y_1)$  с вероятностью  $1 - p_1$ . Последовательно уточняя, подбирают вероятность  $p_1$  таким образом, чтобы оба предложенных варианта казались эксперту одинаково полезными, тогда будет выполняться равенство (25). Аналогично находим вероятность  $p_2$ , тогда  $u(x_1, y_3) = p_1$ ,  $u(x_1, y_2) = p_2$

и в силу симметрии  $u(x_1, y_3) = u(x_3, y_1)$ ,  $u(x_1, y_2) = u(x_2, y_1)$ . Из равенства (23) для  $i = 3$  и  $j = 3$  следует уравнение

$$k + 1 = (1 + kp_1)(1 + kp_1), k \neq 0, \quad (27)$$

где  $k$  – постоянная масштаба. Рассмотрим два случая:

1. Пусть  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 1/2$ , тогда  $k = -1$ ,  $u(x_1, y_3) = 1$ ,  $u(x_1, y_2) = 1/2$ . На основании (23) получим

$$u(x_i, y_j) = 1 - (1 - u(x_i, y_1))(1 - u(x_1, y_j)).$$

Следовательно, выполняется равенство  $u(x_i, y_j) = r(x_i, y_j)/4$ , где  $r(x_i, y_j)$  находится на основании мультипликативной модели (16) (см. табл. 6).

2. Пусть теперь  $p_1 = 1/2$ ,  $p_2 = 1/4$ ,  $u(x_1, y_3) = 1/2$  и  $u(x_1, y_2) = 1/4$ . Тогда в уравнении (27)  $k = 0$ , функцию полезности находим по формуле (24). В этом случае выполняется  $u(x_i, y_j) = r(x_i, y_j)/8$ , где  $r(x_i, y_j)$  находится из аддитивной модели рейтинга (15) (табл. 7).

В данном примере вероятность  $p_1$  является величиной, определяемой субъективно. Объективные и субъективные значения вероятности не совпадают (парадокс Алле). Запишем равенство (25) в виде  $u(x_2, y_3) - u(x_1, y_1) = p_1(u(x_3, y_3) - u(x_1, y_1))$ . Следовательно, чтобы найти вероятность  $p_1$ , оценим разности  $u(x_2, y_3) - u(x_3, y_3)$  и  $u(x_2, y_2) - u(x_3, y_3)$ . Для этого достаточно выполнить парные сравнения с помощью табл. 4.

**Метод анализа иерархий.** Варианты сравнивают с помощью аддитивной функции ценности

$$u(x_i, y_j) = w_1 p_1(x_i) + w_2 p_2(y_j), \quad (28)$$

где  $w_1$  и  $w_2$  – коэффициенты, приоритеты критериев  $X$  и  $Y$  (их относительные веса);  $p_1(x_i)$  и  $p_2(y_j)$  – приоритеты варианта  $(x_i, y_j)$  относительно критериев  $X$  и  $Y$  соответственно. Величина  $u(x_i, y_j)$  называется интегральным приоритетом варианта  $(x_i, y_j)$ . В статье [12] рассматривается применение МАИ к подмножеству вариантов (20). Показано, что он приводит к противоречивым результатам. В работе [13] предпринята попытка реабилитировать МАИ, используя общую аддитивную модель в виде (28) для всех возможных вариантов  $(x_i, y_j)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . В статье [14] доказано, что и в этом случае может возникнуть противоречие.

Анализ выражений (28) и (19) показывает, что модель МАИ может совпадать с аддитивным вариантом метода рейтинга. Предположим, что оба критерия имеют одинаковую важность, а результатом парного сравнения вариантов  $x_1, x_2, x_3$  с вариантом  $x_3$  является вектор  $(1/3, 2/3, 1)$  и матрица парных сравнений согласована [11]. Тогда вектор приоритетов  $(p_1(x_1), p_1(x_2), p_1(x_3)) = (1/6, 1/3, 1/2)$  и в силу симметрии выполняются равенства  $p_1(x_i) = p_2(y_j)$  и  $w_1 = w_2 = 1/2$ . В этом случае функция ценности (28) с точностью до линейного преобразования совпадает с аддитивной моделью рейтинга  $u(x_i, y_j) = (r(x_i, y_j) + 4)/24$ , где  $r(x_i, y_j)$  находятся по табл. 7.

**Заключение.** В работе уточнено определение рейтинга величины и дано определение независимых переменных. Теория рейтингов может применяться в задачах принятия решений, распознавания образов при оценке качества и нахождении функции полезности. Методы МАИ и методы теории рейтингов с разных позиций подходят к определению функции полезности, но могут приводить к одинаковым математическим моделям. Функция ценности МАИ может совпадать только с аддитивной моделью в теории рейтингов. Такое ограничение является существенным недостатком МАИ.

#### Список использованных источников

1. Кнорринг, В. Г. Развитие репрезентационной теории измерений / В. Г. Кнорринг // Измерения. Контроль. Автоматизация. – 1980. – № 11–12. – С. 3–9.
2. Толстова, Ю. Н. Краткая история развития репрезентативной теории измерений / Ю. Н. Толстова // Заводская лаборатория. – 1999. – № 3. – С. 49–57.
3. Cliff, N. Abstract measurement theory and the revolution that never happened / N. Cliff // Psychological Science. – 1992. – Vol. 3(3). – P. 186–190.
4. Романчук, В. М. Измерение нефизической величины / В. М. Романчук // Системный анализ и прикладная информатика. – 2017. – № 4. – С. 39–44.

5. Романчук, В. М. Субъективное оценивание вероятности / В. М. Романчук // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 2. – С. 74–82.
6. Маклейн, С. Категории для работающего математика : пер. с англ. / С. Маклейн. – М. : Физматлит, 2004. – 352 с.
7. Fechner, G. T. Elemente der Psychophysik / G. T. Fechner. – Leipzig : Breitkopf & Hartel, 1860. – 336 p. (in German).
8. Thurstone, L. L. Attitudes can be measurement / L. L. Thurstone // American Journal of Sociology. – 1928. – Vol. 33. – P. 523–554.
9. Сурдин, В. Г. Звезды / В. Г. Сурдин. – М. : Физматлит, 2008. – 428 с.
10. Кини, Р. Л. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения : пер. с англ. / Р. Л. Кини, Х. Райфа. – М. : Радио и связь, 1981. – 560 с.
11. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий : пер. с англ. / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1989. – 316 с.
12. Подиновский, В. В. О некорректности метода анализа иерархий / В. В. Подиновский, О. В. Подиновская // Проблемы управления. – 2011. – № 1. – С. 8–13.
13. Митихин, В. Г. Об одном контрпримере для метода анализа иерархий / В. Г. Митихин // Проблемы управления. – 2012. – № 3. – С. 77–79.
14. Подиновский, В. В. Еще раз о некорректности метода анализа иерархий / В. В. Подиновский, О. В. Подиновская // Проблемы управления. – 2012. – № 4. – С. 75–78.

---

## References

1. Knorrning V. G. Razvitie reprezentacionnoj teorii izmerenij [The development of the representational theory of measurement]. Izmerenija, kontrol', avtomatizacija [*Measurement, Control and Automation*], 1980, no. 11–12, pp. 3–9 (in Russian).
2. Tolstova Yu. N. Kratkaja istorija razvitiya reprezentativnoj teorii izmerenij [A brief history of the development of representative measurement theory]. Zavodskaja laboratorija [*Industrial Laboratory*], 1999, no. 3, pp. 49–57 (in Russian).
3. Cliff N. Abstract measurement theory and the revolution that never happened. *Psychological Science*, 1992, vol. 3(3), pp. 186–190.
4. Romanchak V. M. Izmerenie nefizicheskoj velichiny [Measurement of non-physical quantity]. Sistemnyj analiz i prikladnaja informatika [*System Analysis and Applied Informatics*], 2017, no. 4, pp. 39–44 (in Russian).
5. Romanchak V. M. Sub"ektivnoe ocenivanie verojatnosti [The measurement of subjective probability]. Informatika [*Informatics*], 2018, vol. 15, no. 2, pp. 74–82 (in Russian).
6. Mac Lane S. *Categories for the Working Mathematician*. New York, Springer-Verlag, 1978, 317 p.
7. Fechner G. T. *Elemente der Psychophysik*. Leipzig, Breitkopf & Hartel, 1860, 336 p. (in German).
8. Thurstone L. L. Attitudes can be measurement. *American Journal of Sociology*, 1928, vol. 33, pp. 523–554.
9. Surdin V. G. *Zvjozdy. The Stars*. Moscow, Fizmatlit, 2008, 428 p. (in Russian).
10. Keeney R. L., Raiffa H. *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. New York, Wiley, 1976, 569 p.
11. Saaty T. L. *The Analytic Hierarchy Process*. New York, McGraw Hill, 1980.
12. Podinovski V. V., Podinovskaya O. V. O nekorrektnosti metoda analiza ierarhij [On the theoretical incorrectness of the analytic hierarchy]. Problemy upravlenija [*Control Sciences*], 2011, no. 1, pp. 8–13 (in Russian).
13. Mitikhin V. G. Ob odnom kontrprimere dlja metoda analiza ierarhij [On a counterexample for the analytic hierarchy process]. Problemy upravlenija [*Control Sciences*], 2012, no. 3, pp. 77–79 (in Russian).
14. Podinovski V. V., Podinovskaya O. V. Eshhe raz o nekorrektnosti metoda analiza ierarhij [Another note on the incorrectness of the analytic hierarchy]. Problemy upravlenija [*Control Sciences*], 2012, no. 4, pp. 75–78 (in Russian).

## Информация об авторе

Романчук Василий Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерной математики, Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь.  
E-mail: Romanchak@bntu.by

## Information about the author

Vasily M. Romanchak, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof. of the Department of Engineering Mathematics, Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus.  
E-mail: Romanchak@bntu.by

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)  
УДК 681.511

Поступила в редакцию 16.07.2019  
Received 16.07.2019

Принята к публикации 01.08.2019  
Accepted 01.08.2019

## Алгоритм синтеза устойчивых характеристических полиномов динамических систем при условии вариации параметров

А. А. Несенчук

*Объединенный институт проблем информатики  
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
E-mail: anes@newman.bas-net.by*

**Аннотация.** Рассматриваются динамические системы с возмущенными параметрами, описываемые семействами характеристических полиномов третьего порядка с коэффициентами в пределах заданных интервалов значений. Динамика системы определяется в форме корневого портрета. Вводится понятие доминирующего поля корневых траекторий семейства, на основе которого формулируется условие устойчивости системы. На базе особенностей конфигурации корневых портретов подобных систем и графоаналитического подхода к их анализу и синтезу формируется алгоритм расчета параметров характеристического уравнения системы, обеспечивающих ее робастную устойчивость в случае неустойчивости исходной системы. Алгоритм реализуется в графоаналитическом варианте. Исследование устойчивости семейства и синтез, в случае необходимости, новых значений параметров выполняются на основе анализа расположения доминирующего поля корневых траекторий семейства в плоскости корней системы.

**Ключевые слова:** характеристический полином, динамическая система, параметрические вариации, корневой портрет, доминирующее поле корневых траекторий

**Благодарность.** Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ № Ф18Р-251 «Разработка корневых методов анализа и синтеза систем управления с гарантируемой динамикой, обеспечиваемой в условиях неопределенности параметров управляемых объектов».

**Для цитирования.** Несенчук А. А. Алгоритм синтеза устойчивых характеристических полиномов динамических систем при условии вариации параметров / А. А. Несенчук // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 51–62.

---

---

## Algorithm for synthesis of the stable characteristic polynomials for dynamic systems under parametric variations

Alla A. Nesenchuk

*The United Institute of Informatics Problems of the National Academy  
of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
E-mail: anes@newman.bas-net.by*

**Abstract.** The paper deals with the dynamic systems with perturbed parameters described by the families of the third order characteristic polynomials having coefficients within the given intervals of values. The system dynamics is represented in the form of the root locus portrait. The notion of the root locus field of the family is introduced that is the basis for the system stability condition formulation. Root locus portrait configuration peculiarities of the systems of the kind and graphic-analytical approach to their analysis and synthesis serve as the basis for the system characteristic equation parameters calculation algorithm ensuring its robust stability in case of the given system proven unstable. Algorithm is implemented in the graphic-analytical form. System

stability investigation and synthesis, in case of necessity, of the new parameters values are performed on the basis of estimation of the family root locus dominating field location character in the roots plane.

**Keywords:** characteristic polynomial, dynamic system, parametric variations, root locus portrait, dominating root locus field

**Acknowledgements.** This work was supported by the grant of the BRFFR no. Ф18Р-251 "Development of root methods for the analysis and synthesis of control systems with guaranteed dynamics provided under conditions of uncertainty in the parameters of controlled objects".

**For citation.** Nesenchuk A. A. Algorithm for synthesis of the stable characteristic polynomials for dynamic systems under parametric variations. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 51–62 (in Russian).

**Введение.** Развитие и усложнение современных управляемых технических объектов, повышение требований к качеству их функционирования обуславливают необходимость совершенствования систем автоматического управления данными объектами, что особенно важно в тех случаях, когда объект работает в условиях неопределенности, существенных параметрических вариаций [1]. По этой причине большое значение имеет изучение влияния неопределенности и параметрических возмущений, вызываемых различными неблагоприятными и часто непредвиденными факторами, на устойчивость и качество функционирования системы.

Обеспечение приемлемых динамических характеристик функционирования объектов управления в условиях неопределенности является одной из главных движущих сил в развитии теории автоматического управления с обратной связью [2]. Поэтому актуальным является вопрос более глубокого исследования динамических свойств систем управления в условиях изменяющихся параметров и минимизации или устранения отрицательных последствий обеспечения робастности систем [1–14]. Выделяют три основных подхода к исследованию: алгебраический, частотный и корневой. Алгебраический и корневой подходы могут быть, в свою очередь, отнесены к так называемому «полиномиальному» подходу, который впервые возник в 60–70-х гг. XX в. как особый подход к проектированию и синтезу систем автоматического управления [3]. В книге В. Кучеры [3] отмечается, что полиномиальное описание динамики систем во многих случаях является наиболее естественным и полиномиальные модели позволяют продемонстрировать важное свойство систем – динамику нулей и полюсов в транспарентной (прозрачной) форме. Здесь же рассматриваются вопросы прошлого, настоящего и будущего развития полиномиального управления в динамических системах.

Одной из первых и наиболее значимых публикаций в данном направлении является посвященная исследованию характеристических полиномов систем с интервально-возмущенными параметрами статья В. Л. Харитонова [4], в которой рассмотрено алгебраическое условие устойчивости полиномиального семейства. Б. Андерсон в своей работе [5] значительно упростил условия Харитонова для полиномов низких степеней. Основные результаты, полученные в рамках частотного подхода к робастности управления, изложены в монографиях [6, 7], где рассматриваются различные классы систем и задачи в разных постановках. Корневой подход к решению задач анализа и синтеза систем, в том числе задач синтеза полиномиальных семейств, представлен также в работах [8–14].

Несмотря на значительное количество научных результатов, полученных в области решения задач построения автоматического управления в условиях неопределенности (в частности, задач обеспечения робастности систем), наиболее общие методы разработаны в основном для решения задач анализа. Методы из области синтеза имеют, как правило, частный характер: не существует достаточно общих методов синтеза, которые были бы просты, наглядны, удобны в использовании и не были бы привязаны к конкретному объекту управления. Корневое направление исследований перспективно именно при решении задач синтеза систем в условиях неопределенности, поскольку, являясь мощным инструментом синтеза систем, корневой годограф по своей природе предполагает параметрические вариации и особенно удобен при использовании в графоаналитическом и графическом вариантах.

В настоящей работе приводятся результаты исследования динамических свойств систем с возмущенными параметрами, определяется корневое условие устойчивости для систем третьего порядка, используемое для проверки устойчивости и параметрического синтеза систем на основе графоаналитического подхода.

**Конфигурация и динамика корневых портретов систем.** Опишем динамику системы третьего порядка с возмущенными параметрами в виде полинома

$$s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = p(s), \quad (1)$$

где  $a_j \in [\underline{a}_j, \bar{a}_j]$ ,  $j = 1, \dots, 3$ ;  $s = \sigma + i\omega$ .

Для установления характера изменения динамических свойств полинома (1) в зависимости от параметрических вариаций исследуем основные конфигурации, которые может принимать его корневой портрет  $P$  при всех возможных значениях изменяющихся параметров, и характер пересечения годографами границы устойчивости.

Запишем уравнение свободного корневого годографа полинома (1) [8, 9]

$$3\sigma^2\omega - \omega^3 + 2a_1\sigma\omega + a_2\omega = v(\sigma, \omega) = 0 \quad (2)$$

и уравнение параметра полинома (1) [8, 9]

$$-\sigma^3 + 3\sigma\omega^2 - a_1\sigma^2 + a_1\omega^2 - a_2\sigma = u(\sigma, \omega) = a_3. \quad (3)$$

С целью исследования устойчивости системы приведем также уравнение миграции корней на границе устойчивости

$$\omega^3 - a_2\omega = 0 \quad (4)$$

и функцию параметра на границе устойчивости

$$f(\omega) = a_1\omega^2 = a_3. \quad (5)$$

Для решения поставленной задачи представим корневой портрет системы  $P$  в форме бесконечного множества двухпараметрических полей  $F_i$  корневых траекторий [9]:

$$P = \{F_i\}, i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

**Определение 1.** Параметром, или свободным параметром корневого годографа алгебраического уравнения (полинома), назовем коэффициент этого уравнения или параметр описываемой данным уравнением динамической системы, варьируемый по определенному закону с целью построения корневого годографа.

**Определение 2.** Параметром поля корневых траекторий динамической системы с характеристическим уравнением (1) назовем некоторый параметр образа корневого годографа [2] или коэффициент (параметр) характеристического уравнения (1), изменяемый в промежутке  $(-\infty, +\infty)$  с целью получения поля корневых траекторий данной системы.

В качестве параметра годографа определим свободный коэффициент  $a_3$ , т. е. будем рассматривать свободные годографы [10], а в качестве параметра поля – коэффициент  $a_2$  полинома (1).

Все поля, формирующие корневой портрет системы (6), обладают идентичными математическими свойствами, что позволяет для установления свойств корневого портрета в целом исследовать динамику отдельного поля. Запишем общие выражения соответственно для функции поля и его линий уровня:

$$F(\sigma, \omega) = 3\sigma^2 - \omega^2 + 2a_1\sigma, \tag{7}$$

$$F(\sigma, \omega) = 3\sigma^2 - \omega^2 + 2a_1\sigma = -a_2 = \text{const}. \tag{8}$$

На основе представленной выше математической модели системы установлено, что возможны следующие основные варианты пересечения границы асимптотической устойчивости ветвями полей корневых траекторий (корневых портретов) систем:

- 1) граница устойчивости пересекается положительными ветвями при  $a_1 > 0, a_2 > 0$  (рис. 1, а);
- 2) граница устойчивости пересекается отрицательными ветвями при  $a_1 < 0, a_2 > 0$  (рис. 1, б);
- 3) граница устойчивости не пересекается, т. е. пересечение отсутствует при  $-\infty < a_1 < +\infty, a_2 < 0$  (рис. 2, а).

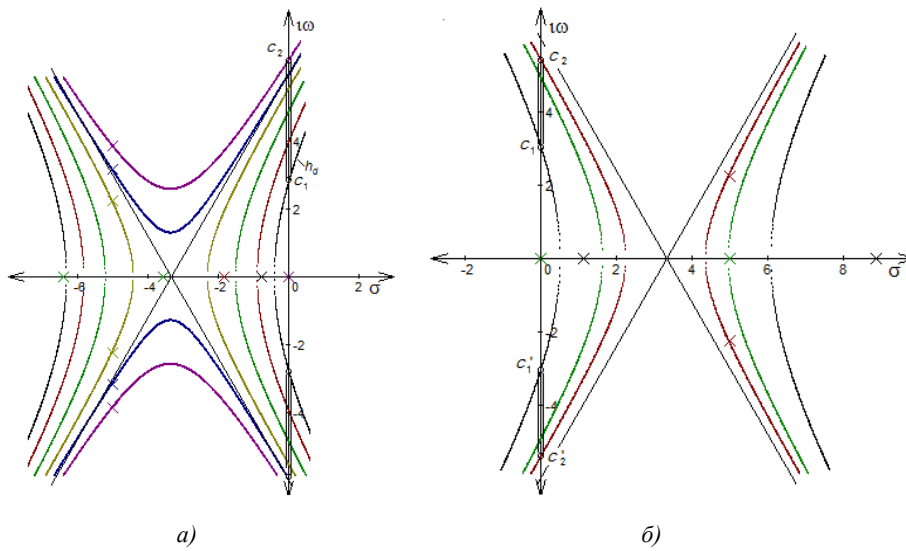


Рис. 1. Поля корневых траекторий: а) полинома  $s^3 + 10s^2 + a_2s + a_3 = p(s)$  при  $a_2 \in [7, 40], a_3 \in [-\infty, +\infty]$ ; б) полинома  $s^3 - 10s^2 + a_2s + a_3 = p(s)$  при  $a_2 \in [20, 30], a_3 \in [-\infty, +\infty]$

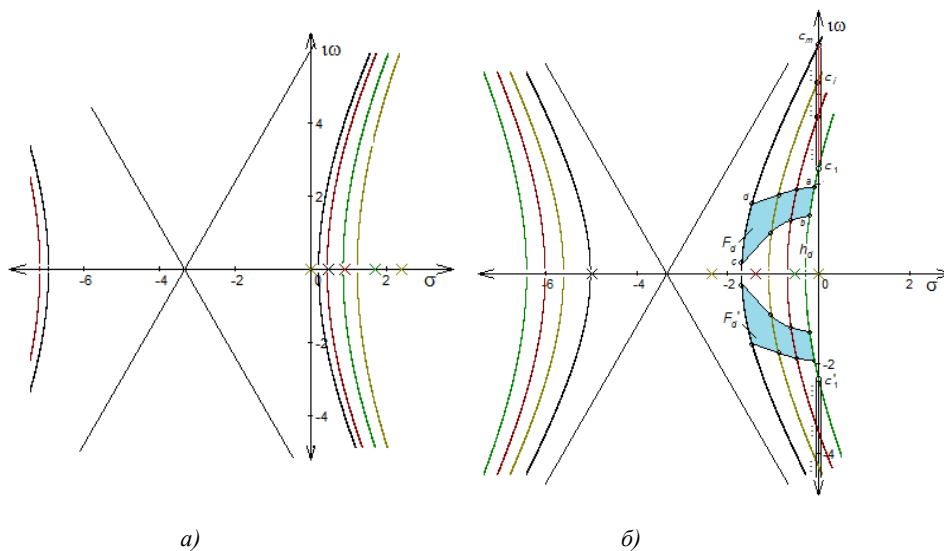


Рис. 2. Поля корневых траекторий: а) полинома  $s^3 + 10s^2 + a_2s + a_3 = p(s)$  при  $a_2 \in [-20, -5], a_3 \in [-\infty, +\infty]$ ; б) полинома  $s^3 + 10s^2 + a_2s + a_3 = p(s)$  при  $a_2 \in [5, 25], a_3 \in [18, 40], a_1 \in [10, 20]$



Далее будем рассматривать первый случай,  $a_1 > 0$ .

Из рис. 1, *a* видно, что поле корневых траекторий пересекает границу устойчивости в области  $C = [c_1, c_2]$ . На рис. 1, *б* область  $C = [c_1, c_2]$  формируется отрицательными ветвями годографов поля.

**Определение 3.** Область  $C$  на границе устойчивости  $i\omega$ , в пределах которой корневой портрет (поле) корневых траекторий пересекает эту границу, назовем областью пересечений портрета (поля).

В семействе полей корневых траекторий системы (6), формирующих ее портрет, выделим так называемое доминирующее поле  $F_d$ , устойчивость которого будет гарантировать устойчивость всего интервального семейства в целом.

**Определение 4.** Доминирующим в семействе полей корневых траекторий (6) назовем поле  $F_i = F_d$ , при расположении которого в левой полуплоскости  $s$  корней весь корневой портрет системы располагается в левой полуплоскости.

Согласно определению 4 устойчивость доминирующего поля  $F_d$  гарантирует устойчивость корневого портрета системы в целом.

**Устойчивость характеристического полинома системы.** В семействе корневых годографов доминирующего поля выделим годограф, устойчивость которого будет гарантировать устойчивость всего поля в целом.

**Определение 5.** Корневой годограф  $h_i = h_d$  доминирующего поля  $F_d$  корневых траекторий полинома (1), устойчивость которого гарантирует устойчивость поля  $F_d$ , назовем доминирующим корневым годографом поля (портрета).

Таким образом, устойчивость доминирующего корневого годографа  $h_d$  корневого портрета гарантирует устойчивость всего корневого портрета системы в целом.

На основании приведенного выше выражения (5), описывающего динамику функции параметра  $f(\omega)$  на границе устойчивости, можно заключить, что вдоль границы устойчивости данная функция может быть либо возрастающей, либо убывающей. Тогда сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение.** Функция параметра траектории (3) для поля корневых траекторий динамической системы третьего порядка, описываемой характеристическим уравнением (1) с положительными или отрицательными коэффициентами, на границе устойчивости в области  $C$  соответственно возрастает или убывает. В единственной точке экстремума функции, находящейся в начале координат, параметр траектории равен нулю.

Поскольку согласно известным свойствам корневых траекторий все начальные точки годографов  $h_i^+$  (т. е. точки, в которых параметр годографа равен нулю) полиномов третьего порядка с положительными коэффициентами всегда располагаются в левой полуплоскости корней  $s$ , положительную устойчивую часть  $P^+$  корневого портрета  $P$  рассматриваемого семейства ( $P^+ \subset P$ ) можно представить выражением  $P^+ = \{h_i^+, i = 1, 2, \dots\}$ , где  $h_i^+ = (0, a_3(\omega_i))$ ,  $a_3(\omega_i)$  – значение параметра годографа  $a_3$  в точке пересечения  $\omega_i$   $i$ -го годографа портрета с границей устойчивости  $i\omega$  в области пересечений  $C$  (см. рис. 1). Тогда согласно утверждению справедливо равенство  $\bigcap_{h_i^+ \in P^+} h_i^+ = \inf h_i^+ = (0, a_{3\min}(\omega_i))$ , где  $a_{3\min}(\omega_i) = \min a_3(c_1)$ . На этом основании и с учетом

формул (4) и (5) сформулируем следующие следствия утверждения.

**Следствие 1.** Доминирующим в семействе полей корневых траекторий полинома (1) является поле  $F_d$ , которое содержит линию уровня (доминирующий корневой годограф  $h_d(s)$ ), проходящую через нижнюю точку  $c_1$  области пересечений  $C$  (см. рис. 2, б), в которой значение параметра  $a_3$  является минимальным для данного семейства:  $a_3 = \min a_3(c_1)$ .

**Следствие 2.** Доминирующий корневой годограф  $h_d(s)$  полиномиального семейства (1) описывается уравнением

$$s^3 + \underline{a}_1 s^2 + \underline{a}_2 s + \underline{a}_3 = h_d(s), \quad (9)$$

*a* доминирующий полином, устойчивость которого будет гарантировать выражение (9), – уравнением

$$s^3 + \underline{a}_1 s^2 + \underline{a}_2 s + \bar{a}_3 = p_d(s). \quad (10)$$

На основании (8)–(10) функцию доминирующего поля  $F_d$  корневых траекторий определим выражением

$$f_d(\sigma, \omega) = \omega^2 - 3\sigma^2 - 2\underline{a}_1 \sigma, \quad (11)$$

а уравнение линий уровня поля  $F_d$  – выражением

$$\omega^2 - 3\sigma^2 - 2\underline{a}_1 \sigma = a_2. \quad (12)$$

На основе приведенных выше утверждения, следствий 1 и 2 сформулируем следующее условие устойчивости рассматриваемого семейства.

*Условие устойчивости.* Семейство характеристических полиномов (1) динамической системы с возмущенными коэффициентами является асимптотически устойчивым, если доминирующее поле  $F_d$  (11) системы (доминирующий корневой годограф  $h_d$  системы) располагается в левой полуплоскости корней  $s$ .

Расчет и настройка параметров (синтез) семейства (1) согласно данному методу выполняются, как правило, посредством определения (настройки) значений интервалов параметров  $a_2$  и  $a_3$ . Настройка осуществляется на основании следствий 1 и 2 утверждения в соответствии со следующими условиями:

$$0 < a_3 < \min(a_3(c_i)), a_2(c_i) < a_2 < a_2(c_m), \quad (13)$$

где  $a_3(c_i)$ ,  $a_2(c_i)$  – соответственно значения коэффициентов  $a_3$  и  $a_2$  в определенной точке  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , пересечения границы устойчивости  $i$ -й линией уровня доминирующего поля  $F_d$  (см. рис. 2, б).

Точка  $c_i$  может выбираться произвольно в соответствии с желанием пользователя. В случае необходимости выполняется также настройка параметра  $a_1$ .

**Алгоритм анализа и синтеза полиномиального семейства на основе графоаналитического метода.** Алгоритм состоит из следующих шагов:

*Шаг 1.* Вход алгоритма: степень  $n$  и векторы нижних  $\underline{v}$  и верхних  $\bar{v}$  значений интервалов коэффициентов  $a_j$  семейства полиномов (1).

*Шаг 2.* Формирование корневой полевой математической модели динамики системы по выражениям (2)–(12), в результате которого должны быть сформированы выражения для  $h_d(s)$  (9),  $p_d(s)$  (10), функция поля  $F_d$  (11) и уравнение линий уровня поля  $F_d$  (12).

*Шаг 3.* Графическое построение доминирующего поля корневых траекторий в виде линий уровня (корневых годографов) для заданного семейства (1) на основе выражений (2)–(12) (см. рис. 2, б).

*Шаг 4.* Анализ устойчивости семейства на основании приведенного выше условия устойчивости, который может выполняться как аналитически посредством проверки на устойчивость полинома  $p_d(s)$  (10), так и графически путем оценки расположения доминирующего поля  $abcd$  (рис. 2, б) относительно границы устойчивости.

*Шаг 5.* В случае устойчивости семейства, т. е. расположения поля в левой полуплоскости комплексной плоскости корней, альтернативное выполнение перехода к шагу 10, если никакой дальнейшей настройки полинома не требуется, и к шагу 8, если настройка требуется.

*Шаг 6.* В случае неустойчивости семейства, т. е. расположения доминирующего поля  $abcd$  (рис. 2, б) частично или полностью в правой полуплоскости плоскости корней (рис. 3, а), перемещение поля в левую полуплоскость. Для этого определяются значения  $\min(a_3(c_i))$  на основании выражений (4), (5), (9), что может также выполняться посредством щелчка мышью в желаемой точке  $c_i$ , и выбираются новые интервалы значений  $a_3$  и  $a_2$  согласно выражению (13).

Шаг 7. Переход к шагу 10.

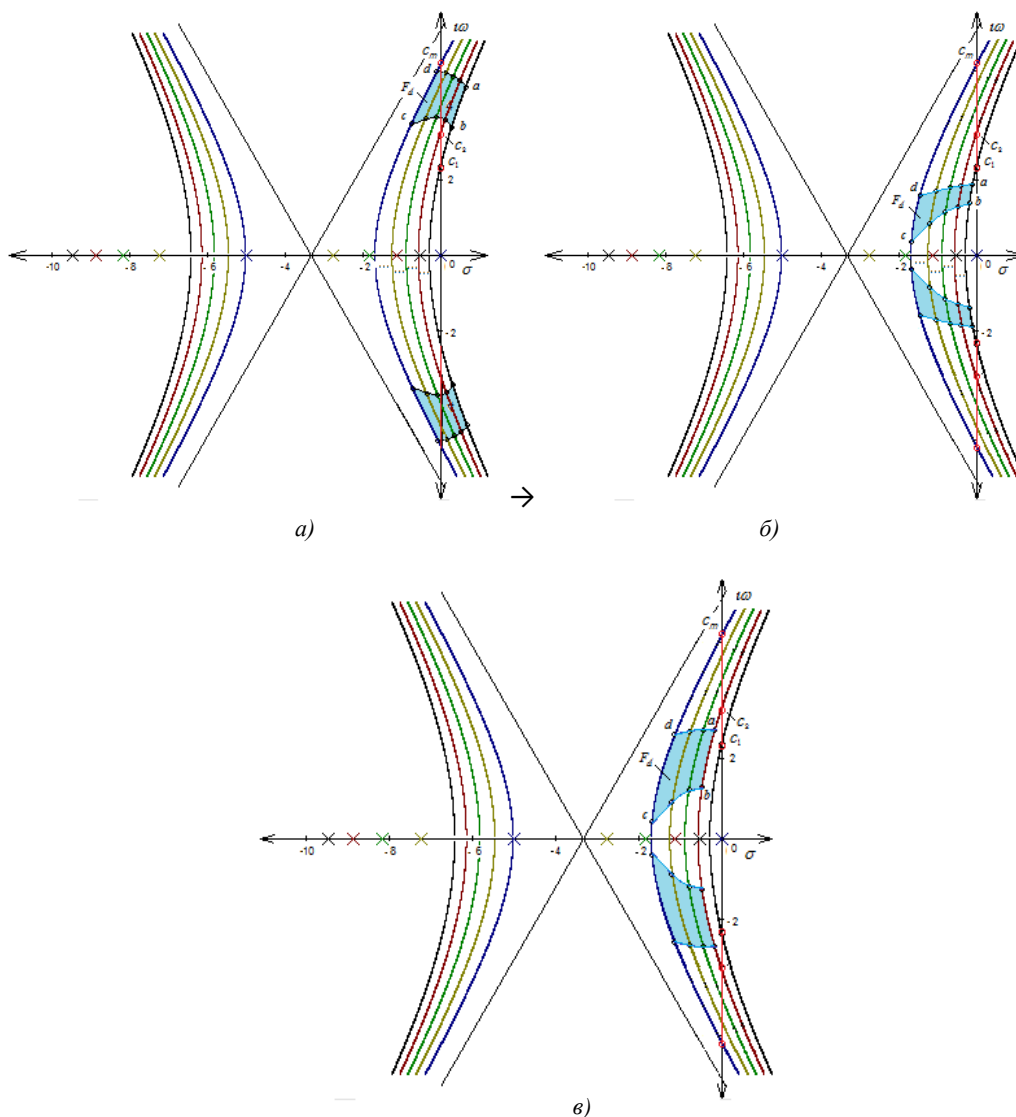


Рис. 3. Поля корневых траекторий полинома  $s^3 + 10s^2 + a_2s + a_3 = p(s)$  при  $a_2 \in [5, 25]$ ,  $a_3 \in [-\infty, +\infty]$  и доминирующее поле  $F_d = abcd$ : а) исходное неустойчивое при  $a_2 \in [5, 25]$ ,  $a_3 \in [130, 250]$ ; б) перемещенное устойчивое при  $a_2 \in [5, 25]$ ,  $a_3 \in [45, 20]$ ; в) перемещенное устойчивое при  $a_2 \in [10, 25]$ ,  $a_3 \in [70, 20]$

**Шаг 8.** Настройка семейства (1) посредством размещения поля  $F_d$  желаемым образом в плоскости корней и вычисления новых значений параметров семейства, которая может быть реализована:

- определением желаемых значений интервалов параметров  $a_3$  и  $a_2$  непосредственно в режиме диалога (для случая программной реализации рассматриваемого алгоритма) путем щелчков мышью в нужных точках на соответствующих линиях уровня (корневых траекториях) предварительно построенного исходного доминирующего поля корневых траекторий, что выполняется на основе выражений (2)–(5), (13);

- заданием желаемых значений интервалов параметров семейства (1) посредством ввода их в соответствующие поля на экране дисплея с последующим отображением соответствующих точек на линиях уровня доминирующего поля, что может быть выполнено на основе использования уравнений корневого годографа и параметра семейства (2)–(5).

*Шаг 9.* Построение нового доминирующего поля корневых траекторий семейства (1), размещенного желаемым образом в плоскости корней. Выполняется на основе предыдущего шага 8 аналогично описанному выше шагу 3.

*Шаг 10.* Выход алгоритма:

– графическое изображение доминирующего поля  $F_d$  корневых траекторий семейства, размещенное в левой полуплоскости корней в соответствии с желаемым расположением данного поля;

–  $a_j \in [\underline{a}_j, \bar{a}_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, 3$ , – вычисленные значения границ интервалов параметров характеристического полинома системы, обеспечивающие желаемое расположение доминирующего поля и асимптотическую устойчивость семейства.

Определять устойчивые и желаемые значения интервалов параметров  $a_3$  и  $a_2$  можно непосредственно в режиме диалога путем щелчков мышью в нужных точках на соответствующих линиях уровня (корневых траекториях) предварительно построенного доминирующего поля корневых траекторий. Параметр  $a_1$  также может настраиваться. При настройке параметра  $a_1$  в сторону увеличения в сравнении с его заданным минимальным значением для сохранения системой устойчивости перерасчета параметров  $a_2$  и  $a_3$  не потребуются, поскольку это не повлияет на робастную устойчивость системы. При уменьшении параметра  $a_1$  в сравнении с минимальным его значением может потребоваться перерасчет параметров  $a_2$  и  $a_3$  с целью обеспечения системой робастной устойчивости во всем диапазоне изменения параметров.

По расположению доминирующего поля  $F_d$  в плоскости корней могут выполняться (непосредственно с экрана дисплея или аналитически) проверка семейства полиномов (1) на устойчивость в графической или аналитической форме, а также синтез устойчивого полинома и полинома, обеспечивающего заданное качество системы (семейство корней которого расположено в плоскости корней определенным образом). Как анализ, так и синтез семейства могут выполняться и аналитически, и в графической форме непосредственно в режиме диалога на компьютере.

Метод отличается наглядностью и удобством в использовании. Это в определенной степени объясняется тем, что в данном случае рассматривается описание динамики системы семейством полиномов третьего порядка, для которого характерны специфические особенности конфигурации корневого портрета и характера пересечения границы устойчивости годографами портрета, позволяющие упростить процедуры анализа и синтеза.

Рассмотренный выше подход, основанный на выделении доминирующего поля корневых траекторий, может быть применен также для параметрического синтеза и исследования динамических систем более высоких порядков. С этой целью следует модифицировать приведенное выше утверждение 1 и условие устойчивости согласно особенностям конфигурации корневых портретов систем более высокого порядка и на этом основании получить функцию и уравнение для соответствующих полей, что позволит графически отобразить данные доминирующие поля и использовать их для дальнейшего исследования и расчета робастных параметров семейств.

**Примеры анализа и синтеза полиномиального семейства на основе графоаналитического метода.** Рассматривается характеристический полином

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = p(s) \quad (14)$$

при  $a_1 \in [10, 20]$ ,  $a_2 \in [5, 25]$ .

**Пример 1.**  $a_3 \in [18, 40]$

*Шаг 1.* Вход алгоритма: степень  $n = 3$  и векторы интервалов коэффициентов  $a_j$  семейства полиномов (1)  $\underline{v}: 1, 10, 5, 18$ ;  $\bar{v}: 1, 20, 25, 40$ .

*Шаг 2.* Формирование корневой полевой математической модели динамики системы и определение соответствующих выражений для вычисления значений параметров  $a_2$  и  $a_3$  на основе выражений (2)–(12):

– функции доминирующего поля  $F_d$  (11)

$$f_d(\sigma, \omega) = \omega^2 - 3\sigma^2 - 10\sigma; \quad (15)$$

– уравнения линий уровня поля  $F_d$  (12)

$$\omega^2 - 3\sigma^2 - 10\sigma = a_2; \quad (16)$$

– выражений (9) и (10)

$$s^3 + 10s^2 + 5s + a_3 = h_d(s); \quad (17)$$

$$s^3 + 10s^2 + 5s + 40 = p_d(s). \quad (18)$$

*Шаг 3.* Графическое построение доминирующего поля  $F_d$  корневых траекторий в виде линий уровня (корневых годографов) для заданного семейства (14) на основе выражений (15)–(18). Доминирующее поле для данного случая представлено на рис. 2, б. Поле  $F_d$  содержит линию уровня  $ab$ , принадлежащую доминирующему корневому годографу  $h_d$ , который проходит через нижнюю точку  $c_1$  области пересечений  $C$  (см. рис. 2, б).

*Шаг 4.* Выполнение анализа устойчивости семейства аналитически посредством проверки на устойчивость полинома (18), который является устойчивым, поскольку значения его корней следующие:  $-9,9$ ;  $-0,0485 + 2i$ ;  $-0,0485 - 2i$ .

Доминирующему полиному  $p_d(s)$  семейства (18) соответствует точка  $a$  поля на рис. 2, б.

В соответствии с неравенством (13)  $a_3(c_1) = 50$ ,  $a_3(a) = 40$ .

Проверка непосредственно по графику путем оценки расположения доминирующего поля  $abcd$  (рис. 2, б) относительно границы устойчивости показала, что доминирующее поле расположено полностью в левой полуплоскости корней  $s$ . Согласно приведенному выше условию устойчивости это свидетельствует об устойчивости исходного полиномиального семейства (14).

*Шаг 5.* Семейство устойчиво. В случае необходимости перемещения изначально устойчивого семейства в новую область левой полуплоскости корней выполняется переход к шагу 8 (см. шаг 8 в примере 2).

*Шаг 10.* Выход алгоритма. Значения границ интервалов параметров характеристического полинома системы, обеспечивающие ее устойчивость, остаются неизменными:  $\underline{a}_1 = 10$ ,  $\bar{a}_1 = 20$ ,  $\underline{a}_2 = 5$ ,  $\bar{a}_2 = 25$ ,  $\underline{a}_3 = 18$ ,  $\bar{a}_3 = 40$  (рис. 2, б).

Если проверка системы на устойчивость рассмотренным графоаналитическим методом дала отрицательный результат, когда доминирующее поле семейства полностью или частично располагается в правой полуплоскости  $s$ , следует выполнить синтез устойчивой системы посредством соответствующей настройки параметров  $a_2$  и  $a_3$ , а в случае необходимости – и параметра  $a_1$ . Этот случай рассмотрен в примере 2.

**Пример 2.**  $a_3 \in [130, 250]$

*Шаг 1.* Вход алгоритма: степень  $n = 3$  и векторы интервалов коэффициентов  $a_j$  семейства полиномов (1)  $\underline{v}: 1, 10, 5, 130$ ,  $\bar{v}: 1, 20, 25, 250$ .

*Шаг 2.* Формирование корневой полевой математической модели динамики системы и определение соответствующих выражений для вычисления значений параметров  $a_2$  и  $a_3$  выражениями (2)–(12):

– функция доминирующего поля  $F_d$  (11) и уравнение линий уровня поля  $F_d$  (12) определяются в данном случае согласно выражениям (15) и (16);

– доминирующий годограф  $h_d(s)$  определяется выражением (17), доминирующий полином – выражением

$$s^3 + 10s^2 + 5s + 250 = p_d(s). \quad (19)$$

*Шаг 3.* Графическое построение доминирующего поля корневых траекторий в виде линий уровня (корневых годографов) для заданного семейства (14) на основе выражений (15)–(17), (19). Доминирующее поле для данного случая изображено на рис. 3, а. Поле  $F_d$  содержит линию

уровня  $ab$ , принадлежащую доминирующему корневому годографу  $h_d$ , который проходит через нижнюю точку  $c_1$  области пересечений  $C$  (см. рис. 3, *a*).

*Шаг 4.* Выполнение анализа устойчивости семейства аналитически посредством проверки на устойчивость полинома  $p_d(s)$  (19), который является неустойчивым, поскольку значения его корней следующие:  $-11,47$ ;  $0,733 + 4,612i$ ;  $0,733 - 4,612i$ .

Доминирующему полиному  $p_d(s)$  семейства (19) соответствует точка  $a$  поля на рис. 3, *a*.

Значение  $a_3(c_1) = 100$ , значение  $a_3(a) = 250$ , что не соответствует неравенству (13).

Проверка непосредственно по графику путем оценки расположения доминирующего поля  $abcd$  (рис. 3, *a*) относительно границы устойчивости показала, что доминирующее поле расположено частично в правой полуплоскости корней. Это свидетельствует о неустойчивости исходного полиномиального семейства.

*Шаг 5.* Семейство неустойчиво, поэтому переход к шагу 6.

*Шаг 6.* Перемещение доминирующего поля в левую полуплоскость корней  $s$  посредством вычисления новых значений параметров  $a_2$  и  $a_3$  на основе условия (13). Для этого вначале определим в области пересечений  $C$  точку  $c_i$ , в которой будем вычислять  $a_3$ . Рассмотрим два варианта для точки  $c_i$ : точку  $c_1$  и точку  $c_2$  (см. рис. 3, *a*).

Для первого варианта точка  $c_1$  – нижняя граница области  $C = [c_1c_m]$ , которая соответствует значению  $a_2 = 5$  (см. рис. 3, *a*). Тогда по формуле (17) вычислим  $\min(a_3(c_i)) = \min(a_3(c_1)) = 50$ . Следовательно, согласно условиям (13) для размещения доминирующего поля должным образом необходимо выполнить неравенство  $0 < a_3 < 50$ . С учетом требований к обеспечению некоторого запаса устойчивости примем, например,  $\bar{a}_3 = 45$ ,  $\underline{a}_3 = 20$ . Доминирующее поле  $F_d$  переместилось в правую полуплоскость корней и стало устойчивым (см. рис. 3, *b*), его расположение теперь соответствует следующим значениям настраиваемых коэффициентов:

$$\underline{a}_2 = 5, \quad \bar{a}_2 = 25, \quad \underline{a}_3 = 20, \quad \bar{a}_3 = 45. \quad (20)$$

Рассмотрим второй вариант и рассчитаем другие значения параметров  $a_2$  и  $a_3$  таким образом, чтобы изменить и диапазон  $a_2$ , расширив при этом диапазон  $a_3$ . Возьмем точку  $c_2$  области  $C = [c_1c_m]$ , которая соответствует значению  $a_2 = 10$  (см. рис. 3, *a*). Применив формулу (17), вычислим  $\min(a_3(c_i)) = \min(a_3(c_2)) = 100$ . Следовательно, согласно (13) для размещения доминирующего поля должным образом необходимо выполнить неравенство  $0 < a_3 < 100$ . Тогда с учетом требований к обеспечению некоторого запаса устойчивости примем, например,  $\bar{a}_3 = 70$ ,  $\underline{a}_3 = 20$ . В результате получим новый, устойчивый вариант размещения доминирующего поля  $F_d$  (см. рис. 3, *b*), соответствующий следующим значениям настраиваемых коэффициентов:

$$\underline{a}_2 = 10, \quad \bar{a}_2 = 25, \quad \underline{a}_3 = 20, \quad \bar{a}_3 = 70. \quad (21)$$

Во втором варианте согласно значениям (21) интервал вариации параметра  $a_3$  значительно увеличился по сравнению с первым вариантом в соответствии со значениями (20), однако немного сузился интервал вариации параметра  $a_2$ . Настройка параметра  $a_1$  в сторону его увеличения в данном случае не приведет к потере системой робастной устойчивости.

*Шаг 7.* Переход к шагу 10.

*Шаг 8.* В случае необходимости перемещения изначально устойчивого семейства в новую область левой полуплоскости корней выполнение действий, которые основываются на тех же принципах, что и перемещение неустойчивого семейства в левую полуплоскость корней (см. шаги 1–6). В данном примере это не требуется.

*Шаг 9.* Построение на экране дисплея компьютера нового доминирующего поля корневых траекторий семейства (1), размещенного желаемым образом в плоскости корней. В рассматриваемом случае построение выполнено на шаге 6.

*Шаг 10.* Выход алгоритма:

– графические изображения двух вариантов доминирующего поля  $F_d$  корневых траекторий семейства, размещенных в левой полуплоскости корней в соответствии с желаемым пользователем расположением данного поля, показаны на рис. 3, б и в;

– значения границ интервалов параметров характеристического полинома системы, обеспечивающие показанное на рис. 3, б и в расположение доминирующего поля, имеют вид

$$\underline{a}_1 = 10, \overline{a}_1 = 20, \underline{a}_2 = 5, \overline{a}_2 = 25, \underline{a}_3 = 20, \overline{a}_3 = 45 \text{ (рис. 3, б);}$$

$$\underline{a}_1 = 10, \overline{a}_1 = 20, \underline{a}_2 = 10, \overline{a}_2 = 25, \underline{a}_3 = 20, \overline{a}_3 = 70 \text{ (рис. 3, в).}$$

**Заключение.** Разработан алгоритм для анализа и параметрического синтеза семейств характеристических полиномов динамических систем третьего порядка с интервальной неопределенностью, отличающийся возможностью выполнять анализ и параметрический синтез робастно устойчивых систем с возмущенными параметрами по их графическому корневому портрету (расположению доминирующего поля корневых траекторий в плоскости корней). Метод также может быть использован для ориентации семейства корней системы в плоскости корней определенным образом, что позволяет обеспечить желаемое робастное качество. Полученные в работе результаты наглядны и удобны в применении. Построенные корневые портреты дают полное представление о динамике систем при вариации всех параметров и о том, каким образом следует манипулировать коэффициентами характеристического полиномиального семейства с целью обеспечения его желаемых динамических свойств.

Описание системы полиномиальным семейством третьего порядка позволяет получить наиболее наглядный и простой вариант реализации рассмотренной методики, процедуры анализа и синтеза, расчета робастных параметров. Для распространения предложенного подхода на системы более высокого порядка следует модифицировать алгоритм согласно особенностям конфигурации корневых портретов данных систем и их динамики на границе устойчивости.

Разработанный алгоритм может быть успешно применен в составе САПР САУ на промышленных предприятиях и в проектных организациях при проведении процедур синтеза робастных систем управления различными техническими объектами, в том числе функционирующими в нестабильных условиях окружающей среды.

#### Список использованных источников

1. Dorf, R. Modern Control Systems / R. Dorf, R. Bishop. – N. Y. : Prentice Hall, 2011. – 1111 p.
2. Tempo, R. Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems with Applications / R. Tempo, C. Calafiori, F. Dabbene. – London : Springer-Verlag, 2013. – 357 p.
3. Kučera, V. Polynomial control: past, present, and future / V. Kučera // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. – 2007. – Vol. 17, no. 8. – P. 682–705.
4. Харитонов, В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений / В. Л. Харитонов // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. XIV, № 11. – С. 2086–2088.
5. Anderson, B. On robust hurwitz polynomials / B. Anderson // IEEE Trans. Automat. Control. – 1987. – Vol. 32, no. 10. – P. 909–913.
6. Поляк, Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М. : Наука, 2002. – 303 с.
7. Поляк, Б. Т. Управление линейными системами при внешних возмущениях / Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, П. С. Щербаков. – М. : Ленанд, 2014. – 560 с.
8. Римский, Г. В. Автоматизация исследований динамических систем / Г. В. Римский, В. В. Таборовец. – Минск : Наука и техника, 1978. – 336 с.
9. Несенчук, А. А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А. А. Несенчук. – Минск : ОИПИ НАН Беларуси, 2005. – 234 с.
10. Несенчук, А. А. Корневой метод синтеза устойчивых полиномов путем настройки всех коэффициентов / А. А. Несенчук // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 8. – С. 13–24.
11. Nesenчук, A. A. Investigation of behavior and synthesis of interval dynamic systems' characteristic polynomials based on the root locus portrait parameter function / A. A. Nesenчук // Proc. of the 60th American Control Conference (ACC 2018). – Milwaukee, USA, 2018. – P. 2041–2046.

12. Nesenчук, A. A. Investigation and synthesis of robust polynomials in uncertainty on the basis of the Root Locus Theory / A. A. Nesenчук // *Polynomials – Theory and Applications* / ed. by C. S. Ryoо. – London : Intechopen, 2019. – Ch. 6. – P. 109–130.

13. Определение вершинных полиномов для анализа степени робастной устойчивости интервальной системы / С. В. Гайворонский [и др.] // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2019. – Т. 20, № 5. – С. 266–273.

14. Nesenчук, A. A. Investigation and robust synthesis of polynomials under perturbations based on the root locus parameter distribution diagram / A. A. Nesenчук // *Штучний інтелект*. – 2019. – № 1. – С. 14–22.

---

## References

1. Dorf R., Bishop R. *Modern Control Systems*. New York, Prentice Hall, 2011, 1111 p.
2. Tempo R, Calafiori C., Dabbene F. *Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems with Applications*. London, Springer-Verlag, 2013, 357 p.
3. Kučera V. Polynomial control: past, present, and future. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, vol. 17, no. 8, pp. 682–705.
4. Kharitonov V. L. Ob asimptoticheskoj ustojchivosti polozhenija ravnovesija semejstva sistem linejnykh differentsyal'nykh uravnenij [About the asymptotic stability of equilibrium for the system of the linear differential equations family]. *Differentsyal'nyje uravnenija [Differential Equations]*, 1978, vol. XIV, no. 11, pp. 2086–2088 (in Russian).
5. Anderson B. On robust hurwitz polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, vol. 32, no. 10, pp. 909–913.
6. Polyak, B. T., Shcherbakov P. S. Robastnaja ustojchivost' i upravlenije. *Robust Stability and Control*. Moscow, Nauka, 2002, 303 p. (in Russian).
7. Polyak B. T., Khlebnikov M. V., Shcherbakov P. S. Upravlenije linejnymi sistemami pri vneshnich vozmushchenijach. *Linear Systems Control in Conditions of External Disturbances*. Moscow, Lenand, 2014, 560 p. (in Russian).
8. Rimsky G. V., Taborovets V. V. Avtomatizatsija issledovanij dinamicheskikh system. *Automation of the Dynamic Systems Investigations*. Minsk, Nauka i tehnika, 1978, 336 p. (in Russian).
9. Nesenчук A. A. Analiz i sintez robastnykh dinamicheskikh sistem na osnovie kornievogo podkhoda. *Analysis and Synthesis of Robust Dynamic Systems on the Basis of the Root Locus Approach*. Minsk, Ob"edinennyj institut problem informatiki Nacional'noj akademii nauk Belarusi, 2005, 234 p. (in Russian)
10. Nesenчук A. A. Kornevoj metod sinteza ustojchivykh polinomov putiom nastrojki vsekh koefficientov [Root locus method for the stable polynomials synthesis over setting up all coefficients]. *Avtomatika i telemekhanika [Automation and Remote Control]*, 2010, no. 8, pp. 13–24 (in Russian).
11. Nesenчук A. A. Investigation of behavior and synthesis of interval dynamic systems' characteristic polynomials based on the root locus portrait parameter function. *Proceedings of the 60th American Control Conference (ACC 2018)*. Milwaukee, USA, 2018, pp. 2041–2046.
12. Nesenчук A. A. Investigation and synthesis of robust polynomials in uncertainty on the basis of the Root Locus Theory. *Polynomials – Theory and Applications*. In C. S. Ryoо (ed.). London, Intechopen, 2019, ch. 6, pp. 109–130.
13. Gaivoronsky S. V., Ezangina T. A., Hozhaev I. V., Nesenчук A. A. Opredelenije vershinykh polynomov dla analiza stepeni robastnoj ustojchivosti interval'noj sistemy [Definition of the vertex polynomials for analysis of the interval system robust stability degree]. *Mechatronika, avtomatizatsiya, upravlenije [Mechatronics, Automation, Control]*, 2019, vol. 20, no. 5, pp. 266–273 (in Russian).
14. Nesenчук A. A. Investigation and robust synthesis of polynomials under perturbations based on the root locus parameter distribution diagram. *Shtuchnij intelekt [Artificial Intelligence]*, 2019, no. 1, pp. 14–22.

## Информация об авторе

Несенчук Алла Анатольевна, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
E-mail: anes@newman.bas-net.by

## Information about the author

Alla A. Nesenчук, Cand. Sci. (Eng.), Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: anes@newman.bas-net.by



ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)  
УДК 517.958:537.8

Поступила в редакцию 21.06.2019  
Received 21.06.2019

Принята к публикации 04.09.2019  
Accepted 04.09.2019

## Моделирование поверхностных электромагнитных волн с осевой симметрией на биизотропном однослойном плоском экране

**В. Т. Ерофеенко**

*Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики и информатики»,  
Минск, Беларусь  
E-mail: bsu\_erofeenko@tut.by*

**Аннотация.** Сформулирована однородная трехобластная краевая задача для плоского однослойного экрана из биизотропного материала. Рассчитаны монохроматические электромагнитные поля с осевой симметрией, распространяющиеся за экраном, перед экраном и в слое экрана. Используются классические граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих полей на плоскостях раздела сред. Для упрощения процедуры построения аналитических решений исходная задача преобразована в краевую задачу с двухсторонними граничными условиями, связывающими электромагнитные поля по обе стороны экрана. В результате поле в слое экрана исключено из рассмотрения. Разработана методика расчета поверхностных электромагнитных волн с осевой симметрией, распространяющихся с двух сторон экрана в радиальных направлениях слоя. В качестве биизотропного экрана рассмотрен экран из кирального метаматериала. Для кирального экрана получено дисперсионное уравнение второго порядка, позволившее вычислить частоты двух последовательностей поверхностных электромагнитных полей. Вычислены параметры кирального материала, для которого существуют незатухающие поверхностные волны. Поверхностные волны представлены в виде комбинации базисных цилиндрических  $TE$ - и  $TH$ -поляризованных электромагнитных полей. Возможны другие варианты поверхностных волн.

**Ключевые слова:** математические модели, уравнения Максвелла, двухсторонние граничные условия, краевая задача, задача экранирования, дисперсионное уравнение, поверхностные электромагнитные волны, биизотропный экран, киральный метаматериал, аналитическое моделирование

**Благодарность.** Работа выполнена в рамках задания 1.1.22 государственной программы научных исследований «Информатика, космос и безопасность» на 2019 – 2020 гг.

**Для цитирования.** Ерофеенко, В. Т. Моделирование поверхностных электромагнитных волн с осевой симметрией на биизотропном однослойном плоском экране / В. Т. Ерофеенко // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 63–76.

---

---

## Modeling of surface electromagnetic waves with axial symmetry on a bi-isotropic one-layer plane screen

**Viktor T. Erofeenko**

*Establishment of the BSU "Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics",  
Minsk, Belarus  
E-mail: bsu\_erofeenko@tut.by*

**Abstract.** A homogeneous three-domain boundary-value problem for a one-layer plane screen from a bi-isotropic material is formulated. Monochromatic electromagnetic fields with axial symmetry propagating behind the screen, in front of the screen and into the screen layer are calculated. Classical boundary conditions of the continuity of the tangential field components on the planes of media separation are used. To simplify the

procedure of constructing analytical solutions, the original problem is transformed into a boundary problem with two-sided boundary conditions connecting electromagnetic fields on both sides of the screen. As a result, the field in the screen layer is excluded from consideration. A method for calculating surface electromagnetic waves with axial symmetry, propagating from two sides of the screen in the radial directions of the layers, is developed. A screen from a chiral material is considered as a bi-isotropic screen. For chiral screen a second-order dispersion equation was obtained, which made it possible to calculate the frequencies of the two sequences of surface electromagnetic fields. The parameters of the chiral material for which non-attenuating surface waves exist are calculated. Surface waves are presented as a combination of basis cylindrical  $TE$ - and  $TH$ -polarized electromagnetic fields. Other variants of surface waves are possible.

**Keywords:** mathematical models, Maxwell equations, two-sided boundary conditions, boundary-value problem, screening problem, dispersion equation, surface electromagnetic waves, bi-isotropic screen, chiral metamaterial, analytical modeling

**Acknowledgements.** This work was carried out as part of assignment 1.1.22 of the state program of scientific research “Informatics, space and security” for 2016–2020.

**For citation.** Erofeenko V. T. Modeling of surface electromagnetic waves with axial symmetry on a bi-isotropic one-layer plane screen. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 63–76 (in Russian).

**Введение.** Теоретическое исследование композитных материалов является одним из приоритетных направлений фундаментальной науки. Разнообразие композитов велико в силу сложного структурного и химического состава материалов, определяющих их электродинамические свойства [1]. Из композитных материалов конструируют экраны, которые используются для защиты от внешних излучений. В последнее время большое внимание уделяется исследованию экранов из биизотропных материалов [2–7], а также изучению киральных материалов [2, с. 86; 8; 9].

В статье рассмотрен плоский биизотропный экран в случае, когда он не подвергается воздействию внешнего монохроматического электромагнитного поля. Возможен вариант, когда на поверхности и внутри экрана распределено заданное количество электромагнитной энергии. При этом электромагнитная энергия распространяется вдоль поверхности экрана, образуя поверхностные электромагнитные волны (собственные волны) [8]. В работе сформулирована краевая задача для определения поверхностных волн с классическими граничными условиями непрерывности тангенциальных составляющих электромагнитного поля на плоскостях раздела сред. Для аналитического решения задачи применен метод двухсторонних граничных условий на биизотропном экране, связывающих электромагнитные поля по обе стороны экрана [10]. Исследованы монохроматические поверхностные волны с осевой симметрией. Для построения аналитических формул для поверхностных волн одновременно с одной и другой сторон экрана материальные параметры биизотропного экрана выбраны специальным образом в соответствии с параметрами, заданными в работах [11, 12]. Такие параметры позволили получить простое дисперсионное уравнение для вычисления последовательности частот поверхностных волн. В результате построена последовательность поверхностных волн с осевой симметрией, характеризующая бесконечной последовательностью частот и порядком осевой симметрии  $m$ . Определены границы материальных параметров экрана, при которых существуют поверхностные волны.

**Постановка краевой задачи распространения поверхностных волн на биизотропном слое.** В пространстве  $R^3$  с декартовой системой координат  $Oxuz$  размещен плоский экран  $D(0 < z < \Delta)$ . Экран ограничен плоскостями  $\Gamma_1(z=0)$ ,  $\Gamma_2(z=\Delta)$ . Слой выполнен из биизотропного материала, характеризуемого материальными комплексными параметрами:  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_r \mu_0$ ,  $\varepsilon_r, \mu_r$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости;  $G = G_r/c$ ,  $Z = Z_r/c$ ;  $G_r, Z_r$  – относительные параметры биизотропности, в последующем рассматриваются действительные величины;  $\varepsilon_0, \mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные;  $c$  – скорость света в вакууме. В рассматриваемой структуре возбуждаются электромагнитные поля:  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  – поле в полупространстве  $D_1 (z < 0)$ , отраженное от экрана  $D$ ;  $\vec{E}, \vec{H}$  – поле в слое  $D$ ;

$\vec{E}_2, \vec{H}_2$  – поле в полупространстве  $D_2(z > \Delta)$ . Рассматривается временная зависимость полей вида  $\exp(-i\omega t)$ , где  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота,  $f$  – частота поля.

Сформулируем краевую задачу, моделирующую распространение поверхностных волн вдоль экрана  $D$ .

*Краевая задача 1.* Требуется определить поля  $\vec{E}_1, \vec{H}_1; \vec{E}_2, \vec{H}_2; \vec{E}, \vec{H}$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{E}_j = i\omega\mu_0 \vec{H}_j, \operatorname{rot} \vec{H}_j = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}_j \text{ в } D_j; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i\omega(\mu \vec{H} + Z\vec{E}), \operatorname{rot} \vec{H} = -i\omega(\varepsilon \vec{E} + G\vec{H}) \text{ в } D, \quad (2)$$

граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих полей на плоскостях  $\Gamma_1, \Gamma_2$

$$\left. (\vec{E}_{1\tau} - \vec{E}_\tau) \right|_{z=0} = 0, \left. (\vec{H}_{1\tau} - \vec{H}_\tau) \right|_{z=0} = 0, \left. (\vec{E}_{2\tau} - \vec{E}_\tau) \right|_{z=\Delta} = 0, \left. (\vec{H}_{2\tau} - \vec{H}_\tau) \right|_{z=\Delta} = 0 \quad (3)$$

и условиям излучения на бесконечности для полей  $\vec{E}_1, \vec{H}_1; \vec{E}_2, \vec{H}_2$ .

**Представление поверхностных волн через цилиндрические базисные поля.** Решение краевой задачи (1)–(3) представим через базисные цилиндрические электромагнитные поля с осевой симметрией вида  $\Phi_m = \exp(im\varphi)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , в цилиндрической системе координат  $O\rho z\varphi$  с временной зависимостью  $\exp(-i\omega t)$ ,  $\omega = 2\pi f$ .

Поверхностные волны [2, с. 130] определяются формулами

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= x_2(\lambda) \vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) + y_2(\lambda) \vec{M}_m^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0), \\ \vec{H}_2 &= h_0 x_2 \left( (\lambda) \vec{M}_m^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) + y_2(\lambda) \vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) \right), \quad z > \Delta; \\ \vec{E}_1 &= x_1(\lambda) \vec{M}_m^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) + y_1(\lambda) \vec{M}_m^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0), \\ \vec{H}_1 &= h_0 \left( x_1(\lambda) \vec{M}_m^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) + y_1(\lambda) \vec{M}_m^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) \right), \quad z < 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Волны внутри биизотропного слоя  $D$  выражаются через базисные поля [2, с. 139]

$$\begin{aligned} \vec{E} &= x(\lambda) \vec{K}_m^{(-1)} + y(\lambda) \vec{K}_m^{(+1)} + z(\lambda) \vec{K}_m^{(-2)} + t(\lambda) \vec{K}_m^{(+2)}, \\ \vec{H} &= x(\lambda) p_1 \vec{K}_m^{(-1)} + y(\lambda) p_1 \vec{K}_m^{(+1)} + z(\lambda) p_2 \vec{K}_m^{(-2)} + t(\lambda) p_2 \vec{K}_m^{(+2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\vec{K}_m^{(\pm j)} = \vec{K}_m^{(\pm j)}(\vec{\rho}; \lambda, k_j) = \vec{M}_m^{(\pm 2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_j) - q_j \vec{M}_m^{(\pm 1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_j), \quad j = 1, 2;$$

$$\vec{M}_m^{(\mp 1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_s) = \vec{V}_m^{(1)}(\lambda \rho) e^{\mp v_s(\lambda) z} \Phi_m, \quad s = 0, 1, 2,$$

$$\vec{M}_m^{(\mp 2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_s) = \frac{1}{k_s} \left( \mp v_s(\lambda) \vec{V}_m^{(2)}(\lambda \rho) + \lambda J_m(\lambda \rho) \vec{e}_z \right) e^{\mp v_s(\lambda) z} \Phi_m;$$

$$\vec{V}_m^{(1)}(\lambda \rho) = \frac{im}{\lambda \rho} J_m(\lambda \rho) \vec{e}_\rho - J'_m(\lambda \rho) \vec{e}_\varphi, \quad \vec{V}_m^{(2)}(\lambda \rho) = J'_m(\lambda \rho) \vec{e}_\rho + \frac{im}{\lambda \rho} J_m(\lambda \rho) \vec{e}_\varphi, \quad (6)$$

$$v_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg v_j < \frac{\pi}{2}, \quad \Phi_m = \exp(im\varphi), \quad m = 0, 1, 2, \dots;$$

$v_0(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$  при  $\lambda \geq k_0$ ,  $v_0(\lambda) = -i\sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$  при  $k_0 > \lambda$ ,  $0 \leq \lambda < \infty$ ;  $h_0 = \frac{1}{iZ_0}$ ,  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ ,  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$  – орты цилиндрической системы координат,  $J_m(\cdot)$  – функции Бесселя,  $J'_m(\cdot)$  – производная,  $\vec{\rho} = (\rho, z, \varphi)$ .

Поля  $\vec{E}_1, \vec{H}_1; \vec{E}_2, \vec{H}_2; \vec{E}, \vec{H}$  удовлетворяют условиям (1)–(3) краевой задачи 1. Условия излучения на бесконечности для полей  $\vec{E}_1, \vec{H}_1; \vec{E}_2, \vec{H}_2$  (4) выполнены, так как электромагнитная энергия поля  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  распространяется в отрицательном направлении оси  $Oz$ , а энергия поля  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  излучается в положительном направлении оси  $Oz$ .

**Краевая задача с двухсторонними граничными условиями для определения поверхностных волн.** Для аналитического построения поверхностных волн воспользуемся двухсторонними граничными условиями [10], эквивалентными граничным условиям (3). Применение двухсторонних граничных условий позволяет исключить из рассмотрения электромагнитное поле  $\vec{E}, \vec{H}$  (5) в слое  $D$ . Для определения амплитуд поверхностных волн (4) сформулируем специальную краевую задачу, эквивалентную исходной краевой задаче (1)–(3).

*Краевая задача 2.* Требуется определить цилиндрические поля  $\vec{E}_1, \vec{H}_1; \vec{E}_2, \vec{H}_2$  (4), которые удовлетворяют уравнениям

$$\text{rot } \vec{E}_j = i\omega\mu_0\vec{H}_j, \text{ rot } \vec{H}_j = -i\omega\epsilon_0\vec{E}_j \text{ в } D_j, \quad (7)$$

двухстороннему граничному условию [10]

$$\vec{U}_1|_{z=0} = \hat{C}(\lambda)\vec{U}_2|_{z=\Delta} \quad (8)$$

и условиям излучения в областях  $D_j$ .

Матрица в условии (8) определяется формулами

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix}, \vec{U}_j = \begin{pmatrix} E_{jV_1} \\ H_{jV_2} \\ E_{jV_2} \\ H_{jV_1} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2; \quad (9)$$

$$C_{11} = p(p_1C_2 - p_2C_1), C_{12} = p\left(q_1\frac{k_1}{v_1}S_1 - q_2\frac{k_2}{v_2}S_2\right),$$

$$C_{13} = p\left(q_2\frac{p_1k_2}{v_2}S_2 - q_1\frac{p_2k_1}{v_1}S_1\right), C_{14} = p(C_1 - C_2),$$

$$C_{21} = pp_1p_2\left(q_2\frac{v_2}{k_2}S_2 - q_1\frac{v_1}{k_1}S_1\right), C_{22} = p(p_1C_1 - p_2C_2),$$

$$C_{23} = pp_1p_2(C_2 - C_1), C_{24} = p\left(\frac{p_1v_1}{q_1k_1}S_1 - \frac{p_2v_2}{q_2k_2}S_2\right), \quad (10)$$

$$C_{31} = p\left(\frac{p_1v_2}{q_2k_2}S_2 - \frac{p_2v_1}{q_1k_1}S_1\right), C_{32} = p(C_1 - C_2),$$

$$C_{33} = p(p_1C_2 - p_2C_1), C_{34} = p\left(\frac{v_1}{q_1k_1}S_1 - \frac{v_2}{q_2k_2}S_2\right),$$

$$C_{41} = pp_1p_2(C_2 - C_1), C_{42} = p\left(q_1p_1\frac{k_1}{v_1}S_1 - q_2p_2\frac{k_2}{v_2}S_2\right),$$

$$\begin{aligned}
C_{43} &= p p_1 p_2 \left( q_2 \frac{k_2}{v_2} S_2 - q_1 \frac{k_1}{v_1} S_1 \right), \quad C_{44} = p(p_1 C_1 - p_2 C_2), \\
C_j &= \operatorname{ch}(\xi_j), \quad S_j = \operatorname{sh}(\xi_j), \quad \xi_j = v_j(\lambda) \Delta, \quad v_j(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg v_j < \frac{\pi}{2}; \\
k_j &= k_0 \bar{k}_j, \quad f_0 = k_0 \bar{f}_0, \quad f_j = k_0 \bar{f}_j, \quad g = k_0^2 \bar{g}, \quad g_j = k_0 \bar{g}_j, \quad a = k_0 \bar{a}, \quad b = k_0 \bar{b}, \\
p_j &= \frac{\bar{p}_j}{Z_0}, \quad q_j = \frac{\bar{g}}{k_j \bar{g}_j}, \quad v_j = k_0 \bar{v}_j, \quad p = \frac{1}{p_1 - p_2} = Z_0 \bar{p}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c},
\end{aligned} \tag{10}$$

где безразмерные величины задаются выражениями

$$\begin{aligned}
\bar{k}_j &= \sqrt{\bar{g} + \frac{1}{2} \bar{a}^2 + \bar{a} \bar{f}_j}, \quad \bar{f}_j = (-1)^j \bar{f}_0, \quad \bar{f}_0 = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r - \bar{b}^2}, \\
\bar{g} &= \varepsilon_r \mu_r - G_r Z_r, \quad \bar{g}_j = \bar{f}_j - \frac{1}{2} \bar{a}, \quad \bar{p}_j = \frac{1}{\mu_r} \left( \frac{i \bar{g}}{\bar{g}_j} - Z_r \right), \quad \bar{a} = i(G_r - Z_r), \\
\bar{b} &= \frac{1}{2}(G_r + Z_r), \quad \bar{v}_j = \sqrt{\lambda^2 - \bar{k}_j^2}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{k_0}, \quad \bar{p} = \frac{1}{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}. \blacksquare
\end{aligned} \tag{11}$$

**Аналитическое решение краевой задачи с двухсторонними граничными условиями.** Представим решение краевой задачи (7), (8) в виде аналитического разложения (4). Электромагнитные поля (4) автоматически удовлетворяют уравнениям (7). Рассмотрим граничное условие (8). Для формулировки двухстороннего граничного условия (8), связывающего поля  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  по обе стороны экрана, запишем касательные составляющие полей (4) на плоскостях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в базисе  $\vec{V}_m^{(1)}, \vec{V}_m^{(2)}$  (6):

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{1\tau}(\lambda) \Big|_{z=0} &= (E_{1V_1}(\lambda) \vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) + E_{1V_2}(\lambda) \vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho)) \Phi_m, \\
\vec{H}_{1\tau}(\lambda) \Big|_{z=0} &= (H_{1V_1}(\lambda) \vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) + H_{1V_2}(\lambda) \vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho)) \Phi_m, \\
\vec{E}_{2\tau}(\lambda) \Big|_{z=\Delta} &= (E_{2V_1}(\lambda) \vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) + E_{2V_2}(\lambda) \vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho)) \Phi_m, \\
\vec{H}_{2\tau}(\lambda) \Big|_{z=\Delta} &= (H_{2V_1}(\lambda) \vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) + H_{2V_2}(\lambda) \vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho)) \Phi_m,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
E_{1V_1} &= x_1(\lambda), \quad E_{1V_2} = \bar{v}_0(\lambda) y_1(\lambda), \\
H_{1V_1} &= h_0 y_1(\lambda), \quad H_{1V_2} = h_0 \bar{v}_0(\lambda) x_1(\lambda), \\
E_{2V_1} &= x_2(\lambda) F(\lambda), \quad E_{2V_2} = -\bar{v}_0(\lambda) y_2(\lambda) F(\lambda), \\
H_{2V_1} &= h_0 y_2(\lambda) F(\lambda), \quad H_{2V_2} = -h_0 \bar{v}_0(\lambda) x_2(\lambda) F(\lambda), \\
F(\lambda) &= e^{-v_0(\lambda) \Delta}, \quad \bar{v}_0(\lambda) = \frac{v_0(\lambda)}{k_0}.
\end{aligned}$$

Учитывая вышестоящие формулы, представим векторы  $\vec{U}_j$  (9) в виде

$$\vec{U}_1 = \begin{pmatrix} E_{1V_1} \\ H_{1V_2} \\ E_{1V_2} \\ H_{1V_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(\lambda) \\ h_0 \bar{v}_0(\lambda) x_1(\lambda) \\ \bar{v}_0(\lambda) y_1(\lambda) \\ h_0 y_1(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \vec{U}_2 = \begin{pmatrix} E_{2V_1} \\ H_{2V_2} \\ E_{2V_2} \\ H_{2V_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(\lambda) F(\lambda) \\ -h_0 \bar{v}_0(\lambda) x_2(\lambda) F(\lambda) \\ -\bar{v}_0(\lambda) y_2(\lambda) F(\lambda) \\ h_0 y_2(\lambda) F(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Далее запишем матричное граничное условие (8) в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{2V_1} \\ H_{2V_2} \\ E_{2V_2} \\ H_{2V_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1V_1} \\ H_{1V_2} \\ E_{1V_2} \\ H_{1V_1} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Подставляя векторы  $\vec{U}_j$  в (12), получим систему алгебраических уравнений для определения амплитуд  $x_j(\lambda)$   $y_j(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} (C_{11} - h_0 \bar{v}_0 C_{12})x_2 + (h_0 C_{14} - \bar{v}_0 C_{13})y_2 &= x_1 / F, \\ (C_{21} - h_0 \bar{v}_0 C_{22})x_2 + (h_0 C_{24} - \bar{v}_0 C_{23})y_2 &= h_0 \bar{v}_0 x_1 / F, \\ (C_{31} - h_0 \bar{v}_0 C_{32})x_2 + (h_0 C_{34} - \bar{v}_0 C_{33})y_2 &= \bar{v}_0 y_1 / F, \\ (C_{41} - h_0 \bar{v}_0 C_{42})x_2 + (h_0 C_{44} - \bar{v}_0 C_{43})y_2 &= h_0 y_1 / F. \end{aligned} \quad (13)$$

Из уравнений (13) исключим величины  $x_1$ ,  $y_1$  и получим однородную систему алгебраических уравнений для определения амплитуд  $x_2$ ,  $y_2$ :

$$Q_{11}x_2 + Q_{12}y_2 = 0, \quad Q_{21}x_2 + Q_{22}y_2 = 0. \quad (14)$$

Однородная система (14) разрешима, когда определитель системы

$$d = Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21} = 0, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11} - h_0 \bar{v}_0 C_{12} - \frac{1}{h_0 \bar{v}_0} C_{21} + C_{22}, \\ Q_{12} &= -\bar{v}_0 C_{13} + h_0 C_{14} + \frac{1}{h_0} C_{23} - \frac{1}{\bar{v}_0} C_{24}, \\ Q_{21} &= -\frac{1}{\bar{v}_0} C_{31} + h_0 C_{32} + \frac{1}{h_0} C_{41} - \bar{v}_0 C_{42}, \\ Q_{22} &= C_{33} - \frac{h_0}{\bar{v}_0} C_{34} - \frac{\bar{v}_0}{h_0} C_{43} + C_{44}, \\ \bar{v}_0 &= \frac{v_0}{k_0}. \end{aligned} \quad (16)$$

Если определитель  $d = 0$ , то система (14) разрешима:

$$x_2 = E_0 Q_{12}, \quad y_2 = -E_0 Q_{11}, \quad (17)$$

где  $E_0$  – произвольная величина с физической размерностью  $[E_0] = \text{В} / \text{м}$ .

Амплитуды  $x_1$ ,  $y_1$  определим из первого и четвертого уравнений (13):

$$\begin{aligned} x_1 &= E_0 F [Q_{12} (C_{11} - h_0 \bar{v}_0 C_{12}) - Q_{11} (h_0 C_{14} - \bar{v}_0 C_{13})], \\ y_1 &= E_0 \frac{F}{h_0} [Q_{12} (C_{41} - h_0 \bar{v}_0 C_{42}) - Q_{11} (h_0 C_{44} - \bar{v}_0 C_{43})]. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, амплитуды (17), (18) поверхностных волн (4) определены.

**Задача для вычисления последовательности частот поверхностных волн.** Возникает проблема наложения условий на параметры задачи, при которых выполнено уравнение (15). Величины  $Q_{sj}$  уравнения (15) содержат четыре материальных параметра  $\varepsilon_r, \mu_r, G_r, Z_r$ , в общем случае комплексных, и три действительных параметра  $\lambda, \Delta, \omega$ . Сформулируем задачу для определения частоты  $\omega$  поверхностных волн (4).

*Спектральная задача.* При заданных материальных параметрах  $\varepsilon_r, \mu_r, G_r, Z_r$ , при заданной толщине  $\Delta$  слоя  $D$  и заданном параметре  $\lambda (\lambda > 0)$  полей (4) требуется определить частоту  $\omega (\omega > 0)$ , для которой выполнено уравнение (15). Порядок  $m$  полей (4) считается произвольным заданным целым числом.

Для упрощения решения спектральной задачи введем ограничения на материальные параметры. Будем считать, что  $\varepsilon_r, \mu_r, G_r, Z_r$  – действительные числа и выполнено условие

$$Z_r = G_r = \chi. \quad (19)$$

Заметим, что при условии (19) для параметров биизотропности экран обладает свойствами для электромагнитных полей перед экраном и за экраном, описанными в статьях [11, 12].

Тогда величины (11) примут вид

$$\begin{aligned} \bar{a} &= 0, \bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \sqrt{\bar{g}} = \bar{k}, 0 \leq \arg \bar{k} < \pi, \bar{g} = \varepsilon_r \mu_r - \chi^2, \\ \bar{g} &= \bar{k}^2, \bar{f}_0 = \bar{k}, \bar{f}_1 = -\bar{k}, \bar{f}_2 = \bar{k}, \bar{g}_1 = -\bar{k}, \bar{g}_2 = \bar{k}, \\ q_1 &= -1, q_2 = 1, \bar{p}_1 = -\frac{1}{\mu_r} (i\bar{k} + \chi), \bar{p}_2 = \frac{1}{\mu_r} (i\bar{k} - \chi), \\ \bar{v}_1 &= \bar{v}_2 = \sqrt{\lambda^2 - \bar{k}^2} = \bar{v}, -\frac{\pi}{2} \leq \arg \bar{v} < \frac{\pi}{2}, \\ \bar{p} &= \frac{i\mu_r}{2\bar{k}}, \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = -\frac{2\chi}{\mu_r}, \bar{p}\bar{p}_1\bar{p}_2 = \frac{i\varepsilon_r}{2\bar{k}}, \\ C_1 &= C_2 = C = \text{ch}(k_0 \bar{v} \Delta), S_1 = S_2 = S = \text{sh}(k_0 \bar{v} \Delta). \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя (20) в (10), вычислим матричные элементы

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = C_{33} = C_{44} = C, C_{14} = C_{23} = C_{32} = C_{41} = 0, \\ C_{12} &= -\frac{\mu_r}{h_0 \bar{v}} S, C_{13} = -\frac{i\chi}{\bar{v}} S, C_{21} = -\frac{h_0 \varepsilon_r \bar{v}}{\bar{g}} S, \\ C_{24} &= \frac{i\chi \bar{v}}{\bar{g}} S, C_{31} = -\frac{i\chi \bar{v}}{\bar{g}} S, C_{34} = -\frac{\mu_r \bar{v}}{h_0 \bar{g}} S, \\ C_{42} &= \frac{i\chi}{\bar{v}} S, C_{43} = -\frac{h_0 \varepsilon_r}{\bar{v}} S. \end{aligned} \quad (21)$$

Учитывая (21), вычислим матричные элементы (16):

$$\begin{aligned} Q_{11} &= 2(C + B_1 S), Q_{22} = 2(C + B_2 S), \\ Q_{12} &= \frac{2ic_0}{a_0} S, Q_{21} = -\frac{2ic_0}{a_0} S, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$B_j = \frac{b_j}{a_0}, a_0 = 2\bar{g}\bar{v}_0\bar{v}, b_1 = \bar{g}\mu_r\bar{v}_0^2 + \varepsilon_r\bar{v}^2, b_2 = \bar{g}\varepsilon_r\bar{v}_0^2 + \mu_r\bar{v}^2, c_0 = \chi(\bar{g}\bar{v}_0^2 - \bar{v}^2).$$

После подстановки формул (22) в (15) приходим к уравнению

$$a_0^2 C^2 + a_0(b_1 + b_2)CS + (b_1 b_2 - c_0^2)S^2 = 0. \quad (23)$$

Сузим область параметров, вводя дополнительные ограничения с помощью неравенств

$$\bar{g} > 1, 1 < \bar{\lambda}^2 < \bar{g}. \quad (24)$$

Из условий (24) следуют неравенства и формулы для величины  $w$ :

$$\begin{aligned} \bar{v} &= -i\sqrt{\bar{g} - \bar{\lambda}^2} = -iw, w = \sqrt{\bar{g} - \bar{\lambda}^2} > 0, \bar{\lambda}^2 = \bar{g} - w^2, \\ \bar{v}_0 &= \sqrt{\bar{g} - w^2 - 1}, \bar{g} - w^2 - 1 > 0, \bar{v}^2 = -w^2, \bar{v}_0^2 = \bar{g} - w^2 - 1, \\ a_0 &= -2i\bar{g}\bar{v}_0 w = -i\bar{a}_0, \bar{a}_0 = 2\bar{g}w\sqrt{\bar{g} - w^2 - 1}, \\ b_1 &= \bar{g}(\bar{g} - 1)\mu_r - (\bar{g}\mu_r + \varepsilon_r)w^2, b_2 = \bar{g}(\bar{g} - 1)\varepsilon_r - (\bar{g}\varepsilon_r + \mu_r)w^2, \\ c_0 &= \chi(\bar{g} - 1)(\bar{g} - w^2), C = \text{ch}(-ik_0 w \Delta) = \cos(k_0 w \Delta), \\ S &= \text{sh}(-ik_0 w \Delta) = -i \sin(k_0 w \Delta). \end{aligned} \quad (25)$$

Из неравенств (24), (25) следует выражение

$$0 < w^2 < \bar{g} - 1. \quad (26)$$

Подставляя величины (25) в равенство (23), получим дисперсионное уравнение для определения частоты  $\omega$ :

$$(b_1 b_2 - c_0^2) \text{tg}^2(k_0 w \Delta) + \bar{a}_0(b_1 + b_2) \text{tg}(k_0 w \Delta) + \bar{a}_0^2 = 0. \quad (27)$$

Уравнение (27) представляет собой квадратное уравнение

$$(b_1 b_2 - c_0^2) Y^2 + (b_1 + b_2) Y + 1 = 0, \quad Y = \frac{1}{a_0} \text{tg}(k_0 w \Delta),$$

с действительными корнями

$$Y_{1,2} = \left[ -(b_1 + b_2) \pm \sqrt{(b_1 - b_2)^2 + 4c_0^2} \right] / 2(b_1 b_2 - c_0^2).$$

В результате уравнение (27) сведено к решению тригонометрических уравнений

$$\text{tg}\left(\frac{\omega w \Delta}{c}\right) = \bar{a}_0 Y_1, \quad \text{tg}\left(\frac{\omega w \Delta}{c}\right) = \bar{a}_0 Y_2. \quad (28)$$

Решая уравнения (28), построим две последовательности спектральных значений частоты:

$$\omega = \omega_n^{(j)} = \frac{c}{w \Delta} \left( \text{arctg}(\bar{a}_0 Y_j) + \pi n \right), \quad j = 1, 2, \quad (29)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  для положительных  $Y_j$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  для отрицательных  $Y_j$ .

**Плазмоны в виде цилиндрических поверхностных волн.** Аналитическое решение дисперсионного уравнения (27) позволило определить спектральные частоты (29), для которых



существуют поверхностные волны (4). Введем обозначения цилиндрических полей (4), соответствующих частотам (29):

$$\vec{E}_{1mn}^{(j)}(\vec{\rho}, w) = E_0 \left( x_{1n}^{(j)}(w) \vec{M}_m^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(j)}, k_n^{(j)}) + y_{1n}^{(j)}(w) \vec{M}_m^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(j)}, k_n^{(j)}) \right), \quad (30)$$

$$\vec{H}_{1mn}^{(j)}(\vec{\rho}, w) = E_0 h_0 \left( x_{1n}^{(j)}(w) \vec{M}_m^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(j)}, k_n^{(j)}) + y_{1n}^{(j)}(w) \vec{M}_m^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(j)}, k_n^{(j)}) \right), z < 0;$$

$$\vec{E}_{2mn}^{(j)}(\vec{\rho}, w) = E_0 \left( x_{2n}^{(j)}(w) \vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(j)}, k_n^{(j)}) + y_{2n}^{(j)}(w) \vec{M}_m^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(j)}, k_n^{(j)}) \right), \quad (31)$$

$$\vec{H}_{2mn}^{(j)}(\vec{\rho}, w) = E_0 h_0 \left( x_{2n}^{(j)}(w) \vec{M}_m^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(j)}, k_n^{(j)}) + y_{2n}^{(j)}(w) \vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(j)}, k_n^{(j)}) \right), z > \Delta,$$

где  $j = 1, 2$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$  или  $n = 1, 2, \dots$ ;  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

$$\vec{M}_m^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(j)}, k_n^{(j)}) = \vec{V}_m^{(1)}(\lambda_n^{(j)} \rho) \exp(\mp k_n^{(j)} \bar{v}_0 z) \Phi_m, \quad (32)$$

$$\vec{M}_m^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(j)}, k_n^{(j)}) = \left( \mp \bar{v}_0 \vec{V}_m^{(2)}(\lambda_n^{(j)} \rho) + \bar{\lambda} J_m(\lambda_n^{(j)} \rho) \vec{e}_z \right) \exp(\mp k_n^{(j)} \bar{v}_0 z) \Phi_m,$$

$$\bar{v}_0 = \sqrt{\bar{g} - w^2 - 1}, \quad \bar{\lambda} = \sqrt{\bar{g} - w^2}, \quad 0 < w < \sqrt{\bar{g} - 1},$$

$$k_n^{(j)} = \omega_n^{(j)} / c, \quad \lambda_n^{(j)} = k_n^{(j)} \sqrt{\bar{g} - w^2}, \quad h_0 = \frac{1}{iZ_0}, \quad Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}.$$

Используя соотношения (21), (22), (25), определим амплитуды (17), (18) полей (30), (31) для различных частот:

$$x_{2n}^{(j)}(w) = Q_{12}^{(j)}(n, w), \quad y_{2n}^{(j)}(w) = -Q_{11}^{(j)}(n, w), \quad (33)$$

где

$$Q_{12}^{(j)}(n, w) = \frac{i c_0}{\bar{g} w \bar{v}_0} \sin(K_n^{(j)}), \quad Q_{11}^{(j)}(n, w) = 2 \cos(K_n^{(j)}) + \bar{B}_1 \sin(K_n^{(j)}),$$

$$\bar{B}_1 = (\bar{g}(\bar{g} - 1)\mu_r - (\bar{g}\mu_r + \varepsilon_r)w^2) / \bar{g} w \bar{v}_0, \quad K_n^{(j)} = k_n^{(j)} w \Delta;$$

$$\begin{aligned} x_{1n}^{(j)}(w) &= -F_n^{(j)}(w) \left[ i \frac{\bar{v}_0 \chi}{w} \sin(K_n^{(j)}) Q_{11}^{(j)}(n, w) - Q_{12}^{(j)}(n, w) \left( \cos(K_n^{(j)}) + \frac{\bar{v}_0 \mu_r}{w} \sin(K_n^{(j)}) \right) \right], \\ y_{1n}^{(j)}(w) &= -F_n^{(j)}(w) \left[ i \frac{\bar{v}_0 \chi}{w} \sin(K_n^{(j)}) Q_{12}^{(j)}(n, w) + Q_{11}^{(j)}(n, w) \left( \cos(K_n^{(j)}) + \frac{\bar{v}_0 \varepsilon_r}{w} \sin(K_n^{(j)}) \right) \right], \\ F_n^{(j)}(w) &= \exp(-k_n^{(j)} \bar{v}_0 \Delta). \end{aligned} \quad (34)$$

Заметим, что на материальные параметры экрана накладываются условия, при которых величины под знаками квадратного корня в формулах являются положительными.

**Алгоритм расчета плазмонов.** Алгоритм вычисления спектральных полей состоит из следующих шагов:

1. Ввод исходных данных:

$\varepsilon_r$  – заданная относительная диэлектрическая проницаемость экрана, действительная величина в пределах  $0 < \varepsilon_r < \infty$ ;

$\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость экрана, действительная величина в пределах  $0 < \mu_r < \infty$ ,  $\varepsilon_r \mu_r > 1$ ;

$\psi$  – заданная действительная величина в пределах  $\psi_0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ ,  $\psi_0 = \arctg\left(1/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r-1}\right)$ ;

$\alpha$  – заданная действительная величина в пределах  $0 < \alpha < 1$ ;

$G_r, Z_r$  – относительные параметры биезотропности экрана, действительные величины, усло-

вия задания величин:  $G_r = Z_r = \chi$ ,  $\chi = \left(\frac{\varepsilon_r\mu_r}{1+\operatorname{tg}^2(\psi)}\right)^{\frac{1}{2}}$ ;

$\Delta$  – толщина экрана (плоского слоя);

$w$  – спектральный параметр непрерывного спектра, условия задания величины:  $0 < w < \sqrt{\bar{g}-1}$ ;

$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – электрическая и магнитная постоянные;

$c = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме.

2. Вычисление вспомогательных величин:

$$\bar{g} = \varepsilon_r\mu_r - \chi^2,$$

$w = \alpha\sqrt{\bar{g}-1}$  – спектральный параметр непрерывного спектра,

$$v = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}, \quad \bar{\lambda} = \sqrt{\bar{g}-w^2}, \quad \bar{v}_0 = \sqrt{\bar{g}-w^2-1}, \quad b_1 = \bar{g}(\bar{g}-1)\mu_r - (\bar{g}\mu_r + \varepsilon_r)w^2, \quad (35)$$

$$b_2 = \bar{g}(\bar{g}-1)\varepsilon_r - (\bar{g}\varepsilon_r + \mu_r)w^2, \quad c_0 = \chi(\bar{g}-1)(\bar{g}-w^2), \quad B_j = \frac{b_j}{a_0}, \quad \bar{a}_0 = 2\bar{g}w\bar{v}_0;$$

$$Y_1 = \left[ -(b_1 + b_2) + \sqrt{(b_1 - b_2)^2 + 4c_0^2} \right] / 2(b_1b_2 - c_0^2), \quad (36)$$

$$Y_2 = \left[ -(b_1 + b_2) - \sqrt{(b_1 - b_2)^2 + 4c_0^2} \right] / 2(b_1b_2 - c_0^2).$$

3. Вычисление спектральных дискретных значений частоты и спектральных величин:

$\omega_n^{(1)}(w), \omega_n^{(2)}(w)$  – две последовательности значений частоты;

$$\omega_n^{(1)}(w) = \frac{c}{w\Delta} \left( \arctg(\bar{a}_0 Y_1) + \pi n \right), \quad (37)$$

где  $n=0, 1, 2, \dots$ , если  $Y_1 > 0$ , и  $n=1, 2, \dots$ , если  $Y_1 \leq 0$ ;

$$\omega_n^{(2)}(w) = \frac{c}{w\Delta} \left( \arctg(\bar{a}_0 Y_2) + \pi n \right), \quad (38)$$

где  $n=0, 1, 2, \dots$ , если  $Y_2 > 0$ , и  $n=1, 2, \dots$ , если  $Y_2 \leq 0$ ;

$$k_n^{(j)} = \omega_n^{(j)}(w)/c, \quad \lambda_n^{(j)} = k_n^{(j)}\bar{\lambda}, \quad j=1, 2; \quad (39)$$

$$K_n^{(j)} = k_n^{(j)}w\Delta, \quad F_n^{(j)} = \exp(-k_n^{(j)}\bar{v}_0\Delta).$$

4. Расчет дискретных последовательностей электромагнитных полей (плазмонов), распространяющихся вдоль поверхности экрана:

$\vec{\rho} = (\rho, z, \varphi)$  – цилиндрические координаты точки, в которой рассчитываются поля;

$\bar{E}_{1mn}^{(j)}(\bar{\rho}, w), \bar{H}_{1mn}^{(j)}(\bar{\rho}, w)$  – поля перед экраном ( $z < 0$ );

$\bar{E}_{2mn}^{(j)}(\bar{\rho}, w), \bar{H}_{2mn}^{(j)}(\bar{\rho}, w)$  – поля за экраном ( $z > \Delta$ );

$m$  – целое число, характеризующее зависимость поля от азимутального угла  $\varphi$  на поверхности экрана.

Поля рассчитываются по формулам (30), (31) с использованием (32), амплитуды полей рассчитываются с помощью формул (33), (34).

Для оценки диапазона частот, на которых происходит возбуждение поверхностных волн, рассмотрим следующий вариант параметров:

– параметры экрана  $\varepsilon_r = 5$ ,  $\mu_r = 2$ ,  $G_r = Z_r = \sqrt{5}$ ,  $\Delta = 10^{-3}$  м;

– параметры спектрального многообразия  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\psi = \frac{\pi}{4}$ ,  $w = 1$ ;

– первые три частоты последовательности частот (37)  $\omega_1^{(1)}(1) = 8,859 \cdot 10^{11}$  Гц ( $Y_1 = -0,011$ ,  $n = 1$ ),  $\omega_2^{(1)}(1) = 1,828 \cdot 10^{12}$  Гц ( $Y_1 = -0,011$ ,  $n = 2$ ),  $\omega_3^{(1)}(1) = 2,771 \cdot 10^{12}$  Гц ( $Y_1 = -0,011$ ,  $n = 3$ ) и т. д. определяют диапазоны частот для указанных значений материальных параметров биизотропного экрана.

**Частный случай расчетной структуры.** Рассмотрим случай со специальными значениями материальных параметров экрана, для которых значительно упрощаются итоговые формулы. Преобразуем величины (35), входящие в (36), к виду

$$b_1 + b_2 = (\mu_r + \varepsilon_r)(\bar{g}(\bar{g} - 1) - (\bar{g} + 1)w^2),$$

$$b_1 - b_2 = (\mu_r - \varepsilon_r)(\bar{g} - 1)(\bar{g} - w^2).$$

Выберем параметры структуры специальным образом. Полагая

$$\varepsilon_r = \mu_r = \nu > 0, \chi > 0, w^2 = \frac{\bar{g}(\bar{g} - 1)}{\bar{g} + 1}, \quad (40)$$

удовлетворим условию (26). Тогда  $b_1 + b_2 = 0$ ,  $b_1 - b_2 = 0$ , откуда следует  $b_1 = b_2 = 0$ ,  $\bar{\nu}_0 = w/\sqrt{\bar{g}}$ ,

$$c_0 = 2\chi w^2, \bar{a}_0 = 2\sqrt{\bar{g}}w^2, \bar{\lambda} = \sqrt{\frac{2\bar{g}}{\bar{g} + 1}}, B_j = 0, \bar{g} = \nu^2 - \chi^2.$$

Формулы (36) примут вид

$$Y_1 = -\frac{1}{c_0} < 0, \quad Y_2 = \frac{1}{c_0} > 0.$$

Величины  $\bar{a}_0 Y_1 = -\sqrt{\bar{g}}/\chi$ ,  $\bar{a}_0 Y_2 = \sqrt{\bar{g}}/\chi$  представим через угол  $\psi$ , полагая

$$\frac{\sqrt{\bar{g}}}{\chi} = \operatorname{tg} \psi, \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2}. \quad (41)$$

В результате формулы (37), (38) для частот упрощаются:

$$\omega_n^{(1)} = \frac{c}{w\Delta}(-\psi + \pi n), \quad n = 1, 2, \dots; \quad \omega_l^{(2)} = \frac{c}{w\Delta}(\psi + \pi l), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

Из равенства (41) следует

$$\chi = \nu \cos \psi, \quad \bar{g} = \nu^2 \sin^2 \psi. \quad (43)$$

Удовлетворяя первому неравенству (24), получим условие на материальный параметр  $\nu$ :

$$\nu > \frac{1}{\sin \psi}, \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2}. \quad (44)$$

Показано, что при задании угла  $\psi$  материальный параметр  $\nu$  необходимо выбрать согласно условию (44). С учетом значений (40), (42), (43) величины (39) примут значения

$$\begin{aligned} k_n^{(1)} &= (-\psi + \pi n)/w\Delta, \quad k_l^{(2)} = (\psi + \pi l)/w\Delta, \\ \lambda_n^{(1)} &= \frac{\sqrt{2}(-\psi + \pi n)}{\Delta\sqrt{\nu^2 \sin^2 \psi - 1}}, \quad \lambda_l^{(2)} = \frac{\sqrt{2}(\psi + \pi l)}{\Delta\sqrt{\nu^2 \sin^2 \psi - 1}}, \\ K_n^{(1)} &= -\psi + \pi n, \quad K_l^{(2)} = \psi + \pi l, \\ F_n^{(1)} &= \exp\left(\frac{\psi - \pi n}{\nu \sin \psi}\right), \quad F_l^{(2)} = \exp\left(-\frac{\psi + \pi l}{\nu \sin \psi}\right). \end{aligned}$$

Вычислим поля (30), (31), нормируя их на величину  $2\cos\psi$ . Получим последовательности плазмонов.

Первая последовательность определяется формулами

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1mn}^{(1)} &= E_0 F_n^{(1)}(w) \left( i\vec{M}_m^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(1)}, k_n^{(1)}) + \vec{M}_m^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(1)}, k_n^{(1)}) \right), \quad z < 0, \\ \vec{H}_{1mn}^{(1)} &= E_0 h_0 F_n^{(1)}(w) \left( i\vec{M}_m^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(1)}, k_n^{(1)}) + \vec{M}_m^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(1)}, k_n^{(1)}) \right), \quad n = 1, 2, \dots; \\ \vec{E}_{2mn}^{(1)} &= E_0 (-1)^{n+1} \left( i\vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(1)}, k_n^{(1)}) + \vec{M}_m^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(1)}, k_n^{(1)}) \right), \quad z > \Delta, \\ \vec{H}_{2mn}^{(1)} &= E_0 h_0 (-1)^{n+1} \left( i\vec{M}_m^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(1)}, k_n^{(1)}) + \vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda_n^{(1)}, k_n^{(1)}) \right), \end{aligned}$$

вторая последовательность – формулами

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1ml}^{(2)} &= E_0 F_l^{(2)}(w) \left( i\vec{M}_m^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda_l^{(2)}, k_l^{(2)}) - \vec{M}_m^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda_l^{(2)}, k_l^{(2)}) \right), \quad z < 0, \\ \vec{H}_{1ml}^{(2)} &= E_0 h_0 F_l^{(2)}(w) \left( i\vec{M}_m^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda_l^{(2)}, k_l^{(2)}) - \vec{M}_m^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda_l^{(2)}, k_l^{(2)}) \right), \quad l = 0, 1, 2, \dots; \\ \vec{E}_{2ml}^{(2)} &= E_0 (-1)^l \left( i\vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda_l^{(2)}, k_l^{(2)}) - \vec{M}_m^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda_l^{(2)}, k_l^{(2)}) \right), \quad z > \Delta, \\ \vec{H}_{2ml}^{(2)} &= E_0 h_0 (-1)^l \left( i\vec{M}_m^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda_l^{(2)}, k_l^{(2)}) - \vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda_l^{(2)}, k_l^{(2)}) \right). \end{aligned}$$

Заметим, что возможны иные варианты построения плазмонов для других специальных значений материальных параметров экрана.

**Заключение.** Разработана методика построения поверхностных монохроматических электромагнитных волн на однослойном экране с использованием двухсторонних граничных условий. Рассмотрен плоский экран, выполненный из биизотропного материала с относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$  и параметрами биизотропности  $G_r$ ,  $Z_r$ . Исследовано электромагнитное поле с осевой симметрией, распространяющееся вдоль поверхности экрана на частоте  $\omega$ . В работе решена задача по определению материальных параметров экрана и частоты поля, для которых существуют поверхностные волны, одновременно распространяю-

щиеся перед экраном и за ним. Рассмотрен простейший случай, когда  $G_r = Z_r = \chi$ , а  $\varepsilon_r, \mu_r$  – произвольные величины в пределах  $0 < \varepsilon_r, \mu_r < \infty, \varepsilon_r \mu_r > 1$ . Получена формула  $\chi = \chi(\alpha, \psi; \varepsilon_r, \mu_r)$  для определения параметра киральности  $\chi$ , где величины  $\alpha, \psi$  выбираются произвольным образом в пределах  $0 < \alpha < 1, \psi_0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ . Построены формулы для частот поля, на которых существуют поверхностные электромагнитные волны с осевой симметрией. Доказано существование двух последовательностей поверхностных электромагнитных волн, распространяющихся на частотах  $\omega_n^{(1)} = \omega_n^{(1)}(\alpha, \psi; \varepsilon_r, \mu_r)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $\omega_l^{(2)} = \omega_l^{(2)}(\alpha, \psi; \varepsilon_r, \mu_r)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ . В результате выделено спектральное многообразие последовательностей поверхностных волн (плазмонов), распространяющихся на поверхности биизотропного экрана. Возможны другие варианты многообразий.

### Список использованных источников

1. Виноградов, А. П. Электродинамика композитных материалов. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 206 с.
2. Ерофеенко, В. Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010. – 304 с.
3. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media* / I. V. Lindell [et al.]. – Boston : Artech House, 1994. – 324 p.
4. Ерофеенко, В. Т. Дифракция плоской электромагнитной волны на плоскостройной структуре из биизотропных материалов / В. Т. Ерофеенко, С. В. Малый // Информатика. – 2012. – № 1(33). – С. 58–65.
5. Ерофеенко, В. Т. Экранирование электромагнитных полей экранами из матричных композитов, содержащих биизотропные частицы / В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко // Информатика. – 2014. – № 3(43). – С. 28–43.
6. Ерофеенко, В. Т. Краевая задача проникновения электромагнитных полей дипольных источников через биизотропный экран // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 2. – С. 71–76.
7. Ерофеенко, В. Т. Модель вычисления эффективных параметров матричного композита из биизотропных частиц с учетом многократных переотражений электромагнитного поля // Информатика. – 2015. – № 4(48). – С. 17–33.
8. Неганов, В. А. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами / В. А. Неганов, О. В. Осипов. – М. : Радио и связь, 2006. – 280 с.
9. Ерофеенко, В. Т. Преобразование пучков электромагнитных волн при прохождении через экран из кирального метаматериала / В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко // Информатика. – 2013. – № 1(37). – С. 5–17.
10. Ерофеенко, В. Т. Модели граничных условий на композиционных экранах для электромагнитных полей с осевой симметрией // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 2. – С. 41–45.
11. Шевченко, В. В. Геометрооптическая теория плоской линзы из кирального метаматериала // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т. 54, № 6. – С. 696–700.
12. Ерофеенко, В. Т. Двухсторонняя фокусировка электромагнитного поля точечного источника плоской линзой из метаматериала // Информатика. – 2016. – № 1(49). – С. 14–25.

### References

1. Vinogradov A. P. *Elektrodinamika kompozitnyh materialov. Electrodynamics of Composite Materials*. Moscow, Editorial URSS, 2001, 206 p. (in Russian).
2. Erofeenko V. T., Kozlovskaja I. S. *Analiticheskoe modelirovanie v elektrodinamike. Analytical Modeling in Electrodynamics*. Minsk, Belorusskij gosudarstvennyj universitet, 2010, 304 p. (in Russian).
3. Lindell I. V., Sihvola A. H., Viitanen A. J., Tretyakov S. A. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*. Boston, Artech House, 1994, 324 p.
4. Erofeenko V. T., Malyy S. V. *Difrakcija ploskooj elektromagnitnooj volny na ploskoslojnoj strukture iz biizotropnyh materialov* [Diffraction of a plane electromagnetic wave on a plane-layer structure of bi-isotropic materials]. *Informatika [Informatics]*, 2012, no. 1(33), pp. 58–65 (in Russian).
5. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. *Ekranirovanie elektromagnitnyh polej ekranami iz matrichnyh kompozitov, soderzhashhih biizotropnye chasticy* [Screening of electromagnetic fields by screens from matrix composites containing bi-isotropic particles]. *Informatika [Informatics]*, 2014, no. 3(43), pp. 28–43 (in Russian).

6. Erofeenko V. T. Kraevaja zadacha pronikovenija elektromagnitnyh polej dipol'nyh istochnikov cherez biizotropnyj jekran [Boundary-value problem of penetration of electromagnetic fields of dipole sources through a bi-isotropic screen]. Vestnik BGU [*Bulletin of the Belarusian State University. Ser. 1*], 2012, no. 2, pp. 71–76 (in Russian).

7. Erofeenko V. T. Model' vychislenija effektivnyh parametrov matrichnogo kompozita iz biizotropnyh chastic s uchjotom mnogokratnyh pereotrazhenij elektromagnitnogo polja [Model for calculating effective parameters of matrix composites from bi-isotropic particles with regard multiple reflections of electromagnetic field]. Informatika [*Informatics*], 2015, no. 4(48), pp. 17–33 (in Russian).

8. Neganov V. A., Osipov O. V. Otrazhajushhie, volnovodushhie i izluchajushhie struktury s kiral'nymi jelementami. *Reflecting, Waveguiding and Radiating Structures with Chiral Elements*. Moscow, Radio i svyaz, 2006, 280 p. (in Russian).

9. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. Preobrazovanie puchkov elektromagnitnyh voln pri prohozhdenii cherez ekran iz kiral'nogo metamateriala [Transformation of beams electromagnetic waves passing through a chiral metamaterial screen]. Informatika [*Informatics*], 2013, no. 1(37), pp. 5–17 (in Russian).

10. Erofeenko V. T. Modeli granichnyh uslovij na kompozicionnyh ekranah dlja elektromagnitnyh polej s osevoj simmetrijoj [Models for boundary conditions on the composite screens electromagnetic fields with axial symmetry]. Izvestija Nacional'noj akademii nauk Belarusi. Serija fiziko-matematicheskikh nauk [*Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus, Physics and Mathematics Series*], 2010, no. 2, pp. 41–45 (in Russian).

11. Schevchenko V. V. Geometroopticheskaja teorija ploskoj linzy iz kiral'nogo metamateriala [Geometric-optical theory of the plane lens from chiral metamaterial]. Ragiotehnika i jelektronika [*Journal of Communications Technology and Electronics*], 2009, vol. 54, no. 6, pp. 696–700 (in Russian).

12. Erofeenko V. T. Dvuhstoronnjaja fokusirovka elektromagnitnogo polja tochechnogo istochnika ploskoj linznoj iz metamateriala [Two-sided focusing of electromagnetic field of point source by means of planar lens from metamaterials]. Informatika [*Informatics*], 2016, no. 1(49), pp. 14–25 (in Russian).

### Информация об авторе

Ерофеенко Виктор Тихонович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории математических методов защиты информации, Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики и информатики».  
E-mail: bsu\_erofeenko@tut.by

### Information about the author

Viktor T. Erofeenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher Associate of the Research Laboratory of Mathematical Methods of Information Security, Establishment of the Belarusian State University "Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics", Minsk, Belarus.  
E-mail: bsu\_erofeenko@tut.by

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)

**ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ**  
*LOGICAL DESIGN*

УДК 519.711

Поступила в редакцию 20.06.2019  
Received 20.06.2019

Принята к публикации 28.08.2019  
Accepted 28.08.2019

## Метод бидекомпозиции частичных булевых функций

**Ю. В. Поттосин**

*Объединенный институт проблем информатики  
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
E-mail: pott@newman.bas-net.by*

**Аннотация.** Задача бидекомпозиции (от англ. bi-decomposition) булевой функции заключается в представлении заданной булевой функции в виде некоторой заданной операции алгебры логики над двумя булевыми функциями и сводится таким образом к определению этих функций. Каждая из искомым функций должна обладать меньшим числом аргументов, чем заданная. Предлагается метод бидекомпозиции для не полностью определенных (частичных) булевых функций, который использует подход, применяемый в решении общей задачи их параллельной декомпозиции. Задание исходной функции должно иметь вид пары матриц. Одна из них, матрица аргументов, может быть троичной или булевой и представляет область определения заданной функции. Другая матрица, матрица значений, имеет вид одного булева вектора-столбца и показывает значения функции на интервалах или элементах булева пространства аргументов. Рассматриваются граф ортогональности строк матрицы аргументов и граф ортогональности одноэлементных строк матрицы значений. Задача бидекомпозиции сводится к задаче о двухблочном взвешенном покрытии множества ребер графа ортогональности строк матрицы значений полными двудольными подграфами (бикликами) графа ортогональности строк матрицы аргументов. Каждой биклике приписывается определенным образом дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), и весом биклики считается минимальный ранг элементарной конъюнкции в соответствующей ДНФ. По каждой из биклик полученного покрытия строится булева функция, аргументами которой служат переменные из элементарной конъюнкции минимального ранга соответствующей ДНФ, что является решением задачи бидекомпозиции.

**Ключевые слова:** частичная булева функция, бидекомпозиция булевой функции, суперпозиция функций, операции алгебры логики, матричное задание булевой функции, задача о покрытии, полный двудольный подграф графа

**Для цитирования.** Поттосин, Ю. В. Метод бидекомпозиции частичных булевых функций / Ю. В. Поттосин // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 77–87.

---

## A method for bi-decomposition of partial Boolean functions

**Yuri V. Pottosin**

*The United Institute of Informatics Problems of the National Academy  
of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
E-mail: pott@newman.bas-net.by*

**Abstract.** The problem of bi-decomposition of a Boolean function is to represent a given Boolean function in the form of a given logic algebra operation over two Boolean functions and so is reduced to specification of these functions. Any of the required functions must have fewer arguments than the given function. A method of bi-decomposition for an incompletely specified (partial) Boolean function is suggested, this method uses the

approach applied in solving the general problem of parallel decomposition of partial Boolean functions. The specification of the given function must be in the form of a pair of matrices. One of them, argument matrix, can be ternary or binary and represents the definitional domain of the given function. The other one, value matrix, is a binary column-vector and represents the function values on the intervals or elements of the Boolean space of the arguments. The graph of orthogonality of the argument matrix rows and the graph of orthogonality of one-element rows of the value matrix are considered. The problem of bi-decomposition is reduced to the problem of a weighted two-block covering the edge set of the orthogonality graph of the value matrix rows by complete bipartite subgraphs (bicliques) of the orthogonality graph of the argument matrix rows. Every biclique is assigned with a disjunctive normal form (DNF) in definite way. The weight of a biclique is the minimum rank of a term of the assigned DNF. According to each biclique of the obtained cover, a Boolean function is constructed whose arguments are the variables from the term of minimal rank on the DNF.

**Keywords:** partial Boolean function, Boolean function bi-decomposition, superposition of functions, logic algebra operations, matrix representation of Boolean functions, covering problem, complete bipartite subgraph

**For citation.** Pottosin Yu. V. A method for bi-decomposition of partial Boolean functions. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 77–87 (in Russian).

**Введение.** Под декомпозицией булевой функции понимается ее представление в виде суперпозиции двух или более функций, каждая из которых в некотором смысле проще исходной. Задача декомпозиции булевых функций является одной из важных и сложных задач из области логического проектирования, успешное решение которой непосредственно влияет на качество и стоимость проектируемых цифровых устройств. Решение этой задачи дает возможность в ряде случаев заменить сложную задачу аппаратной реализации булевой функции от большого числа переменных на более простую задачу реализации нескольких функций с гораздо меньшим числом аргументов.

Существует довольно много видов декомпозиции булевой функции [1]. Одним из таких видов является бидекомпозиция. Задача бидекомпозиции формулируется следующим образом. Для заданной булевой функции  $y = f(\mathbf{x})$ , где компоненты вектора  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – булевы переменные, составляющие множество  $X$ , требуется найти суперпозицию  $f(\mathbf{x}) = \varphi(g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2))$ , где компоненты векторов  $\mathbf{z}_1$  и  $\mathbf{z}_2$  – булевы переменные из множеств  $Z_1 \subset X$  и  $Z_2 \subset X$  соответственно. Функция  $\varphi$  от двух переменных также задана. Это может быть любая из десяти булевых функций, существенно зависящих от обеих переменных и представляемых операциями алгебры логики. Обычно множества  $Z_1$  и  $Z_2$  заданы и  $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ . Такая бидекомпозиция называется *разделительной* в отличие от неразделительной декомпозиции, где условие  $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$  необязательное, но при этом на мощностях множеств  $Z_1$  и  $Z_2$  могут быть наложены ограничения. Получение указанной суперпозиции приводит к логической схеме, изображенной на рис. 1.

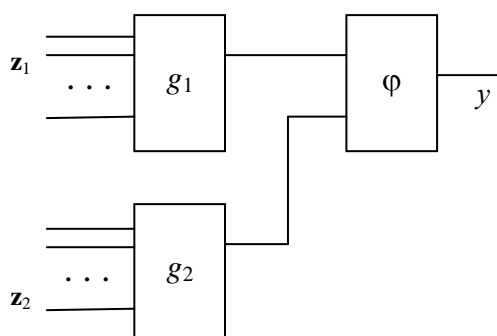


Рис. 1. Структура, получаемая с помощью бидекомпозиции

Известны примеры применения методов бидекомпозиции для повышения быстродействия схем [2, 3] и при синтезе схем на базе программируемой вентильной матрицы (FPGA) [4]. Задача бидекомпозиции при выходной функции, выражаемой операцией сложения по модулю 2,



рассматривается в работе [5], где для ее решения предлагается использовать логические уравнения. Вероятность существования какой-либо декомпозиции для полностью определенных булевых функций весьма низка, но по-другому дело обстоит, когда рассматриваемые функции являются не полностью определенными (частичными), особенно когда они определены только на небольшом числе комбинаций значений аргументов. Такой случай разделительной бидекомпозиции при заданном разбиении  $(Z_1, Z_2)$  подробно исследован в работе [6].

Далее рассматривается задача бидекомпозиции частичной булевой функции. В этом случае для заданной частичной булевой функции  $y = f(\mathbf{x})$  надо найти суперпозицию  $\varphi(g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2)) \succ f(\mathbf{x})$ , где компонентами векторов  $\mathbf{z}_1$  и  $\mathbf{z}_2$  являются переменные из множеств  $Z_1 \subset X$  и  $Z_2 \subset X$  соответственно, а символ  $\succ$  обозначает отношение реализации, т. е. значения функции  $\varphi$  совпадают со значениями функции  $f$  везде, где они определены. Множества  $Z_1$  и  $Z_2$  могут пересекаться, но обычно требуется, чтобы сумма их мощностей была минимальной. Существуют разнообразные методы решения как разделительной, так и неразделительной бидекомпозиции [7–10]. В настоящей статье излагается метод бидекомпозиции, использующий подход к решению задачи параллельной декомпозиции системы частичных булевых функций, описанный в статьях [11, 12]. Этот подход не требует задания множеств  $Z_1$  и  $Z_2$ .

**Применяемый подход.** Подход к решению задачи декомпозиции, предложенный в статьях [11, 12], рассчитан на системы частичных функций, каждая из которых задана в интервальной форме. Эта форма представляет собой пару троичных матриц  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{F}$ , где матрица  $\mathbf{X}$  задает множество интервалов булева пространства переменных из множества  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , а матрица  $\mathbf{F}$  – значения функций заданной системы на этих интервалах. Строки матриц  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{F}$  имеют общую естественную нумерацию. Заданная система рассматривается как векторная функция  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , и в общем случае надо получить суперпозицию, а также векторную функцию  $\varphi(g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2), \dots, g_k(\mathbf{z}_k))$ , реализующую  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

Строятся графы  $G_X = (V, E_X)$  и  $G_F = (V, E_F)$ , где множество вершин  $V$  является множеством общих номеров строк матриц  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{F}$ , а множества ребер  $E_X$  и  $E_F$  – множествами пар номеров ортогональных строк матриц  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{F}$  соответственно. Две строки троичной матрицы ортогональны, если имеется столбец, у которого в одной из этих строк расположен нуль, а в другой – единица [13]. Каждому ребру из множества  $E_X$  приписаны переменные из множества  $X$ , по которым соответствующие строки ортогональны. Полному двудольному подграфу, или *биклике*, графа  $G_X$  припишем множество переменных из  $X$ , взятых по одной из каждого ребра, принадлежащего данной биклике. Биклику назовем *полезной*, если она содержит хотя бы одно ребро из множества  $E_F$ .

Множество переменных, приписываемых биклике, определяется следующим образом. Пусть  $\{x_i, x_j, \dots, x_l\}$  – множество переменных, по которым ортогональны две строки, соответствующие ребру из множества  $E_X$ . Образует элементарную дизъюнкцию  $x_i \vee x_j \vee \dots \vee x_l$  из этих переменных. Получим конъюнктивную нормальную форму (КНФ), членами которой будут указанные дизъюнкции, взятые по всем ребрам, входящим в данную биклику. После удаления возможных поглощаемых элементарных дизъюнкций преобразуем полученную КНФ, раскрыв скобки, в ДНФ. Множество переменных, приписанных биклике, составят переменные, входящие в элементарную конъюнкцию минимального ранга полученной ДНФ.

Пусть  $B_1, B_2, \dots, B_k$  – покрытие бикликами множества ребер  $E_X$ . Каждая биклика  $B_i$  может быть задана парой множеств вершин  $\langle V_i', V_i'' \rangle$ . Каждая функция  $g_i(\mathbf{z}_i)$  искомой суперпозиции задается матрицами  $\mathbf{X}_i$  и  $\mathbf{F}_i$ . Матрица  $\mathbf{X}_i$  является минором матрицы  $\mathbf{X}$ , образованным столбцами, которые соответствуют переменным, приписанным биклике  $B_i$ . Матрица  $\mathbf{F}_i$  состоит из одного столбца, где в строке с номером, соответствующим вершине из  $V_i'$ , находится 0, в строке с номером, соответствующим вершине из  $V_i''$ , находится 1 (или наоборот), а в строке, которой не соответствует ни одна вершина ни из  $V_i'$ , ни из  $V_i''$ , – символ «–». Векторная функция  $\mathbf{f}$  задается матрицами  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{\Phi}$ . Матрица  $\mathbf{U}$  состоит из столбцов, представляющих матрицы  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_k$ , а матрица  $\mathbf{\Phi}$  совпадает с матрицей  $\mathbf{F}$ .

Таким образом, процесс решения задачи декомпозиции включает следующие этапы:

1. Нахождение всех максимальных биклик в графе  $G_X$ . Для этого можно использовать метод, представленный в работе [14], который позднее был описан в статье [15].

2. Получение кратчайшего покрытия множества  $E_F$  найденными бикликами. Если число биклик, составляющих покрытие, не меньше  $n$ , то для заданной системы функций не существует нетривиальной декомпозиции указанного вида.

3. Построение булевых функций  $g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2), \dots, g_k(\mathbf{z}_k)$  и векторной функции  $\varphi$ .

На этапе получения покрытия можно продолжить оптимизацию решения, уменьшая сумму чисел компонент векторов  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k$ . Каждую биклику нужно снабдить весом в виде числа приписанных ей переменных и решать задачу о взвешенном покрытии. При доопределении не полностью определенных булевых функций в процессе декомпозиции некоторые аргументы могут оказаться несущественными. Тогда можно выбирать вариант с наименьшим числом существенных аргументов.

**Метод бидекомпозиции.** Задачу бидекомпозиции можно рассматривать как частный случай задачи параллельной декомпозиции. Особенностью этого случая является то, что рассматривается одна функция, а не система функций, вид функции  $\varphi$  задан и число ее аргументов равно двум. Матрица  $\mathbf{X}$  может быть троичной или булевой, а матрица  $\mathbf{F}$  имеет вид одного булева вектора-столбца. Задание вида функции  $\varphi$  влечет представление исходных данных в виде трех матриц. Кроме матриц  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{F}$  добавляется еще матрица  $\mathbf{G}$ , задающая через запятую возможные значения функций  $g_1$  и  $g_2$ . Например, если  $\varphi$  представляет собой сложение по модулю 2, т. е.  $f(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{z}_1) \oplus g_2(\mathbf{z}_2)$ , то это задание выглядит подобно матрицам

$$\mathbf{X} = \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline 1 & 0 & - & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & - & - & 0 & 1 & - & 2 \\ 0 & - & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & - & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & - & 1 & 1 & - & 6 \end{array}, \mathbf{G} = \begin{array}{c} g_1 g_2 \\ \hline 00, 11 \\ 01, 10 \\ 00, 11 \\ 01, 10 \\ 00, 11 \\ 01, 10 \end{array}, \mathbf{F} = \begin{array}{c} y \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}.$$

На той части пространства переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ , которое не охвачено интервалами, представленными матрицей  $\mathbf{X}$ , значения функции не определены. Из матрицы  $\mathbf{G}$  в данном примере видно, что согласно способу построения функций  $g_1$  и  $g_2$  вершины  $v_1, v_3$  и  $v_5$  оказываются вместе в одной доле во всех бикликах из всех полезных двухблочных покрытий. Любая из остальных вершин в таких бикликах попадает в доли, соответствующие различным значениям функций  $g_1$  и  $g_2$ .

Если  $\varphi$  представляет собой штрих Шеффера (отрицание конъюнкции), то исходное задание для этой же функции представляется матрицами

$$\mathbf{X} = \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline 1 & 0 & - & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & - & - & 0 & 1 & - & 2 \\ 0 & - & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & - & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & - & 1 & 1 & - & 6 \end{array}, \mathbf{G} = \begin{array}{c} g_1 g_2 \\ \hline 11 \\ 00, 01, 10 \\ 11 \\ 00, 01, 10 \\ 11 \\ 00, 01, 10 \end{array}, \mathbf{F} = \begin{array}{c} y \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}.$$

Пусть биклики  $B_1$  и  $B_2$  графа  $G_X$  составляют двухблочное покрытие множества  $E_F$ , по которому можно построить функции  $g_1, g_2$  и  $\varphi$ . Приведенные примеры позволяют легко установить следующие свойства покрытий, по которым строятся эти функции:

А. Множество вершин (обозначим его  $W$ ), каждая из которых соответствует одинаковым значениям функций  $g_1$  и  $g_2$ , является подмножеством одной из долей каждой из биклик  $B_1$  и  $B_2$ .

Б. Если вершины  $v_i$  и  $v_j$  из множества  $V \setminus W$  находятся в разных долях одной биклики, то они находятся также в разных долях другой биклики. Если они находятся в одной и той же доле одной биклики, то они находятся в одной и той же доле другой биклики.

Для линейных функций, к которым относятся сложение по модулю 2 и его отрицание (эквиваленция), оба свойства являются обязательными. Для нелинейных функций, т. е. всех остальных функций, существенно зависящих от обоих аргументов, свойство Б необязательно.

Двухблочное покрытие множества  $E_F$  полезными бикликами графа  $G_X$  назовем *полезным для нелинейной функции  $\varphi$* , если оно обладает свойством А, и *полезным для линейной функции  $\varphi$* , если оно обладает свойствами А и Б.

Рассматриваемая задача с минимизацией суммы чисел аргументов функций  $g_1$  и  $g_2$  решается поэтапно:

*Этап 1.* Нахождение всех максимальных полезных биклик в графе  $G_X$ , обладающих свойством А с соответствующими ДНФ. Заметим, что в данной задаче граф  $G_F$  является бикликой графа  $G_X$ , которую не следует считать полезной, так как она является одноблочным покрытием, приводящим к тривиальному решению, одна из функций  $g_i$  при этом является константой. Каждой найденной биклике приписывается вес, равный минимальному рангу элементарной конъюнкции в соответствующей ДНФ.

*Этап 2.* Получение двухблочного покрытия множества  $E_F$  найденными бикликами. Покрытие должно быть с минимальным весом, а для линейной функции  $\varphi$  обладать свойством Б. Вес покрытия определяется как сумма весов составляющих его биклик. На этом же этапе удовлетворяется требование пустого пересечения множеств  $Z_1$  и  $Z_2$  при разделительной бидекомпозиции.

*Этап 3.* Построение булевых функций  $g_1(\mathbf{z}_1)$  и  $g_2(\mathbf{z}_2)$  с учетом задания вида функции  $\varphi$ . Функции  $g_1(\mathbf{z}_1)$  и  $g_2(\mathbf{z}_2)$  представляются соответственно парами матриц  $\mathbf{X}_1, \mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{X}_2, \mathbf{F}_2$ , а функция  $\varphi$  – формулой с заданной операцией алгебры логики.

Узким местом рассматриваемого подхода является получение всех максимальных биклик, число которых для полного графа равно  $2^{n-1} - 1$ , где  $n$  – число вершин графа. Очевидно, граф  $G_X$  является полным, если все строки матрицы  $\mathbf{X}$  взаимно ортогональны, что всегда имеет место, когда  $\mathbf{X}$  – булева матрица. Свойство А дает возможность значительно уменьшить число рассматриваемых биклик, заменив вершины из множества  $W$  одной вершиной путем их стягивания. Число максимальных биклик в таком графе будет  $2^{n-|W|} - 1$ , где  $|W|$  – мощность множества  $W$ . Размерность задачи о покрытии снижается еще и за счет того, что ребра, инцидентные вершинам из множества  $W$ , содержатся в одних и тех же бикликах. Поэтому согласно правилу редукции, применяемому при решении задачи о покрытии [13], достаточно вместо всех ребер, связывающих некоторую вершину из множества  $W$  с вершинами из множества  $V \setminus W$ , учитывать только одно из этих ребер. Следует также заметить, что сложность задачи нахождения всех двухблочных покрытий выражается полиномом второй степени относительно количества покрываемых множеств. Поэтому перебор всех двухблочных покрытий не считается трудоемкой задачей.

**Демонстрация метода.** Пусть для частичной булевой функции, представленной приведенными ниже матрицами  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{F}$ , надо получить реализующую ее функцию, представимую выражением  $g_1(\mathbf{z}_1) \oplus g_2(\mathbf{z}_2)$ , при минимуме суммы длин векторов  $\mathbf{z}_1$  и  $\mathbf{z}_2$ .

$$\mathbf{X} = \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}, \quad \mathbf{G} = \begin{array}{c} g_1 g_2 \\ \hline 01, 10 \\ 01, 10 \\ 01, 10 \\ 01, 10 \\ 00, 11 \\ 00, 11 \\ 00, 11 \\ 00, 11 \\ 00, 11 \end{array}, \quad \mathbf{F} = \begin{array}{c} y \\ \hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}.$$

Матрица  $\mathbf{G}$  показывает возможные значения функций  $g_1$  и  $g_2$ . Графы  $G_X$  и  $G_F$  имеют общее множество вершин  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_9\}$ . Граф  $G_X$  является полным, а граф  $G_F$  – полным двудоль-

ным. Матрица  $\mathbf{G}$  определяет множество вершин  $W = \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ . В табл. 1, где строки и столбцы соответствуют вершинам графа  $G_X$ , даны множества переменных, приписанных ребрам графа  $G_X$ .

Таблица 1

Переменные, приписанные ребрам графа  $G_X$

	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	
	$x_1, x_2, x_5, x_7$	$x_2, x_3, x_4$	$x_1, x_2, x_5$	$x_1, x_3, x_4, x_5, x_7$	$x_5$	$x_4, x_6$	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7$	$x_2, x_4$	$v_1$
		$x_1, x_3, x_4, x_5, x_7$	$x_7$	$x_2, x_3, x_4$	$x_1, x_2, x_7$	$x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7$	$x_3, x_4$	$x_1, x_4, x_5, x_7$	$v_2$
			$x_1, x_3, x_4, x_5$	$x_1, x_2, x_5, x_7$	$x_2, x_3, x_4, x_5$	$x_2, x_3, x_6$	$x_1, x_5, x_7$	$x_3$	$v_3$
				$x_2, x_3, x_4, x_7$	$x_1, x_2$	$x_1, x_2, x_4, x_5, x_6$	$x_3, x_4, x_7$	$x_1, x_4, x_5$	$v_4$
					$x_1, x_3, x_4, x_7$	$x_1, x_2, x_5, x_6, x_7$	$x_2$	$x_1, x_2, x_3, x_5, x_7$	$v_5$
						$x_5, x_5, x_6$	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_7$	$x_2, x_4, x_5$	$v_6$
							$x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7$	$x_2, x_6$	$v_7$
								$x_1, x_3, x_5, x_7$	$v_8$

Все максимальные полезные биклики графа  $G_X$  представлены в виде пар подмножеств вершин вместе с соответствующими КНФ и ДНФ:

$$\begin{aligned}
 & \langle \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_4\} \rangle - x_7(x_1 \vee x_2) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) = x_1 x_7 \vee x_2 x_4 x_7 \vee x_2 x_5 x_7; \\
 & \langle \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle - x_3 x_5 x_7 (x_4 \vee x_6) (x_2 \vee x_4) = \\
 & \quad = x_2 x_3 x_4 x_5 x_7 \vee x_2 x_3 x_5 x_6 x_7 \vee x_3 x_4 x_5 x_7; \\
 & \langle \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_3\} \rangle - x_3(x_1 \vee x_5 \vee x_7) = x_1 x_3 \vee x_3 x_5 \vee x_3 x_7; \\
 & \langle \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle - x_5(x_2 \vee x_4) (x_4 \vee x_6) (x_1 \vee x_2) (x_3 \vee x_4) = \\
 & \quad = x_1 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_5 x_6 \vee x_2 x_4 x_5; \\
 & \langle \{v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_3, v_4\} \rangle - x_3 x_7(x_1 \vee x_2) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) = \\
 & \quad = x_1 x_3 x_7 \vee x_2 x_3 x_4 x_7 \vee x_2 x_3 x_5 x_7; \\
 & \langle \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle - x_5 x_7(x_2 \vee x_4) (x_4 \vee x_6) (x_3 \vee x_4) = x_2 x_3 x_5 x_6 x_7 \vee x_4 x_5 x_7; \\
 & \langle \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_2\} \rangle - x_7 (x_3 \vee x_4) = x_3 x_7 \vee x_4 x_7; \\
 & \langle \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle - x_3 x_5 x_7 (x_4 \vee x_6) (x_2 \vee x_4) (x_1 \vee x_2) = \\
 & \quad = x_1 x_3 x_4 x_5 x_7 \vee x_2 x_3 x_5 x_6 x_7 \vee x_2 x_3 x_4 x_5 x_7; \\
 & \langle \{v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_2, v_4\} \rangle - (x_1 \vee x_2) (x_3 \vee x_4) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) = \\
 & \quad = x_1 x_3 \vee x_1 x_4 \vee x_2 x_4 \vee x_2 x_3 x_5; \\
 & \langle \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle - x_3 x_5 (x_4 \vee x_6) (x_2 \vee x_4) = x_2 x_3 x_5 x_6 \vee x_3 x_4 x_5; \\
 & \langle \{v_1, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_2, v_3\} \rangle - x_3 x_7; \\
 & \langle \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle - x_5 x_7 (x_2 \vee x_4) (x_4 \vee x_6) (x_1 \vee x_2) = \\
 & \quad = x_1 x_4 x_5 x_7 \vee x_2 x_4 x_5 x_7 \vee x_2 x_5 x_6 x_7; \\
 & \langle \{v_1, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_2, v_3, v_4\} \rangle - x_3(x_1 \vee x_2) (x_1 \vee x_5 \vee x_7) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) = \\
 & \quad = x_1 x_3 \vee x_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4 x_7 \vee x_2 x_3 x_5; \\
 & \langle \{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle - x_5 (x_2 \vee x_4) (x_4 \vee x_6) = x_4 x_5 \vee x_2 x_5 x_6.
 \end{aligned}$$

Покрытия этими бикликами ребер графа  $G_F$  приведены в табл. 2. Как уже отмечалось, достаточно вместо всех ребер, связывающих какую-либо вершину из множества  $W$  с вершинами из множества  $V \setminus W$ , учитывать только одно из этих ребер.

Таблица 2

Биклики	$v_1v_5$	$v_2v_5$	$v_3v_5$	$v_4v_5$	Вес
$\langle \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_4\} \rangle$				1	2
$\langle \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle$	1	1	1		4
$\langle \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_3\} \rangle$			1		2
$\langle \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle$	1	1		1	3
$\langle \{v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_3, v_4\} \rangle$			1	1	3
$\langle \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle$	1	1			3
$\langle \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_2\} \rangle$		1			2
$\langle \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle$	1		1	1	4
$\langle \{v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_2, v_4\} \rangle$		1		1	2
$\langle \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle$	1		1		3
$\langle \{v_1, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_2, v_3\} \rangle$		1	1		2
$\langle \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle$	1			1	4
$\langle \{v_1, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_2, v_3, v_4\} \rangle$		1	1	1	2
$\langle \{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle$	1				2

Одним из покрытий, приводящих к решению задачи, является покрытие, содержащее биклику  $\langle \{v_1, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_2, v_3, v_4\} \rangle$  с элементарной конъюнкцией наименьшего ранга  $x_1 x_3$  и биклику  $\langle \{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle$  с конъюнкцией  $x_4 x_5$ .

Искомую суперпозицию (вид функции  $f$  задан) представляют матрицы

$$\mathbf{X}_1 = \begin{matrix} x_1 & x_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix}, \mathbf{F}_1 = \begin{matrix} g_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}; \mathbf{X}_2 = \begin{matrix} x_4 & x_5 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix}, \mathbf{F}_2 = \begin{matrix} g_2 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Получен результат разделительной бидекомпозиции, представимый следующими формулами (переменные  $x_2$ ,  $x_6$  и  $x_7$  оказались несущественными аргументами):

$$g_1 = x_1 \oplus x_3, \quad g_2 = x_4 \vee x_5, \quad y = g_1 \oplus g_2.$$

Если для функции из рассмотренного примера нужно получить результат бидекомпозиции с функцией, выражаемой операцией «стрелка Пирса» (отрицание дизъюнкции), т. е.  $y = g_1 \uparrow g_2 = \overline{g_1 \vee g_2}$ , то исходное задание имеет вид

$$\mathbf{X} = \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix}, \mathbf{G} = \begin{matrix} g_1 g_2 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1, 10, 11 \\ 0 & 1, 10, 11 \\ 0 & 1, 10, 11 \\ 0 & 1, 10, 11 \\ 0 & 1, 10, 11 \end{bmatrix} \end{matrix}, \mathbf{F} = \begin{matrix} y \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Здесь матрица  $\mathbf{G}$  определяет множество вершин  $W = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . Граф  $G_X$  обладает следующим множеством полезных биклик:

$$\begin{aligned}
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}, \{v_9\} \rangle - x_3 (x_2 \vee x_4) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) (x_2 \vee x_6) = \\
& \quad = x_1 x_2 x_3 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_3 x_4 x_6; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9\}, \{v_8\} \rangle - x_2 (x_3 \vee x_4) (x_1 \vee x_5 \vee x_7) = \\
& \quad = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_2 x_3 x_7 \vee x_2 x_4 x_5 \vee x_2 x_4 x_7; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}, \{v_8, v_9\} \rangle - x_2 x_3 (x_1 \vee x_5 \vee x_7) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) = \\
& \quad = x_1 x_2 x_3 \vee x_2 x_3 x_4 x_7 \vee x_2 x_3 x_5; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_9\}, \{v_7\} \rangle - (x_4 \vee x_6) (x_2 \vee x_6) (x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_7) = \\
& \quad = x_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_4 x_5 \vee x_6 \vee x_2 x_4 x_7; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8\}, \{v_7, v_9\} \rangle - x_3 (x_4 \vee x_6) (x_2 \vee x_4) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) = \\
& \quad = x_1 x_2 x_3 x_6 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_5 x_6; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_9\}, \{v_7, v_8\} \rangle - x_2 (x_4 \vee x_6) (x_1 \vee x_5 \vee x_7) (x_3 \vee x_4) = \\
& \quad = x_1 x_2 x_3 x_6 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_3 x_5 x_6 \vee x_2 x_3 x_6 x_7 \vee x_2 x_4 x_5 \vee x_2 x_4 x_7; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \{v_7, v_8, v_9\} \rangle - x_2 x_3 (x_4 \vee x_6) (x_1 \vee x_5 \vee x_7) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) = \\
& \quad = x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_6 \vee x_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_4 x_7 \vee x_2 x_3 x_5 x_6 \vee x_2 x_3 x_6 x_7; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_8, v_9\}, \{v_6\} \rangle - x_5 (x_1 \vee x_2) (x_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_7) = \\
& \quad = x_1 x_5 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_2 x_4 x_5 \vee x_2 x_5 x_7; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_8\}, \{v_6, v_9\} \rangle - x_3 x_5 (x_1 \vee x_2) (x_2 \vee x_4) (x_2 \vee x_6) = x_2 x_3 x_5 \vee x_1 x_3 x_4 x_5 x_6; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_9\}, \{v_6, v_8\} \rangle - x_2 x_5 (x_3 \vee x_4) = x_2 x_3 x_5 \vee x_2 x_4 x_5; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7\}, \{v_6, v_8, v_9\} \rangle - x_2 x_3 x_5; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_8, v_9\}, \{v_6, v_7\} \rangle - x_5 (x_1 \vee x_2) (x_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_7) (x_4 \vee x_6) (x_2 \vee x_6) = \\
& \quad = x_1 x_5 x_6 \vee x_2 x_3 x_5 x_6 \vee x_2 x_4 x_5 \vee x_2 x_5 x_6 x_7; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_8\}, \{v_6, v_7, v_9\} \rangle - x_3 x_5 (x_1 \vee x_2) (x_4 \vee x_6) (x_2 \vee x_4) = \\
& \quad = x_1 x_3 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_5 x_6; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_9\}, \{v_6, v_7, v_8\} \rangle - x_2 x_5 (x_3 \vee x_4) (x_4 \vee x_6) = x_2 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_5 x_6; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_6, v_7, v_8, v_9\} \rangle - x_2 x_3 x_5 (x_4 \vee x_6) = x_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_5 x_6; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_5\} \rangle - x_2 (x_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_7) (x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_7) = \\
& \quad = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_2 x_4 x_5 \vee x_2 x_4 x_6 \vee x_2 x_7; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8\}, \{v_5, v_9\} \rangle - x_2 x_3 (x_1 \vee x_4 \vee x_5) = x_1 x_2 x_3 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_5; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_9\}, \{v_5, v_8\} \rangle - (x_3 \vee x_4) (x_1 \vee x_5 \vee x_7) (x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_7) = \\
& \quad = x_1 x_3 \vee x_1 x_4 \vee x_3 x_5 \vee x_3 x_7 \vee x_4 x_5 \vee x_4 x_7; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7\}, \{v_5, v_8, v_9\} \rangle - x_3 (x_1 \vee x_5 \vee x_7) (x_2 \vee x_4) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) (x_2 \vee x_6) = \\
& \quad = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_3 x_4 x_6 \vee x_2 x_3 x_4 x_7 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_3 x_4 x_5 x_6 \vee x_3 x_4 x_6 x_7; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8, v_9\}, \{v_5, v_7\} \rangle - x_2 (x_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_7) (x_4 \vee x_6) = \\
& \quad = x_1 x_2 x_6 \vee x_2 x_3 x_6 \vee x_2 x_4 \vee x_2 x_6 x_7; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8\}, \{v_5, v_7, v_9\} \rangle - x_2 x_3 (x_4 \vee x_6) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) = \\
& \quad = x_1 x_2 x_3 x_6 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_5 x_6; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_9\}, \{v_5, v_7, v_8\} \rangle - (x_3 \vee x_4) (x_1 \vee x_5 \vee x_7) (x_4 \vee x_6) (x_2 \vee x_6) = \\
& \quad = x_1 x_2 x_4 \vee x_1 x_3 x_6 \vee x_1 x_4 x_6 \vee x_2 x_4 x_5 \vee x_2 x_4 x_7 \vee x_3 x_5 x_6 \vee x_3 x_6 x_7 \vee x_4 x_5 x_6 \vee x_4 x_6 x_7; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}, \{v_5, v_7, v_8, v_9\} \rangle - x_3 (x_1 \vee x_5 \vee x_7) (x_4 \vee x_6) (x_2 \vee x_4) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) = \\
& \quad = x_1 x_2 x_3 x_6 \vee x_1 x_3 x_4 \vee x_3 x_4 x_5 \vee x_3 x_4 x_7 \vee x_2 x_3 x_5 x_6; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9\}, \{v_5, v_6\} \rangle - x_2 x_5; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8\}, \{v_5, v_6, v_9\} \rangle - x_2 x_3 x_5; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_9\}, \{v_5, v_6, v_8\} \rangle - x_5 (x_3 \vee x_4) (x_1 \vee x_2) = x_1 x_3 x_5 \vee x_1 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_2 x_4 x_5; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7\}, \{v_5, v_6, v_8, v_9\} \rangle - x_3 x_5 (x_1 \vee x_2) (x_2 \vee x_4) (x_2 \vee x_6) = x_2 x_3 x_5 \vee x_1 x_3 x_4 x_5 x_6; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_8, v_9\}, \{v_5, v_6, v_7\} \rangle - x_2 x_5 (x_4 \vee x_6) = x_2 x_4 x_5 \vee x_2 x_5 x_6; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_8\}, \{v_5, v_6, v_7, v_9\} \rangle - x_2 x_3 x_5 (x_4 \vee x_6) = x_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_5 x_6; \\
& \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_9\}, \{v_5, v_6, v_7, v_8\} \rangle - x_5 (x_3 \vee x_4) (x_1 \vee x_2) (x_4 \vee x_6) (x_2 \vee x_6) = \\
& \quad = x_1 x_3 x_5 x_6 \vee x_1 x_4 x_5 x_6 \vee x_2 x_3 x_5 x_6 \vee x_2 x_4 x_5.
\end{aligned}$$

При нахождении двухблочного покрытия уместно применить следующее правило редукции: если  $i$ -я строка таблицы покрытия имеет единицы везде, где имеет единицы  $j$ -я строка, а вес  $j$ -й строки не меньше веса  $i$ -й строки, то  $j$ -ю строку можно исключить из рассмотрения. После сокращения таблицы покрытия согласно этому правилу она принимает вид табл. 3.

Таблица 3

Биклики	$v_1v_5$	$v_1v_6$	$v_1v_7$	$v_1v_8$	$v_1v_9$	Вес
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_9\}, \{v_7\}\rangle$			1			1
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8\}, \{v_7, v_9\}\rangle$			1		1	2
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_9\}, \{v_7, v_8\}\rangle$			1	1		3
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \{v_7, v_8, v_9\}\rangle$			1	1	1	4
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7\}, \{v_6, v_8, v_9\}\rangle$		1				2
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7\}, \{v_6, v_8, v_9\}\rangle$		1		1	1	3
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_9\}, \{v_6, v_7, v_8\}\rangle$		1	1	1		3
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_6, v_7, v_8, v_9\}\rangle$		1	1	1	1	4
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_9\}, \{v_5, v_8\}\rangle$	1			1		2
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7\}, \{v_5, v_8, v_9\}\rangle$	1			1	1	3
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8, v_9\}, \{v_5, v_7\}\rangle$	1		1			2
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}, \{v_5, v_7, v_8, v_9\}\rangle$	1		1	1	1	3
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9\}, \{v_5, v_6\}\rangle$	1	1				2
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7\}, \{v_5, v_6, v_8, v_9\}\rangle$	1	1		1	1	3
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_8\}, \{v_5, v_6, v_7, v_9\}\rangle$	1	1	1		1	4
$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_9\}, \{v_5, v_6, v_7, v_8\}\rangle$	1	1	1	1		3

Среди полезных покрытий можно выбрать покрытие, состоящее из биклик  $\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9\}, \{v_5, v_6\}\rangle$  и  $\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}, \{v_5, v_7, v_8, v_9\}\rangle$  и дающее наиболее простые формулы. У первой из них соответствующая ДНФ имеет только одну элементарную конъюнкцию –  $x_2x_5$ . Второй биклике соответствует ДНФ  $x_1x_2x_3x_6 \vee x_1x_3x_4 \vee x_3x_4x_5 \vee x_3x_4x_7 \vee x_2x_3x_5x_6$ , имеющая три элементарные конъюнкции минимального ранга 3. Таким образом, это покрытие дает следующие решения:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_2 & x_5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} g_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Данные решения выражаются формулами, две из которых представляют разделительные бидекомпозиции:

$$y = g_1 \uparrow g_2, \text{ где } g_1 = x_2x_5, \quad g_2 = x_4(x_1 \vee x_3), \text{ или } g_2 = x_4(x_3 \vee x_5), \text{ или } g_2 = x_4(x_3 \vee \bar{x}_7).$$

**Заключение.** Описанный метод бидекомпозиции отличается от многих известных методов прежде всего тем, что не требует задания разбиения множества аргументов исходной функции. Метод не всегда может быть реализован на задачах практической размерности ввиду трудоемкости выполнения первых двух этапов описанного процесса. Однако по сравнению с общим методом параллельной декомпозиции, для которого бидекомпозицию можно считать частным

случае, есть возможность значительно сократить размерность задачи, учитывая особенности этого частного случая. Число полезных биклик сокращается в  $2^{|W|}$  раза, где  $W$  – множество вершин, которые всегда содержатся в одной и той же доле любой из этих биклик. Кроме того, при решении задачи о покрытии значительно сокращается число покрываемых ребер, а само покрытие должно содержать ровно две биклики. Поиск двухблочных покрытий является, очевидно, задачей полиномиальной сложности. Описанный метод показывает направление поиска решения, что может быть использовано при разработке эвристических методов.

### Список использованных источников

1. Perkowski, M. A. A Survey of Literature on Functional Decomposition, Version IV (Technical Report) / M. A. Perkowski, S. Grygiel. – Portland, USA : Portland State University, Department of Electrical Engineering, 1995. – 188 p.
2. Cortadella, J. Timing-driven logic bi-decomposition / J. Cortadella // IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – 2003. – Vol. 22, no. 6. – P. 675–685.
3. Mishchenko, A. An algorithm for bi-decomposition of logic functions / A. Mishchenko, B. Steinbach, M. Perkowski // Proc. of the 38<sup>th</sup> Annual Design Automation Conf. (DAC'2001), 18–22 June 2001, Las Vegas, USA. – Las Vegas, 2001. – P. 103–108.
4. Chang, S.-C. Technology mapping for TLU FPGA's based on decomposition of binary decision diagrams / S.-C. Chang, M. Marek-Sadowska, T. Hwang // IEEE Trans. Computer-Aided Design. – 1996. – Vol. 15, no. 10. – P. 1226–1235.
5. Бибило, П. Н. Декомпозиция булевых функций на основе решения логических уравнений / П. Н. Бибило. – Минск : Беларус. навука, 2009. – 211 с.
6. Zakrevskij, A. D. On a special kind decomposition of weakly specified Boolean functions / A. D. Zakrevskij // Second Intern. Conf. on Computer-Aided Design of Discrete Devices (CAD DD'97), 12–14 Nov. 1997, Minsk, Belarus / National Academy of Sciences of Belarus, Institute of Engineering Cybernetics. – Minsk, 1997. – Vol. 1. – P. 36–41.
7. Cheng, D. Bi-decomposition of logical mappings via semi-tensor product of matrices / D. Cheng, X. Xu // Automatica. – 2013. – Vol. 49, no. 7. – P. 1979–1985.
8. Choudhury, M. Bi-decomposition of large Boolean functions using blocking edge graphs / M. Choudhury, K. Mohanram // 2010 IEEE/ACM Intern. Conf. on Computer-Aided Design (ICCAD'2010). – San Jose : IEEE Press, 2010. – P. 586–591.
9. Fišer, P. Small but nasty logic synthesis examples / P. Fišer, J. Schmidt ; ed. by B. Steinbach // Proc. of the 8<sup>th</sup> Intern. Workshop on Boolean Problems (IWSBP'8), 18–19 Sept. 2008, Freiberg, Germany. – Freiberg, 2008. – P. 183–190.
10. Steinbach, B. Vectorial bi-decomposition for lattices of Boolean functions / B. Steinbach, C. Posthoff ; ed. by B. Steinbach // Further Improvements in the Boolean Domain. – Cambridge Scholars Publishing, 2018. – P. 175–198.
11. Поттосин, Ю. В. Метод многоблочной параллельной декомпозиции системы частичных булевых функций / Ю. В. Поттосин // Информатика. – 2017. – № 3(55). – С. 92–98.
12. Поттосин, Ю. В. Параллельная декомпозиция системы частичных булевых функций / Ю. В. Поттосин // Вестник Томск. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2018. – № 45. – С. 83–91.
13. Закревский, А. Д. Логические основы проектирования дискретных устройств / А. Д. Закревский, Ю. В. Поттосин, Л. Д. Черемисинова. – М. : Физматлит, 2007. – 592 с.
14. Поттосин, Ю. В. Нахождение в графе максимальных полных двудольных подграфов / Ю. В. Поттосин // Автоматизация логического проектирования дискретных систем. – Минск : Ин-т техн. кибернетики АН Беларуси, 1991. – С. 19–27.
15. Pottosina, S. Finding maximal complete bipartite subgraphs in a graph / S. Pottosina, Yu. Pottosin, B. Sedliak // J. Applied Mathematics. – 2008. – Vol. 1, no. 1. – P. 75–81.

---

### References

1. Perkowski M. A., Grygiel S. *A Survey of Literature on Functional Decomposition, Version IV (Technical Report)*. Portland, USA, Portland State University, Department of Electrical Engineering, 1995, 188 p.
2. Cortadella J. Timing-driven logic bi-decomposition. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2003, vol. 22, no. 6, pp. 675–685.



3. Mishchenko A., Steinbach B., Perkowski M. An algorithm for bi-decomposition of logic functions. *Proceedings of the 38<sup>th</sup> Annual Design Automation Conference (DAC'2001)*, 18–22 June 2001, Las Vegas, USA. Las Vegas, 2001, pp. 103–108.
4. Chang S.-C., Marek-Sadowska M., Hwang T. Technology mapping for TLU FPGA's based on decomposition of binary decision diagrams. *IEEE Transactions Computer-Aided Design*, 1996, vol. 15, no. 10, pp. 1226–1235.
5. Bibilo P. N. Dekompozicija bulevykh funktsij na osnove reshenija logicheskikh uravnenij. *Decomposition of Boolean functions on the base of solving logical equations*. Minsk, Belaruskaja navuka, 2009, 211 p. (in Russian).
6. Zakrevskij A. D. On a special kind decomposition of weakly specified Boolean functions. *Second International Conference on Computer-Aided Design of Discrete Devices (CAD DD'97)*, Minsk, Belarus, 12–14 November 1997. National Academy of Sciences of Belarus, Institute of Engineering Cybernetics, Minsk, 1997, vol. 1, pp. 36–41.
7. Cheng D., Xu X. Bi-decomposition of logical mappings via semi-tensor product of matrices. *Automatica*, 2013, vol. 49, no. 7, pp. 1979–1985.
8. Choudhury M., Mohanram K. Bi-decomposition of large Boolean functions using blocking edge graphs. *2010 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD'2010)*. San Jose, IEEE Press, 2010, pp. 586–591.
9. Fišer P., Schmidt J. Small but nasty logic synthesis examples. *Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Workshop on Boolean Problems (IWSBP'8)*, 18–19 September 2008, Freiberg, Germany. Freiberg, 2008, pp. 183–190.
10. Steinbach B., Posthoff C. Vectorial bi-decomposition for lattices of Boolean functions. *Further Improvements in the Boolean Domain*. In B. Steinbach (ed.). Cambridge Scholars Publishing, 2018, pp. 175–198.
11. Pottosin Yu. V. Metod mnogoblochnoj paralel'noj dekompozicii sistemy chastichnykh bulevykh funktsij [A method for multi-block parallel decomposition of a system of partial Boolean functions]. *Informatika [Informatics]*, 2017, no. 3(55), pp. 92–98 (in Russian).
12. Pottosin Yu. V. Paralel'naja dekompozicija sistemy chastichnykh bulevykh funktsij [Parallel decomposition of a system of partial Boolean functions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]*, 2018, no. 45, pp. 83–91 (in Russian).
13. Zakrevskij A. D., Pottosin Yu. V., Cheremisina L. D. Logicheskie osnovy proektirovanija diskretnykh ustrojstv. *Logical Fundamentals for Design of Discrete Devices*. Moscow, Fizmatlit, 2007, 592 p. (in Russian).
14. Pottosin Yu. V. Nahozhdenie v grafe maksimal'nykh polnykh dvudol'nykh podgrafov [Finding maximal complete bipartite subgraphs in a graph]. *Avtomatizacija logicheskogo proektirovanija diskretnykh sistem [Automation of Logical Design of Discrete Systems]*. Minsk, Institute of Engineering Cybernetics of Academy of Sciences of Belarus, 1991, pp. 19–27 (in Russian).
15. Pottosina S., Pottosin Yu., Sedliak B. Finding maximal complete bipartite subgraphs in a graph. *Journal of Applied Mathematics*, 2008, vol. 1, no. 1, pp. 75–81.

### Информация об авторе

Поттосин Юрий Васильевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
E-mail: pott@newman.bas-net.by

### Information about the author

Yuri V. Pottosin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: pott@newman.bas-net.by

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

### INFORMATION TECHNOLOGY

UDC 004.432

Received 21.05.2019  
Поступила в редакцию 21.05.2019

Accepted 25.09.2019  
Принята к публикации 25.09.2019

## On reliability, safety, and readability of programming languages on the example of Ada language

A. V. Leont'ev

*Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences, Pereslavl-Zalessky,  
Yaroslavl Region, Russia  
E-mail: alex@leont.botik.ru; psi@botik.ru*

**Abstract.** A few small suggestions of language design reflect the author's views are presented. These suggestions are mainly related to the reliability and safety of simple, typical structures and statements in programming: typification, compile-time elaborations of variables, status of variables, high-level statements, etc. The programmers often spend working time with similar constructions. From mathematical point of view these suggestions do not effect seriously on the complexity and efficiency of calculations; they are designed exclusively to help a programmer to write reliable, secure and clear programs. These suggestions are illustrated on Ada language, which is very suitable for this purpose, but they can be applied in other languages also.

**Keywords:** programming language, reliable programming, safe programming, programming style, design of languages

**Acknowledgements.** The publication was prepared within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of Russia, number AA AAAA-A19-119020690042-2.

**For citation.** Leont'ev A. V. On reliability, safety, and readability of programming languages on the example of Ada language. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 88–98 (in Russian).

---

## О надежности, безопасности и читабельности языков программирования на примере языка Ада

А. В. Леонтьев

*Институт программных систем Российской академии наук, Переславль-Залесский,  
Ярославская область, Россия  
E-mail: alex@leont.botik.ru; psi@botik.ru*

**Аннотация.** Представлены несколько небольших предложений, которые относятся к проектированию языков и отражают взгляды автора на данный предмет. Эти предложения затрагивают надежность, ясность и безопасность типичных, простых конструкций языков программирования, таких как, например, типизация, начальная элаборация, статус переменных, некоторые высокоуровневые операторы и пр. Часто программисты тратят много времени на работу с подобными конструкциями. Представленные предложения мало влияют на сложность и эффективность вычислений. Они предлагаются исключительно для помощи программисту в создании надежных и безопасных программ. Предложения иллюстрируются примерами на языке Ада, который очень удобен для этого, но они могут быть применены и в других языках.

**Ключевые слова:** языки программирования, надежное программирование, безопасное программирование, стиль программирования, проектирование языков

**Благодарность.** Работа выполнена по НИР «Исследование и разработка методов интеллектуального анализа данных» в рамках государственного задания Министерства образования и науки России, номер ГР АААА-А19-119020690042-2.

**Для цитирования.** Леонтьев, А. В. О надежности, безопасности и читабельности языков программирования на примере языка Ада / А. В. Леонтьев // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 88–98.

**Introduction.** The author, basing on his unassuming experience, would like to present a few small suggestions that reflect his subject vision. Though these suggestions are presented schematic enough and the manner of the describing is concise, the author hopes that they are quite clear. It goes without saying that he does not call to implement them immediately; these suggestions are rather offered for a discussion.

Themes of this note are mainly related to reliability and safety of typical, simple structures and statements in programming. Why about them? A good many programmers spend the most part of their time, working with these structures. So, some errors occur during this routine work. Programs are written by human. To err is human. The human factor in programming can hardly be overestimated and is one of the main factors determining reliability of programs.

In fact, having excepted for failures of equipments (in the broadest sense, including errors of a compiler, a run-time environment, and etc) and algorithmic miscalculations, we can attribute to this category all the other errors (that is, to programming proper). Recognition, search, corrections of mistakes of this kind have their own specific and can take long time enough. Though modern languages are more adapted to a making of changes in programs, a correction of these errors can be a separate task. In programming, in which quantity transformed in quality long ago, a loss of a control (over a process) is not a problem. On the whole, it can be said that reliability of a program is its basic characteristic (in the sense, if a program does not have sufficient degree of reliability then the result of its work is sufficiently unpredictable and its exploitation is rather hard or impossible).

Discussing of languages it is very difficult to avoid a question of readability. The precise assessment of this parameter can be difficult but this attribute is very important. In some cases a program can be remade and rewritten if it is complicated and tangled, even if its execution does not have any complaints.

In fact, this is very closely connected with a programming style. It can also be said that programmer's style and language are reflection of those conceptions a programmer had accepted. The author is sure that a programming language, a programming style, and reliability of programs are interdependent not much but very much. As many suppose it is impossible fast writing reliable and clear programs without a good style. It presents difficulty too if a programming language is not suitable. A language directly influences on a speed of writing (a productivity), debugging, reliable, and clarity of a program. In other words, a programming language must be adapted to a programming style. The thought is not new but it is not always (for different reasons) incarnate. Of course, the problems of reliability far exceed the limits of the programming languages' purview but a language, as a basic tool of a programmer, is one of the main starting points.

These proposals little affect on efficiency of computations (in a mathematical sense) or do not affect at all. They are only designed to help a programmer to write reliable and clear programs. This is especially urgent if we take into consideration the growth of software and its complexity. New safety's requirements demands new (and more complicated) tools.

Usual ways of this approach is restrictions and checks with machinery, additions of high-level statements in a language (including libraries), special clear structures of language, and etc. In other words, this shifts a part of the work from a programmer to a machine and simplifies perception of programs. As it is noted in literature, constructions of this kind can some increase *the time of a writing* (of a program). But *the total time of a development*, as a rule, can be (considerably) less since *the time of a testing* and *a debugging* is less. In addition, a program is better worked out and clearer, the number of errors is fewer, its reliability is higher, its maintenance is simpler. In some sense, a program is more self-documented.

Sometimes, maybe, elements of deduction are included in a language. But deduction (at the present level of the development) can be very expensive, complex, and tangled. In whole, at the present time, deduction is rather an experimental tool and a handwork than a extensively used language's tool. It does not mean, of course, that the author disclaims importance of deduction. He does not call for the disorderly chaotic and intuitively-naive programming. On the contrary, an elaborate design facilitates a success. However, the author met examples in which clear language's constructions were much more persuasive than complicated tangled formal proofs. These language's constructions must, obviously, be very clear, reliability, and safety. (All this, naturally, does not impede a using of deduction.) In whole, the problem of software's reliability is very urgent and insistently requires its solution. This problem is multifaceted and, oddly enough, can go far beyond the actual programming. A good help, as it is commonly believed, can be a systematic (punctual) approach being supported by a language and other equipment. In this context, the author is assured that deduction's techniques will have contributed to the solution of this problem. What forms will it be in? The future will have shown.

Let us make a note on ones' opinion here. Some programmers suppose that a programmer should trust himself (but, certainly, not others) and does not check himself with language's tools (for example, with typification, a precondition, a post-condition, and etc.). Probably, every programmer must himself choose his strategy. But it could be noted (slightly exaggerating, of course) that if this was so then programs would not have (contain) errors, all programmers would write their programs with the most effective languages (that are assemblers and machine codes), debugs and compilers would not be, probably, needed, and etc. In other words, to rely upon oneself (and others) is necessary with great prudence. In whole, according to the modern views, a language, a compiler, a development environment, parsers, a run-time environment must comprehensively help a programmer to avoid making errors and to find those that have already been made.

Following folklore, it can be said (maybe some humorously) that every one of the programmers considers himself as an expert. It is quite possible that a programmer can adhere to his own (maybe very specific) concept of programming and can have his own judgment. (In whole, this can be considered as a norm since programmers, as all people, are rather diverse. They have different attainments, knowledges, experience, aims; it would be strange if their opinions were always coincident.) But speaking more seriously, the author supposes that whatever conceptions have been accepted of a programmer, it would be excellent if a programmer could *have a possibility* to choose suitable tools for himself.

*The following must be noted. It is applied to section 1. After this note had been written, some programmers noted (to the author) that these topics had been discussed earlier. Thus, for example, the article [1] was submitted at PLC'05, Las Vegas, NV, June 2005. But, on the other hand, all these discussions have not found any noticeable embodiments. The author considers these topics being quite interesting. Therefore, after having thought a little, he decided to retain these brief section. First of all, hoping that a languages developers' attention could be turned to these questions once more. In addition, the author has slightly changed this construction. The new design is slightly different from the proposed one in [1]. This new design is more flexible, although perhaps more compromise; it should be noted that this construction is developed in section 2. The author considers it is appropriate to give an example in support of the construction under discussion, as well (In fact, this section is composed of this example.).*

All these programming maxims, the author has allowed himself to remind here, ought to clarify the motives, the subject, and the purposes of these notes. The author is also grateful for valuable critical remarks and expresses his sincere appreciation to everyone he discussed these issues with; all shortcomings are, naturally, related to the author. So, let us get started...

**1. On the value null.** In whole, value `null` is used in programming widely enough (which is interpreted as an absence of a sensible value). Nevertheless, in general-purpose languages, references' (pointers') variables mainly use this value. Maybe, it should let ordinary variables to take value `null`. What is this for? Not all variables can have sensible values during computations. A value can have been not received yet, can being calculated (as yet), can be absent in some situations, and etc. Sometimes it is preferably to say this clearly.

Let us consider the following simple example. Let variable *Index\_Of\_First\_Zero\_Element* contain the index of the first zero element of array *Array\_A* :

```
Array_A      :   is array( Integer ) of Integer ;
Index_Of_First_Zero_Element  :   Integer ;
```

Everything is well if there is a zero element in array *Array\_A*. But if a zero element is absent then any *Integer*'s values are meaningless. Any assignments of integer type's values are methodologically wrong here. A careful programmer could only get slight irritation if he met an assignment like this. This variable will have some value, of course. Quite possibly that the type of this value will be *Integer*. But this will not be a proper content. An (accidental or deliberate) attempt of a using of this variable can quite cause errors in a program. Here an appropriate value is only **null**. A declaration of variables could be expressed, for example, as:

```
Index_Of_First_Zero_Element : Integer with null ;
```

This can be made for a whole type:

```
type Integer_Null is Integer with null ;
```

The syntax can be different, of course. Obviously, its start value of these variables (after of an compile-time elaboration) must be **null** unless otherwise has been provided. Next, if a domain has been expanded, it is necessary redefining operations for it. Obviously, if a variable has value **null** then this must not take part in primary basic ordinary expressions: so, for example, an attempt of an execution of the follow statements

```
Index_Of_First_Zero_Element := null ;
i := Index_Of_First_Zero_Element + 1 ;
```

must call an exception handler. This is an expression of that fact that it should not use a variable if it does not have a proper content. Obviously, a variable should be allowed to take part in comparative expressions and assignment statements:

```
Index_Of_First_Zero_Element := null ;
.....
if      Index_Of_First_Zero_Element = null
then   ... ;
```

The principle “*omnia mea mecum porto*” (all that's mine I carry with me), id est a grouping logically cohesive units together, is vary appropriate for cases of this kind. In whole, it can be said that this programming is more punctual and this structure is safer. This is especially handy if there are lots of variables of this kind. A creation of an object would be somewhat cumbersome in this case. An extension of an index's range is not the best solution too; this does not promote reliability, clarity, and readability of a program. It would be (deliberate) intermixing of different entities.

The proposing design considers using this value **null** as *an option*. Of course, the rejection of the global use of this value **null** is definitely a serious compromise. But this would allow relatively easy to include this design in an existing language. Although this is a question of a more extensive theoretical research and much depends on the optimizer.

**2. On an expanding of types.** So, auxiliary value **null** can be quite useful. But, as it can easily be noted, this word **null** is not the most informative. It can not be said that this provokes an occupational disease but having read words “**null**” and “**not null**” in some quantity, a programmer can feel some tiredness. This is similar to the situation that was in the early assembler languages, in which values “1” and “0” were very widely used. Perhaps, this is very good for a machine logic but this is not always good for human perception. Not always this conciseness promotes readability, reliability and safety. It is better to read more sensible expressions, certainly.

As it was mentioned above, a “base” value of a variable can be absent for many reasons: a value can be absent at all (in certain cases), can still have been not received, can still being calculated, can be discarded as questionable, can have been used by this moment, and etc. All these reasons could be

reflected with auxiliary values. In other words, it is quite possible not only indicating an absence of a “base” value with **null** but indicating a reason of an absence with additional auxiliary values. All these auxiliary values could improve readability and reliability of programs and could be used in **if**-statements and **case**-statements also. In a manner it is a specification of the value **null**.

Let us continue the consideration of the example (of the previous section). By implication (of the problem) we can select three options for the values of variable *Index\_Of\_First\_Zero\_Element*:

1. array A has not been received (and, accordingly, has not been processed);
2. array A has been received, has been processed but a zero element was absent;
3. array A has been received, has been processed and a zero element was present;

It can be noted that all these options are mutually exclusive. Thereby, there are two cases to use auxiliary values (in the third case the variable takes a usual integer's value). The first could be denoted as *Array\_A\_Has\_Not\_Been\_Received*. The second could be denoted as *Zero\_Element\_Is\_Absent*. It is quite possible, for clarity, that auxiliary values can have the prefix **null**:

1. **null**.*Array\_A\_Has\_Not\_Been\_Received*,
2. **null**.*Zero\_Element\_Is\_Absent*.

It could be something like the following:

```

type                                -- type declaration
    Type_Index_Of_First_Zero_Element is Integer -- basic type
with null                            -- auxiliary values
    Array_A_Has_Not_Been_Received,
    Zero_Element_Is_Absent

end Type_Index_Of_First_Zero_Element ; -- the end of this declaration

-- variable
declaration Index_Of_First_Zero_Element :
Type_Index_Of_First_Zero_Element;
```

Syntax can be different, of course. Here *Integer* is an initial (basic) type, the other values are auxiliary. It is a kind of some a types' union but it is not usual. (This is unusual because of the role that basic and auxiliary values play in statements.) It should be noted that basic and auxiliary types, obviously, must be considered as a single structure; otherwise weakening, softening of a type's control or types' conflicts are possible.

As earlier (in the previous section), if you design structures of this kind, a redefinition of operations and an addition of new attributes must obviously be done (an auxiliary value should be allowed to take part in comparative expressions and assignment statements but not in “usual” operations):

```

Index_Of_First_Zero_Element :=

null.Array_A_Has_Not_Been_Received ;

if Index_Of_First_Zero_Element = null.Zero_Element_Is_Absent
then ... ;
```

It goes without saying that this can be applied to accesses' variables too.

**3. On constant initializations.** As it is known, constants are convenient since it is difficult to modify them during a program execution. But it would be more convenient if facilities of their initialization were broader. In other words, usual tools of a programmer would be appropriate here (loops, if-statements, and etc). This could be a construction in the follow manner (like a procedure):

```

type Type_Array is array( Integer ) of Integer ;

One_Array : constant Type_Array := --- declaration
```

```

(
  for I in Integer loop --- and initialization
    if I = .....
    then One_Array( I ) := ...
    end if ;
  end loop ;
);

```

This would increase resources of using constants.

**4. On variables' status.** Continuing the previous topic, let us consider the follow situation. Let us presuppose that a programmer has decided not to update a value of variable *One\_Variable* any more (after a certain point of a program), that is, to use this variable only for reading. In order not to update this value accidentally, a statement “freeze” can be offered. This can be written down, for example, as

```
constant :: One_Variable := 5 * Other_Variable + ... ;
```

After this statement, variable *One\_Variable* becomes a “constant”. Thus a programmer gets a new constant during an execution of a program without any efforts. In whole, marking variables that have already been calculated is a good practice. This can also serve as an additional commentary, can discipline a programmer, and even can increase his assertiveness. Probably, a variable can have an attribute on “freezing” status.

Obviously, it should not mix statements “freeze” and assignments in disorder; otherwise conflicts are quite possible. Compiler diagnostics or an exception handler must help to find a programmer's mistake in this case.

A more radical statement can be offered to throw out a variable (as well as procedures, functions and etc) from a program (in order not to be in the way) if this variable is not needed more. For example,

```
away ( One_Variable, Second_Variable, ... ) ;
```

Many various options and variations of this statement could also be offered. For example, statement “unfreeze”. Or, for example, an effect of this statement can be bounded with a block (a provisional freezing):

```

One_Variable := 500 * X + 40 ... ;
Second_Variable := 700 * Y - 30 ... ;
Calculating_Block : ----- the begin of a new block
declare
                                ----- the provisional freezing
constant of Calculating_Block :: One_Variable,
                                Second_Variable, ... ;
.....
end Calculating_Block ; ----- the end of a new block

```

In whole, it can be noted that similar themes appear, for example, on questions of an restriction access to data and resources in the system programming.

**5. On complexity of languages, safe segments of programs, the functional programming, and modularity.** In a manner (maybe remotely) this section is addressed to the functional programming, which is commonly considered as a some reliable tool. It would be good if a programmer could write a program or its parts in a functional style (or in a resembling manner).

Let us consider the following note. This is related to functions, although it could be related to other program elements (procedures, blocks, objects, packages, tasks, etc.) too. It can be noted that in spite of some similarity the concept of a function in programming covers rather different designs. For example, programmers often distinguish safe functions from unsafe ones. What are the safe functions? This question requires a separate discussion. For example, if a function behaves like a mathematical function (id est functionally) then this is, in generally, considered being safe. If a

function refers to global variables in its body, opens files, allocates a memory, etc. (does something outside itself) then this function is usually considered being unsafe. Basing on this representation, a label of a safe function can be offered:

```
safe function One_Function ( ... ) ;
```

It should definitely be noted that perceiving these marks only as a kind of comments is not entirely true. Comments are not rigidly related (and are not identical) to programs; they represent only thoughts of a programmer. Formally, they are not connected absolutely. Programs do not always follow comments, from time to time it happens. In whole, it is not the best practice completely to rely upon comments (particularly in small details). This practice will not assist to get a profit. Generally speaking, comments can be anything to please. But, for example, if a programmer considers a using of a library and wants to be assured that side effects are absent then the labels of the library and its subroutines (supported and guaranteed with a compiler) would be a good addition to the library creator's comments. (A program having a lot of side effects is often surveyed, understood and modified with difficulty.) In other words, if a programmer wants to write of this style than he should be afforded this opportunity. (However, side effects can be very convenient in some cases. It can take place, for example, if side effects influence on data that are compact, small, self-contained, easy-surveyed, considered as a single essence (like an object). In this case they have effects but rather formality to some degree. Though, in each case, a programmer must decide himself whether it should be used or not.)

Let us emphasize that this can be attributed not only to functions but to other programming segments too. Different modes of editing, compiling, debugging, testing, pragmas' modes could be entered here. Moreover, maybe it makes sense to make a more subtle classification of functions: for example, classes of semi-safe functions and procedures (id est of new entities) and etc.

In vie of the aforesaid, let us touch a topic of functions in programming, which was discussed rather often; though sometimes it is discussed now too. It can very shortly be formulated of the following way. Should a function (in programming) be allowed that it could change its own parameters (like a procedure)? A function that changes its own parameters is not, obviously, a procedure. On the other hand, this is not a function in the usual mathematical sense and it is not safe. In the judgment of the author this is certainly the *third* essence and can be designate, for example, as “procedfunction” or in a similar manner. (All unsafe constructions should be attributed to a separate unsafe category.) Though, this is rather a theme for more extensive theoretical researches.

This question adjoins to a more general one that the author would like to dwell on some more. He would like to preface a few remarks to this. Modern languages tend to their considerable complication. Simplification of languages has begun taking the second, third or, maybe, tenth place. This alienates some programmers. And it is not only their own personal attitude. The growth of language complexity is, probably, unavoidable. But, with the growing of language's complexity, many issues of reliability, safety, verification of a languages and applications' programs have begun revealing themselves very much. There is some additional difficulty for Ada since the designers of the language set a goal to create an uniform integrated (practically, universal general-purpose) language (for their own purposes, particularly for real-time systems), which was partly put in order to reduce a number of used languages, to unify processes, to increase reliability. On the whole, this is an attractive idea, having its own logic and necessity. But will this language be controllable, handy, transparent and manageable? Or, will this language be huge and be expanded extensionally, boundless and unmanageable?... For Ada, which was always attributed to the most complex languages, this problem was (and is) actual enough.

In whole, programmers (in a majority, at least) agree that simplicity is a very important factor of reliability. “*The price of reliability is the pursuit of the utmost simplicity.*” - the quote is attributed to C. A. R. Hoare. But, obviously, achievement of absolute simplicity is not always possible. As it is known, a simple language (a low-level language) can be implemented easily and, in this sense, it is reliable. But writing programs with this language is hard enough. If a language is large and complex (a high-level language), its implementation is, as a rule, less reliable (usually, the larger a system, the many more errors (including rough ones) it contains and the harder to find them). But programs of this language are usually much more readable, shorter and more reliable, writing them is faster and easier



(on conditions, of course, that the language is not tangle and is transparent). It is quite clear that this contradiction is fundamental enough. So, how much should complexity be pushed in programs and how much in a language?

On the other hand, modularity is a well-established conception in programming. We could define (in a big language) a few sub-languages of diverse degrees of complexity and reliability (for example, a functional sub-language; although, the degree of compatibility of the functional and object-oriented concepts is an interesting question...). These sub-languages must, obviously, be marked well. A programmer could write programs with simple sub-languages, using more complex sub-languages as necessary. The semantics of statements must not depend on a sub-language, obviously. In whole, a safe language is determined of various factors. It is particularly interesting and important for a programmer to know what kinds of constructions are allowed (and not allowed) of a language for him to use.

In whole, this part of the section can rather be considered as a suggestion-wish. Of course, this work is not simple and it can be fully comparable to a creation of a new language. Though, this is somewhat of different theme.

After these notes had been written, the author met a similar design in Internet. It was the keyword “**unsafe**” for modules in language MODULA-3, which was created in 1986-1988 years. Some sketchy comments on MODULA-3 can be found, for example, in [3–5]. In addition, several resembling words on the functional programming were said by A. V. Klimov, A. I. Adamovich at the conference National Supercomputing Forum, Pereslavl-Zalessky, November-December, 2017 [2], though on an other occasion. Well, some coincidence of the views is good.

**6. On tree's structures and statement return.** The safe programming supposes, among other things, that a programmer must very clear envisage a program structure. In this context, a will of a programmer using simple clear structures is quite understandable. Tree's structures are reckoned as sufficient attractive here. They are considered being clearer then complex tangled graphs. They are usually simpler, contains fewer bugs, are tested and verified easier and faster. In whole, it can be said that a building of various hierarchies and orders is rather appreciable work in programming and all these *tree-like structures of data* are often used by programmers and can be very extensive. Their wholeness is usually supported with special procedures. But *tree-like statements* are usually limited enough (for example, these statements **if**, **if-then-else-then-else**, **case**). There is, certainly, some asymmetry here. It would not be bad if a programmer had a more spacious tree-like statement (as a single statement). But it must be convenient, of course. Obviously, this can be realized in various ways. Hereinafter this item can be considered as a light attempt on this subject, which the author would like to propose.

Let us imagine, for a start, that we want to implement an algorithm corresponding to a parse tree (or another algorithm corresponding to a tree's structure). We can implement this, for example, with a procedure-statement  $Tree\_Parse(P_1, \dots, P_k)$  and its subprocedures, which implement this tree's structure (this procedure can have a special mark in the declaration, for example,

```
tree procedure  $Tree\_Parse ( P_1, \dots, P_k ) ;$ 
```

or in a like manner). The main point, we would like to concentrate on, is a termination of the computations (of this procedure-statement  $Tree\_Parse$ ).

Let us suppose, further, that its sub-procedure  $F$  has fulfilled required operations. Logically and for the sake of program's clarity, it is desirable that the procedure  $Tree\_Parse$  (and its subroutines) could complete its work as soon as possible (before a programmer would begin making new bugs). In other words, it is desirable (in the body of subroutine  $Tree\_Parse$ 's  $F$ ) a statement like the following:

```
 $Tree\_Parse.$ return (  $t_1, \dots, t_k$  );
```

It can be noted that this statement (as any ones that complete a computing branch) makes a graph of a subprogram nearer to a tree. And, in this sense, the graph becomes clearer. Other decisions can be not so convenient here (multiple checks and returns, a call of an exception handler, a using of a **goto**-statement, and etc.).

There are some objections here. Let us consider the following situation. Suppose, for example, that certain  $F_j$  (a *Tree\_Parse's* sub-procedure) makes some unsafe actions (opens files, allocates memory, and etc). There is a practice (or, if you wish, a programming style) that consists in the following. Logically cohesive unsafe actions are tried to group together (in the same subroutine). Otherwise, if they are separated, a programmer can forget about remaining actions (to close files, to free memory and etc) and they will not be written and executed. An occurrence of this kind can quite happen here. There can be a few decisions here. One of the language stock decisions is a restraint of the class of these subroutines (where this **return** can be used). Or, for example, **return** could occur in those places where unsafe actions had not begun yet.

Another question is “What to do if we have a recursive function?”. The purpose of this design is a simplification of a program structure. For the recursive functions, probably, similar simplifications will not add clarity. Therefore a suitable solution is, likely, to ban this statement for the recursive functions.

**7. On complementary statements.** This tiny suggestion, which is a light draft, has concern with statements that are viewed of a programmer as complementary (for example, an opening and a closing of a file, an allocation and a deallocation of memory, and etc). For example, a programmer can make a decision that if he have allocated memory  $M$ , he must (later but in foreseeable future) free this memory  $M$  without fail.

It would be wonderfully if these intentions could be implemented with a syntax. Syntax itself can be very various here. We could link two statements in a complementary pair, for example, either in time of the first statement's calling (thereby “pointing out” another (complementary) statement) or in a declaration area (if they are in different units of a compilation or, in other words, if it is necessary to extend their visibility scope). For example, it can be something like the follow:

```
complementary.Open(  $F, \dots$  );
.....
complementary.Close(  $F$  );
```

This construction seems to be very alluring to the author, though, on the other hand, there are some difficulties here. For example, there are similar constructions almost in all languages, these are left and right brackets. But, excepting simple cases, they are used rather different. Thus, for example, a statement “open file” can be placed in **if**-statements and a statement “close file” outside. A program can begin branching, so several statements “close file” can be necessary for one statement “open file”. A syntax must very well be worked out here.

The author would like to draw attention that he considers this rather as a (maybe modest) tool against, for example, memory leak (which is the serious problem in programing) then as a convenient counter for a programmer. In addition, it is the good style to express programmer's intention clearly; this decreases a quantity of comments and does a program more reliable and clearer.

Using constructors and destructors in the object-oriented programming (OOP) we could attempt to create a similar construction but OOP is rather cumbersome (it can be rather tiresome to create an object for every tick). Besides, not all languages support OOP.

**8. On declarations of indexes' subtypes and variables.** This tiny item related to Ada solely. The author pays attention to this topic since programmers work with arrays often and often, and this work requires some attention. As it is known, language Ada allows an implicit declarator of a counter in a **for**-statement:

```
for  $I$  in  $Array\_A$ 'Range loop
   $Array\_A[I]$  := .....
end loop
```

Let us suppose that a programmer wants to process array's components and its indexes. It is quite reasonable if the programmer would like to create indexes' variables of the correspond subtype (fit for array  $A$ ):

```

subtype Subtype_Array_A_Index is Type_Indexes
           range Array_A'First .. Array_A'Last ;
I, J, K, L : Subtype_Array_A_Index ; -- variables' declaration

```

id est in order that values of the variables *I, J, K, L* do not go out of the indexes' limits (of array *Array\_A*). But this construction is some cumbersome, especially if there is a lot of variables. Perhaps, a construction

```

I, J, K, L : Array_A'Range ; -- variables' declaration

```

is more convenient as in case of a **for**-statement. As far as the author knows, (at least) some Ada's compilers do not permit this construction.

It should be required, however, (for the safe programming) that the scope of these variables must not include statements that change the index's range of array *Array\_A* (otherwise their types can be unmatched). If an array is static, this always takes place. If an array is dynamic, this may not be but (rather often) the variables' visibility can easily be limited (localized) by the instrumentality of blocks, procedures, functions, and etc. On the other hand, if a mismatch has happened for all this then it means that a programmer had made a mistake somewhere and a call of an exception handler ought to help a programmer to find one.

Another question is “What to do if the indexes' boundaries (in a case if array *Array\_A* is dynamic) has not been defined (by mistake)?”. In this case, probably, an exception handler must be called.

This construction has the following advantages:

- 1 . it is shorter;
- 2 . a programmer does not have a need to read and to think of constants in this expression;
- 3 . a successful compilation of this expression would show a programmer that the utilization of these variables is safe enough.

**9. A few words on graphical tools and on some other points.** If we turn to the sources, it can be noted the following. Although graphical representations and a graphical processing seemed to somebody no strictly something, it should be recognized that they had great expressive power. Thus, many programmers supposed that widespread commercial success of some well known software products and software companies had been achieved with using of quick and easy graphics' interfaces (as one of the main factors). This does not absolutely disparage from adepts of a command line, which is a powerful tool of a programmer; it only means that a graphic shape of certain information can be more convenient then a text. Though it could be noted also that a good visualization and visibility changed situation not only in programming. It would be wonderful if compiler developers began more actively to develop tools in this field.

They could improve visualization of calculations, debugging, a graph's presentation of programs, memory work, fast manipulations of modes, data, etc. Maybe, tools for graph's processing would be very useful. Maybe, a compiler's insert of (special) comments or values of variables (fully or partially) into the text of a program (together or instead of variables, of course optional) could be a useful tool of program's debugging. Particular interest is a visualization of parallel calculations and debugging. The author considers that these questions are sufficiently important in hands-on programming.

Tools of this kind are particularly appropriate since verifications of programs are often not carried out, but are carried out some testing and debugging instead of them. However, these tools could certainly be useful for well-developed programs, too, since a program is a set of instructions that must be executed literally and any inaccuracies or typos are not allowed.

**Conclusion.** An implementation of the most part of these proposals does not have any appreciable difficulties and big expenditures. They entail an additional language's complication. But this complication is quite natural and this increase is more “additive” than “multiplicative”. Thus, for example, a use of a value **null** and its specification can hardly cause any difficulties; a tree-like structure control of a parse procedure-statement does not offer any difficulty; attribution of constants (during an compile-time elaboration) could be made, probably, by a good trained student, and etc. The author supposes that these humble proposals can be useful and improve quality of programmer's work.

## References

1. Heinlein C. Null values in programming languages. *Proceedings of the 2005 International Conference on Programming Languages and Compilers (PLC 2005)*, Las Vegas, Nevada, USA, 27–30 June, 2005. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/221271111\\_Null\\_Values\\_in\\_Programming\\_Languages](https://www.researchgate.net/publication/221271111_Null_Values_in_Programming_Languages) (accessed 13.04.2019).
2. Klimov A., Adamovich A. Can parallel programs be deterministic by construction? Problem statement. *National Supercomputing Forum (NSCF 2017)*, Pereslavl-Zalessky, Russia, November-December 2017. Available at: <http://2018.nscf.ru/nscf-eng/> (accessed 13.04.2019).
3. Freeman S. *Partial Revelation and Mjdule-3*. Available at: <https://www.cs.tut.fi/lintula/manual/modula3/modula-3/html/partial-rev/index.html> (accessed 13.04.2019).
4. *Modula-3*. Available at: <https://en.wikipedia.org/wiki/Modula-3> (accessed 13.04.2019).
5. Wyant G. Introducing modula-3. *Linux Journal*, 1 December, 1994. Available at: <https://www.linuxjournal.com/article/9> (accessed 13.04.2019).

## Information about the author

Alexander V. Leont'ev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences, Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl Region, Russia.  
E-mail: alex@leont.botik.ru; psi@botik.ru

## Информация об авторе

Леонтьев Александр Владимирович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт программных систем Российской академии наук, Переславль-Залесский, Ярославская область, Россия.  
E-mail: alex@leont.botik.ru; psi@botik.ru

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)

**АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ**  
**COMPUTER-AIDED DESIGN**

УДК 004.942; 531.16; 681.516.2

Поступила в редакцию 28.08.2019  
Received 28.08.2019

Принята к публикации 18.10.2019  
Accepted 18.10.2019

**Разработка системы управления учебным роботом-манипулятором параллельной структуры с применением технологии модельно-ориентированного проектирования**

**Г. А. Прокопович**

*Объединенный институт проблем информатики  
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
E-mail: rprakapovich@robotics.by*

**Аннотация.** Описан процесс разработки сложного механического устройства с микроконтроллерным управлением на основе использования технологии модельно-ориентированного проектирования и программных продуктов Mathworks. Объектом разработки являлся робот-манипулятор на базе механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы. Для создания микроконтроллерной системы управления манипулятором предложено решение обратной задачи кинематики, работоспособность которого была доказана с помощью динамической компьютерной модели из плоских геометрических примитивов в среде MATLAB. С помощью пакета Simscape Multibody на основе трехмерной модели проектируемого объекта был проведен анализ его физических свойств. Работоспособность аппаратной части системы управления была доказана с помощью пакета Embedded Systems, который также позволил сгенерировать исполнительный код для выбранной микроконтроллерной платы Arduino Mega 2560. Созданный параллельный манипулятор представляет собой действующее электромеханическое устройство с циклическим микроконтроллерным управлением, позволяющим перемещать в пространстве подвижную платформу по заранее заложенным траекториям.

**Ключевые слова:** имитационное моделирование, параллельный манипулятор, гексапод, обратная задача кинематики, управление, микроконтроллер

**Благодарности.** Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта SERI SFG450 и задания ГПНИ ИК813.

**Для цитирования.** Прокопович, Г. А. Разработка системы управления учебным роботом-манипулятором параллельной структуры с применением технологии модельно-ориентированного проектирования / Г. А. Прокопович // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 99–114.

---

---

**Development of a control system for an educational robot manipulator of a parallel structure using model-based design**

**Ryhor A. Prakapovich**

*The United Institute of Informatics Problems of the National Academy  
of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
E-mail: rprakapovich@robotics.by*

**Abstract.** The development of a complex mechanical device with microcontroller control using of model-based design and Mathworks software products is described. The object was a robotic arm based on a parallel structure mechanism with six degrees of freedom. To create a microcontroller control system for this manipulator,

a solution to the inverse kinematics problem was proposed. The operability of the model was proved using a moving computer model of geometric primitives in MATLAB. Analysis of the physical properties of developing object was carried out on the basis of its three-dimensional model, implemented by Simscape Multibody package and composed of solid-state models. The operability of the control system hardware was proved by Embedded Systems Toolbox, which also allowed to generate an executive code for selected Arduino Mega 2560 microcontroller board. The manipulator is a complete electromechanical device with cyclic microcontroller control, which allows to move the moving platform according to the predefined trajectories.

**Keywords:** simulation, parallel manipulator, hexapod, kinematics inverse problem, control, microcontroller

**Acknowledgements.** This work was supported in part by a grant from the SERI SFG450 grant and assignment from GPNI IK813.

**For citation.** Prapakovich R. A. Development of a control system for an educational robot manipulator of a parallel structure using model-based design. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 99–114 (in Russian).

**Введение.** В настоящее время в различных областях науки и техники наблюдается нехватка возможностей традиционных роботов-манипуляторов, от которых требуется прецизионная точность при функционировании в пространствах со сложными связями и ограничениями. К таким условиям можно отнести работу в открытом космосе, хирургические операции на живых тканях, манипулирование микро- и наночастицами, наведение телескопов и антенн, перемещение тяжеловесных грузов по сложной траектории и т. д. Типовой робот-манипулятор представляет собой разомкнутую цепь звеньев механической системы, последовательно соединенных друг с другом с помощью различных кинематических пар (рис. 1, *а*). Как правило, один конец цепи жестко закреплен на станине, а второй содержит исполнительный орган и свободно перемещается в пространстве [1]. Из-за того что в типовых манипуляторах силовые приводные устройства интегрированы в звенья, они имеют низкий показатель грузоподъемности, характеризуются высокими статическими и динамическими ошибками.

Одним из способов преодоления указанных недостатков является использование манипуляторов на основе механизмов параллельной структуры (рис. 1, *б*). Параллельный манипулятор (ПМ) классифицируется как сложный пространственный механизм, состоящий из подвижной (платформа) и неподвижной (основа) жестких рам, соединенных минимум двумя параллельными кинематическими цепями (опорами) [2]. Каждая кинематическая цепь ПМ включает основу, подвижные звенья и платформу, соединенные между собой соответствующими шарнирами. Перемещение платформы относительно основания достигается благодаря синхронному и согласованному изменению длин опор.

Благодаря своей уникальной кинематике ПМ отличаются от последовательных манипуляторов лучшими динамическими свойствами, более высокой точностью и повторяемостью [3]. Например, перспективным является применение роботов-манипуляторов на основе механизмов параллельной структуры для механической обработки изделий сложной формы, инспекции и ремонта обшивки космических кораблей, проведения подводных исследований, контроля трубопроводов атомных электростанций, в авиа- и наземных тренажерах, ортопедической хирургии, мобильной робототехнике и др. [4–6].

Несмотря на то что ПМ создаются как универсальные устройства, которые могут использоваться в самых разных ситуациях, ввиду их технических и экономических особенностей они проектируются с учетом конкретных задач и функций. Однако анализ и синтез кинематики, геометрии рабочего пространства и систем управления ПМ являются достаточно сложными процессами. Трудности при построении моделей указанных роботов обусловлены взаимным влиянием параллельных опор. Это приводит к ограничению степеней подвижности и сложности задания движений манипулятора в обобщенных координатах, а также появлению анизотропии и неоднородности его динамических, упругих и скоростных свойств [5].

Учитывая изложенное выше, а также востребованность и возрастающий коммерческий интерес к ПМ в различных отраслях, актуальность приобретает задача разработки эффективных методик их проектирования и расчета.

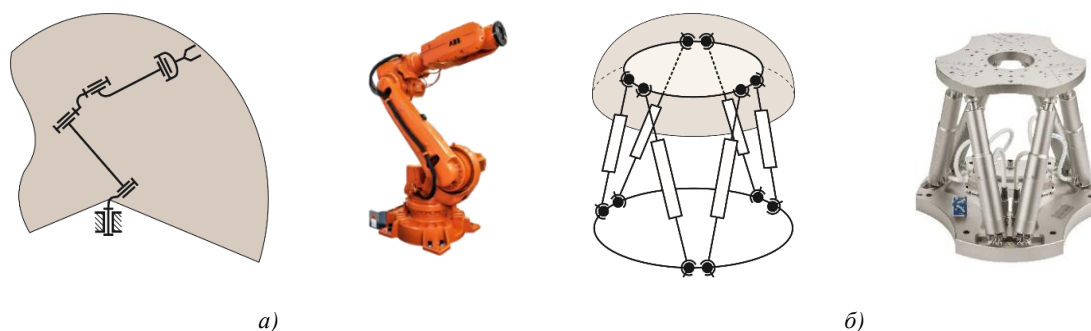


Рис. 1. Сравнение кинематических структур манипуляторов: а) разомкнутая; б) замкнутая

**Объект разработки.** Одними из самых известных и востребованных манипуляторов параллельной структуры являются манипуляторы, выполненные в виде платформы Гю – Стюарта [3–5, 7]. Как правило, подобные платформы называются гексаподами, которые обладают тремя поступательными и тремя вращательными степенями свободы.

Наиболее распространенными компоновками гексаподов являются октаэдр (рис. 2, а) и усеченная шестигранный пирамида (рис. 2, б). У таких гексаподов число шарнирных узлов, к которым крепятся концы опор, на платформе и основании совпадают. Благодаря большой жесткости компоновка в виде октаэдра широко используется в металлорежущих станках-гексаподах и различных подъемных механизмах. Пирамидальная компоновка из-за недостаточной жесткости применяется в менее ответственных установках, в которых изготовление сложных составных шарниров неоправдано. Однако она широко используется при расчетах и анализе кинематических и динамических характеристик механизмов параллельной структуры. Вместе с тем на практике можно встретить и промежуточный вариант компоновки (рис. 2, в).

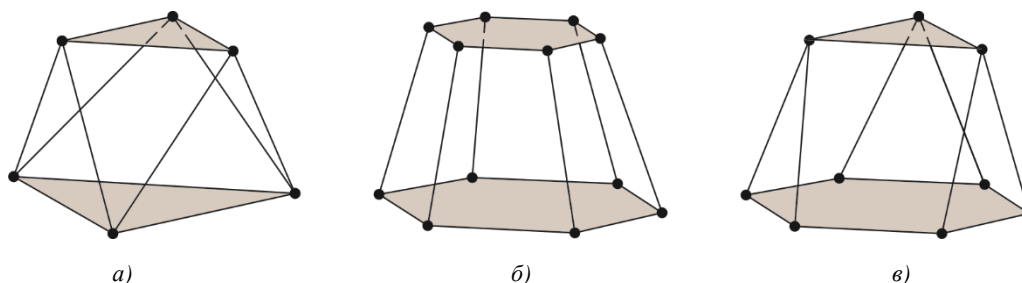


Рис. 2. Варианты компоновки гексаподов: а) октаэдр; б) усеченная пирамида; в) смешанная пирамида

В качестве актуаторов используются как линейные, так и угловые силовые приводы. Большинство разработанных гексаподов предназначены для удержания больших нагрузок. В связи с этим их геометрия проектируется таким образом, чтобы опоры работали на сжатие и растяжение [7]. Поэтому чаще всего встречаются гексаподы с гидравлическими, шариковыми и даже пневматическими линейными приводами, которые требуют наличия высокоточных датчиков линейного перемещения. Это также влияет на сложность и конечную цену устройства. Помимо высокой цены гексаподы с линейными приводами имеют достаточно большие габариты. Учитывая все вышперечисленное, в образовательных целях чаще всего используют гексаподы с угловыми приводами на основе стандартных серводвигателей, содержащих в своем корпусе датчики угла поворота. Таким образом, когда перед авторами была поставлена задача спроектировать недорогой учебный ПМ, они использовали второй принцип. Особенностью нового манипулятора являлось то, что его необходимо было создать на элементной базе уже известного конструктора RoboCake (URL: [http://uiip.bas-net.by/structure/l\\_rts/lit\\_Prakarovich.php](http://uiip.bas-net.by/structure/l_rts/lit_Prakarovich.php)). Образовательный робототехнический конструктор RoboCake представляет собой реконфигурируемый корпус в виде шестигранной призмы, содержащий мно-

жество универсальных технологических отверстий. С помощью таких отверстий можно устанавливать и закреплять большое количество современных сенсоров и датчиков, а также микропроцессорных и микроконтроллерных вычислительных устройств. При этом необходимо было задействовать как можно больше уже имеющихся элементов указанного конструктора и реализовать программное обеспечение таким образом, чтобы система управления ПМ была максимально универсальной и масштабируемой под различные образовательные и практические задачи.

Учитывая геометрические и технические особенности робототехнического конструктора RoboCake, было предложено взять за основу компоновку гексапода, изображенного на рис. 2, в. Таким образом, полученный ПМ состоит из нижнего неподвижного основания, которое представляет собой шестигранную призму, и верхней подвижной платформы, представляющей собой плоскую крышку для корпуса из того же набора (рис. 3).

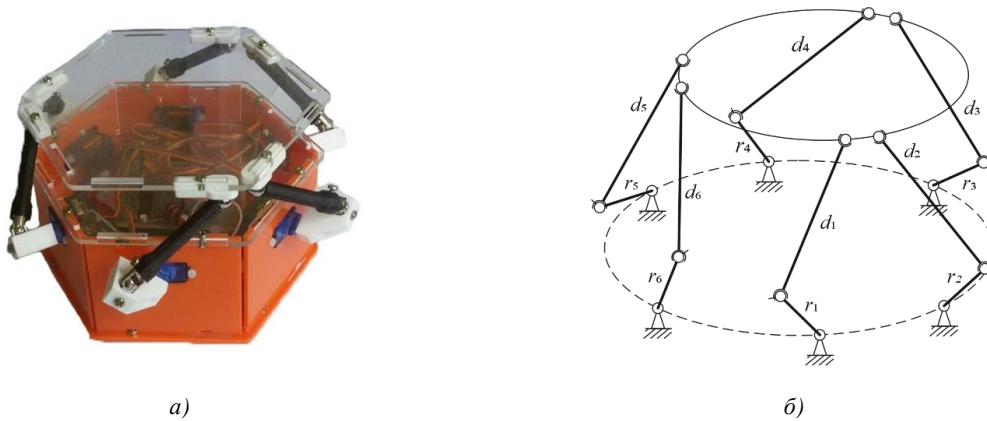


Рис. 3. Внешний вид и кинематическая схема предложенного ПМ

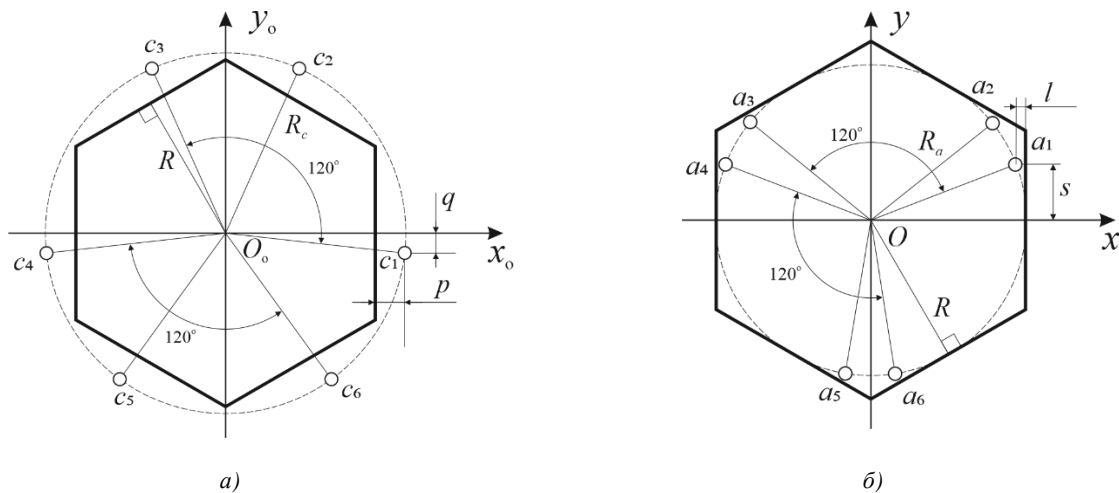


Рис. 4. Расположение шарниров: а) на основании ПМ; б) на платформе ПМ

Платформа соединяется с основанием шестью подвижными опорами, каждая из которых представляет собой кривошипно-шатунную структуру (рис. 3, б). Обозначим через  $a_i$  сферические шарниры на подвижной платформе (рис. 4, б);  $b_i$  – универсальные (карданные) шарниры между кривошипами и шатунами;  $c_i$  – поворотные шарниры на основании (рис. 4, а);  $O_0$  – центр основания;  $O$  – центр платформы;  $R$  – радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник крышки корпуса;  $R_a$  – расстояние от центра платформы до расположенных на ней шарниров;  $R_c$  – расстояние от центра основания до расположенных на нем шарниров;  $r_i$  – длины нижних стержней, называемых кривошипами;  $d_i$  – длины стержней, называемых



шатунами и присоединенных к кривошипам через шарниры  $b_i$  соответственно, где  $i = \overline{1,6}$ . Кривошипы приводятся во вращение микросерводвигателями, которые также входят в комплект конструктора. Шарниры основания и платформы располагаются попарно и на одинаковом расстоянии от их центров, угол между парами шарниров  $c_1 - c_3$ ,  $c_4 - c_6$ ,  $a_1 - a_3$ ,  $a_4 - a_6$  и т. д. составляет  $120^\circ$  (рис. 4). При этом плоскости вращения кривошипов параллельны соответствующим боковым граням корпуса ПМ, к которым крепятся их серводвигатели.

Таким образом, помимо стандартных деталей описанного конструктора, на 3D-принтере дополнительно были изготовлены шатуны, кривошипы и крепления для сферических шарниров, устанавливаемых в пазы на платформе. После того как этап сборки механической части был полностью завершен, требовалось выполнить наиболее ответственную часть всего проекта – разработать и создать программно-аппаратный комплекс системы управления описанным роботом. Для этого необходимо было выполнить следующие задачи: построить математическую модель, описывающую предложенную выше механическую систему; на основе построенной модели решить обратную задачу кинематики (ОЗК) и произвести необходимые расчеты для определения углов поворота кривошипов; построить экспериментальную установку для верификации полученной математической модели и проверки достоверности произведенных вычислений.

**Парадигма модельно-ориентированного проектирования.** Современные экономические реалии и жесткая конкуренция заставляют производителей высокотехнологичных товаров пересматривать классические модели итеративного проектирования (рис. 5, а), особенно когда в него вовлечены несколько коллективов. Основными недостатками спиральной парадигмы проектирования, до сих пор применяющейся на большинстве предприятий, является использование:

- технической документации в текстовом виде, которая не позволяет в полной мере составить достаточно глубокие требования и спецификации к проектируемому объекту;
- раннего прототипирования, результаты которого, как правило, являются сырыми, а изготовление самих прототипов – сложным и неоправданно дорогим;
- разнородных программных средств для реализации системы управления, которые ввиду человеческого фактора делают весь процесс ненадежным.

Поэтому традиционное тестирование на конечном этапе проверки всей системы приводит к обнаружению ошибок, когда что-то кардинально менять становится уже слишком поздно и дорого.

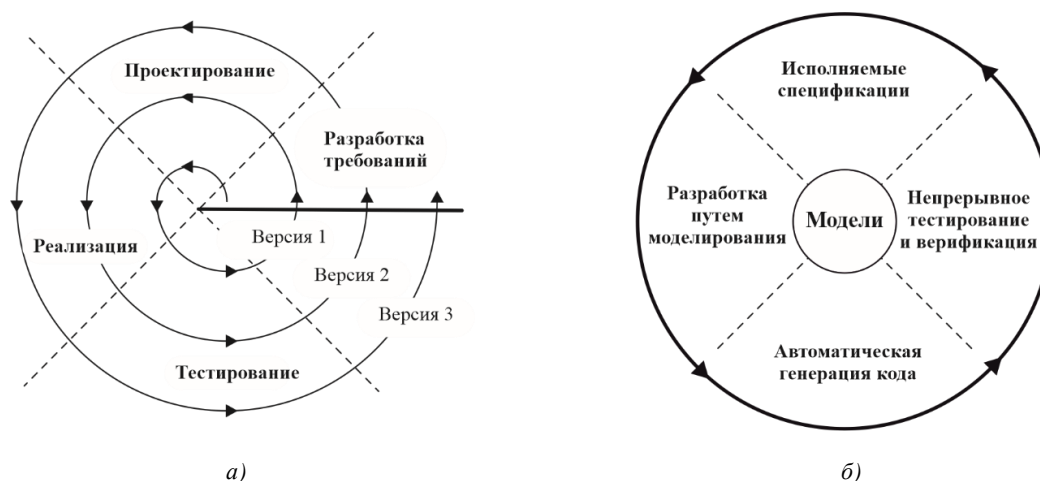


Рис. 5. Различные парадигмы проектирования: а) спиральная; б) модельно-ориентированная

Одним из современных способов организации процессов проектирования сложных технических систем является использование парадигмы модельно-ориентированного проектирования (МОП) [8, 9]. Суть МОП заключается в создании полного технического описания только на базе

3D-моделей и связанных с ними элементов данных (рис. 5, б). Таким образом, МОП представляет собой процесс проектирования, который опирается на использование наглядной имитационной модели будущего изделия. При этом имитационная модель является основным носителем информации о концепции, особенностях конструкции и конечной реализации проектируемого изделия. Она используется на протяжении всех стадий процесса проектирования: от исследования и конструирования до практической реализации и проведения приемо-сдаточных испытаний. Покомпонентное моделирование позволяет определять входные и выходные параметры систем, моделировать изделия на требуемом уровне детализации и реализовывать их автоматическое документирование. В результате моделируемые спецификации обеспечивают отсутствие двусмысленности и тесное взаимодействие участвующих команд разработчиков.

Относительно программно реализованной инструментальной среды рабочая имитационная модель является набором типов данных, в которую вносятся конструкторские изменения по мере ее уточнения и детализации. При этом на каждом этапе модель гармонично обновляется и эволюционирует. МОП гарантирует полное прослеживание состава ее параметров и другой конструкторской информации на всех этапах проектирования (URL: <https://matlab.ru/solutions/mbd/mbd>), что позволяет разным подразделениям (конструкторскому, проектному, аналитическому, производственному, снабжения и контроля качества) получать доступ к общему полному цифровому определению изделия.

Основными этапами реализации МОП являются:

- построение аналитической и имитационной моделей объекта управления;
- анализ объекта и построение необходимого регулятора;
- совместное моделирование объекта и его системы управления;
- совместная работа модели объекта с реальной системой управления и наоборот;
- реализация системы управления на реальном объекте.

Одним из лидеров по разработке программно-аппаратного обеспечения для реализации парадигмы МОП является компания Mathworks. Благодаря тому что данная компания большое внимание уделяет образовательному и научному направлениям, ее основные продукты, такие как MATLAB и Simulink, хорошо известны и весьма доступны для большинства высших учебных заведений. Учитывая вышеуказанные требования, было решено реализовать процесс разработки учебного ПМ именно на основе продуктов Mathworks.

**Математическая модель.** Построение аналитической модели выбранного объекта заключается в основном в решении его ОЗК, которая для предложенного ПМ с шестью степенями свободы на базе кривошипно-шатунного механизма формулируется следующим образом: необходимо определить углы поворота кривошипов, позволяющих достичь заранее заданное положение верхней платформы в пространстве.

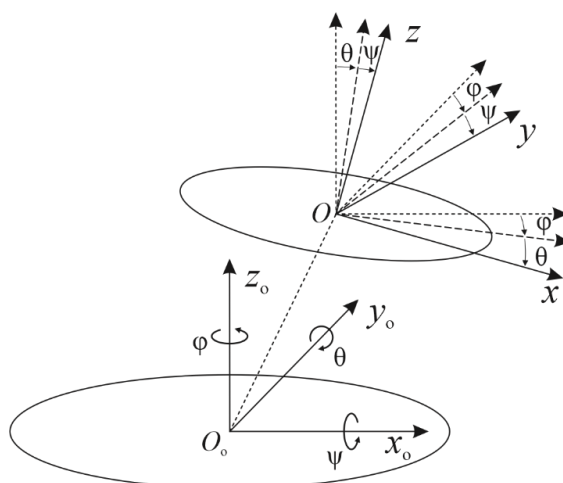


Рис. 6. Принятые системы координат

Свяжем с неподвижной платформой абсолютную систему координат  $O_0x_0y_0z_0$ . Точку отсчета совместим с центром платформы – точкой  $O_0$ , ось  $O_0x_0$  проведем через центры первой и четвертой боковых граней корпуса ПМ, ось  $O_0z_0$  направим перпендикулярно плоскости основания, а ось  $O_0y_0$  расположим так, чтобы получилась правая система координат (рис. 6). Аналогичным образом построим локальную систему координат  $Oxyz$ , связанную с подвижной платформой в точке  $O$ .

Следовательно, начало координат платформы  $O$  будет определяться с помощью трех поступательных перемещений  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  относительно основания. Ориентацию подвижной платформы по отношению к неподвижному основанию будем определять с помощью системы углов Эйлера, основанной на углах крена, тангажа и рыскания. Данная система широко используется в авиации при описании движения аппаратов относительно неподвижной глобальной системы отсчета, связанной с поверхностью Земли. Аналогичным образом в процессе выполнения ПМ различных технологических операций происходит постоянное перемещение платформы относительно неподвижного основания, к которому привязана глобальная система отсчета  $O_0x_0y_0z_0$ . Указанные углы соответствуют следующей последовательности поворотов: поворот на угол  $\psi$  вокруг оси  $O_0x_0$  (рысканье), поворот на угол  $\theta$  вокруг оси  $O_0y_0$  (тангаж) и поворот на угол  $\varphi$  вокруг оси  $O_0z_0$  (крен). Тогда результирующая матрица вращения подвижной платформы по отношению к основанию определяется формулой

$$R_{\psi,\theta,\varphi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\psi\sin\theta - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\psi\sin\theta + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Геометрическое отношение между подвижной платформой, обладающей шестью степенями свободы, и неподвижным основанием представим с помощью матрицы однородных преобразований

$$T_{6\text{DOF}} = \begin{bmatrix} & \Delta x \\ R_{\psi,\theta,\varphi} & \Delta y \\ & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $R_{\psi,\theta,\varphi}$  – матрица вращения (1) размером  $3 \times 3$ ;  $[\Delta x, \Delta y, \Delta z]^T$  – вектор-столбец координат точки  $O$  в абсолютной системе отсчета; вектор-строка  $[0, 0, 0]$  задает преобразование перспективы; четвертый диагональный элемент является глобальным масштабирующим множителем, в нашем случае – единицей. Определим новое положение  $i$ -го шарнира подвижной платформы в абсолютной системе координат в виде вектора-столбца  $\mathbf{a}'_i$  относительно локальных координат  $\mathbf{a}_i$  платформы:

$$\mathbf{a}'_i = [x_i \quad y_i \quad z_i \quad 1]^T = T_{6\text{DOF}} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

в котором четвертую координату, равную единице, далее будем игнорировать.

Таким образом, формулы преобразований (1)–(3) задают координаты подвижной платформы в абсолютной системе координат при ее поступательном смещении на значения  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  и вращении вокруг трех осей на углы  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ .

Найдем соответствующие углы поворота кривошипов. Для этого рассмотрим плоскость  $O'_0y'_0z'_0$ , которая была получена путем параллельного переноса плоскости  $O_0y_0z_0$  вдоль оси  $O_0x_0$  из точки  $O_0$  в точку  $O'_0$  на расстояние  $(R+p)$ . В результате точка  $c_1$  принадлежит новой

плоскости (рис. 7). Отсюда следует, что вращение первого кривошипа происходит в плоскости  $O'_0y'_0z'_0$ . На рис. 7 приняты следующие обозначения: точка  $A$  – шарнир  $a_1$ ; точка  $B$  – шарнир  $b_1$ ; точка  $C$  – шарнир  $c_1$ ; точка  $E$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на плоскость  $O'_0y'_0z'_0$ ; точка  $D$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $E$  на ось  $O'_0y'_0$ . Таким образом, отрезок  $BC = r$  является длиной кривошипа,  $AB = d$  – длиной шатуна, а искомым является угол  $\alpha_3$  поворота кривошипа  $BC$ . Угол  $\alpha_3$  состоит из суммы двух других смежных углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , значения которых можно определить с помощью теоремы косинусов. Для этого найдем недостающие значения остальных отрезков из  $\triangle BCE$  и  $\triangle DCE$ .

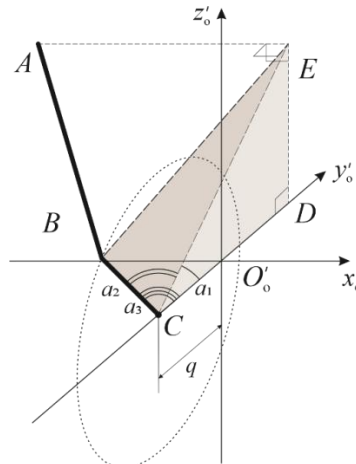


Рис. 7. Кривошип

Отрезки  $AE$ ,  $CD$  и  $DE$  служат проекциями вектора  $\overline{AC}$  на оси  $O'_0x'_0$ ,  $O'_0y'_0$  и  $O'_0z'_0$  соответственно. Так как  $c_1 = C$ ,  $C \in O'_0y'_0z'_0$ , то  $[AE, CD, DE]^T = abs(\mathbf{a}'_1 - \mathbf{c}_1)$ . Тогда длины указанных отрезков для всех шести кривошипов будут определены путем проецирования векторов  $\overline{AC}_i$  на соответствующие плоскости, полученные путем вращения плоскости  $O'_0y'_0z'_0$  вокруг оси  $O_0z_0$  на углы, кратные  $60^\circ$ . Следовательно, отрезки  $AE$ ,  $CD$  и  $DE$  для всех шести кривошипов будут находиться следующим образом:

$$\begin{bmatrix} AE_i \\ CD_i \\ DE_i \end{bmatrix} = abs(\mathbf{R}_i^T \cdot \overline{AC}_i) = abs \left( \begin{bmatrix} \cos(\pi/3 \cdot (i-1)) & -\sin(\pi/3 \cdot (i-1)) & 0 \\ \sin(\pi/3 \cdot (i-1)) & \cos(\pi/3 \cdot (i-1)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot [\mathbf{a}'_i - \mathbf{c}_i] \right), \quad (4)$$

где  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{0,0,\varphi}$  – матрица поворота вокруг оси  $O_0z_0$  на угол  $\varphi$ , которую требуется транспонировать в связи с необходимостью реализовать обратное преобразование из глобальной системы отсчета в локальную.

Учитывая показанные на рис. 4 конструктивные особенности проектируемого ПМ, найдем координаты шарниров на неподвижном основании в абсолютной системе координат в виде соответствующих векторов-столбцов:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= (R + p, -q, 0)^T, \\ \mathbf{c}_2 &= ((R + p)\cos(\pi/3) - q\sin(\pi/3), (R + p)\sin(\pi/3) + q\cos(\pi/3), 0)^T, \\ \mathbf{c}_3 &= ((R + p)\cos(2\pi/3) + q\sin(2\pi/3), (R + p)\sin(2\pi/3) - q\cos(2\pi/3), 0)^T, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_4 &= (-(R+p), -q, 0)^T, \\ \mathbf{c}_5 &= ((R+p)\cos(4\pi/3) + q\sin(4\pi/3), (R+p)\sin(4\pi/3) - q\cos(4\pi/3), 0)^T, \\ \mathbf{c}_6 &= ((R+p)\cos(5\pi/3) - q\sin(5\pi/3), (R+p)\sin(5\pi/3) + q\cos(5\pi/3), 0)^T. \end{aligned} \quad (5)$$

Координаты шарниров на подвижной платформе в локальной системе координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (R-l, s, 0)^T, \\ \mathbf{a}_2 &= ((R-l)\cos(\pi/3) + s\sin(\pi/3), (R-l)\sin(\pi/3) - s\cos(\pi/3), 0)^T, \\ \mathbf{a}_3 &= ((R-l)\cos(2\pi/3) - s\sin(2\pi/3), (R-l)\sin(2\pi/3) + s\cos(2\pi/3), 0)^T, \\ \mathbf{a}_4 &= (-(R-l), s, 0)^T, \\ \mathbf{a}_5 &= ((R-l)\cos(4\pi/3) - s\sin(4\pi/3), (R-l)\sin(4\pi/3) + s\cos(4\pi/3), 0)^T, \\ \mathbf{a}_6 &= ((R-l)\cos(5\pi/3) + s\sin(5\pi/3), (R-l)\sin(5\pi/3) - s\cos(5\pi/3), 0)^T. \end{aligned} \quad (6)$$

Отрезки  $EB$  и  $EC$  являются соответственно проекциями отрезков  $AB$  и  $AC$  на плоскость  $O'_0y'_0z'_0$ , поэтому значения их длин находятся следующим образом:

$$EB = \sqrt{AB^2 - AE^2}; \quad (7)$$

$$EC = \sqrt{CD^2 - DE^2}. \quad (8)$$

Как уже отмечалось выше, чтобы найти углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , можно воспользоваться теоремой косинусов:

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{CD^2 + EC^2 - DE^2}{2CD \cdot EC}\right); \quad (9)$$

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{EC^2 + BC^2 - EB^2}{2EC \cdot BC}\right). \quad (10)$$

В связи с тем что нечетные опоры по отношению к четным расположены зеркально относительно оси  $O_0z_0$ , искомым углом находится по правилу

$$\alpha_3 = \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & \text{для } i = 1, 3, 5; \\ \pi - \alpha_1 - \alpha_2 & \text{для } i = 2, 4, 6. \end{cases} \quad (11)$$

Алгоритм решения ОЗК для разрабатываемого ПМ будет иметь следующий вид:

- 1) по формулам (5) рассчитать значения координат  $\mathbf{c}_i$  шарниров на основании;
- 2) по формулам (6) рассчитать значения координат  $\mathbf{a}_i$  шарниров на платформе;
- 3) задать требуемые значения  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  линейного перемещения по трем осям и положение платформы относительно основания с помощью углов  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ;
- 4) вычислить значения элементов матрицы однородных преобразований по формуле (2);
- 5) по формуле (3) определить новые координаты шарниров платформы в глобальной системе отсчета;
- 6) по формулам (4), (7)–(10) найти вспомогательные углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  для всех шести опор;

7) в зависимости от номера опоры по формуле (10) найти искомые углы поворота всех шести кривошипов.

На основе приведенного алгоритма в интерактивной среде программирования MATLAB был разработан скрипт, с помощью которого на примере плоских геометрических примитивов был промоделирован основной принцип функционирования кинематической схемы разрабатываемого ПМ (рис. 8, а). Размеры основных элементов ПМ были взяты из реального образца (см. рис. 3, а):  $R = 71,492$ ,  $r = 17,5$ ,  $d = 58$ ,  $s = 30$ ,  $p = 25$ ,  $q = 5,79$ ,  $l = 1,5$  мм. На рис. 8 голубой шестиугольник находится в плоскости  $O_0x_0y_0$  глобальной системы отсчета, а красный указывает на верхнюю границу шестиугольного корпуса самого ПМ.

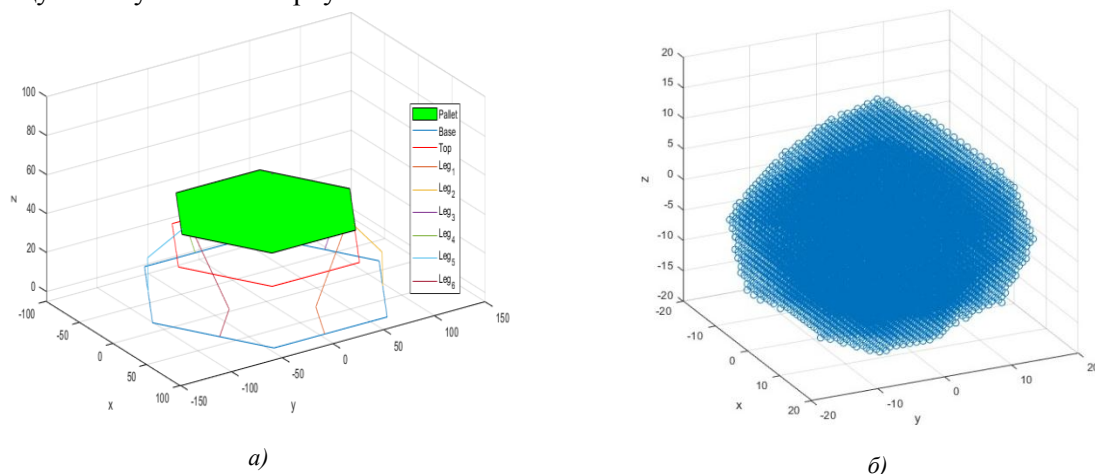


Рис. 8. Простейшая модель кинематической схемы разрабатываемого ПМ

Благодаря реализованной модели были подтверждены правильность и работоспособность предложенного решения ОЗК для разрабатываемого ПМ. Был проведен ряд численных экспериментов, с помощью которых была определена рабочая зона функционирования и перемещения центра подвижной платформы (рис. 8, б), причем объем полученного пространства составил  $0,64 \text{ дм}^3$ . Предельные значения перемещения платформы по каждой из шести координат составили:  $\psi \in [-0,20; 0,20]$ ,  $\theta \in [-0,17; 0,17]$ ,  $\phi \in [-0,20; 0,20]$ ,  $x \in [-15,6; 15,6]$ ,  $y \in [-15,1; 19,6]$  и  $z \in [-17,8; 17,9]$ . Углы указаны в радианах, а линейные перемещения – в миллиметрах. Все повороты и линейные перемещения по осям  $Ox$  и  $Oy$  производились при стационарном положении платформы вдоль оси  $Oz$  на высоте  $41,19$  мм в глобальной системе отсчета. На рис. 9 показана сильная нелинейная зависимость между движением платформы и соответствующими изменениями углов поворота кривошипов, а также значения изменения скоростей углов поворота всех шести кривошипов, необходимых для линейного циклического передвижения платформы всего лишь по одной оси  $O_0x_0$  со скоростью  $30 \text{ мм/с}$ .

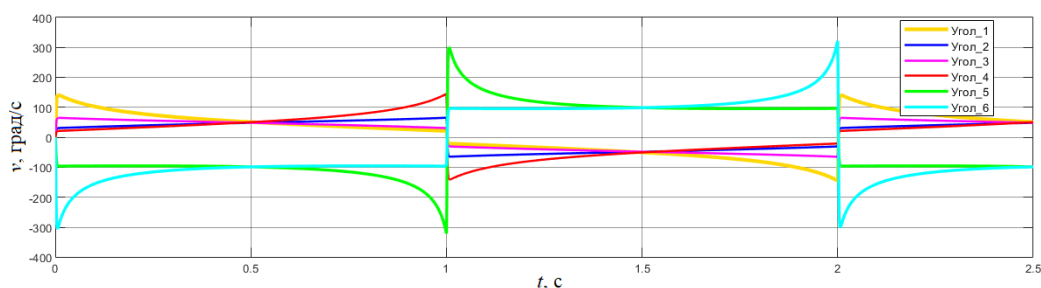


Рис. 9. Значения скоростей вращения кривошипов в процессе линейного перемещения платформы

Моделирование кинематики ПМ позволило получить первые характеристики его рабочей зоны. Однако полученные результаты не учитывали массогабаритные, инертные и другие физические параметры проектируемого ПМ, так как созданная модель состояла из отрезков

и плоских фигур. В связи с этим следующим этапом в реализации технологии модельно-ориентированного проектирования является создание полноценной имитационной модели ПМ.

**Эксперименты с имитационной моделью.** Для имитационного моделирования кинематики и динамики проектируемого ПМ была использована библиотека Simscape Multibody, которая предназначена для трехмерной симуляции многотельных механических систем. Благодаря Simscape Multibody можно моделировать многотельные системы при помощи блоков, которые являются представлениями тел, различных типов соединений, ограничительных связей и элементов силы.

Твердотельные тела могут быть представлены как в виде геометрических примитивов (сферы, цилиндра, параллелепипеда, тел вращения и др.), так и в виде отдельных CAD-моделей в форматах *.stl* и *.step*. Физические свойства тел определяются с точки зрения их массы, инерции и точек соединения. Тела могут соединяться при помощи типовых связей (линейных, поворотных, винтовых и т. д.), также на них могут накладываться различные ограничения. На основе построенной из блоков функциональной схемы и указанных в блоках параметров библиотека Simscape Multibody формулирует и решает уравнения движения для всей механической системы. Огромным ее преимуществом является то, что система Simulink позволяет подключать через соединения блоков виртуальные приводные механизмы из других своих библиотек. В результате элементы построенной механической системы могут перемещаться согласно сформированной схеме взаимодействия тел и ограничений.

На рис. 10 изображена схема построения ПМ с помощью библиотеки Simscape Multibody, на которой в качестве примера подробно указаны элементы одной из шести параллельных кинематических цепей – первой опоры:

- а) горизонтальный формообразующий элемент конструктора (основание) в виде правильного шестиугольника, по краям которого расположены фиксирующие продольные пазы;
- б) боковые стенки с технологическими отверстиями – креплениями для серводвигателей;
- в) серводвигатели;
- г) управляемые поворотные шарниры, имитирующие работу серводвигателей;
- д) кривошпы;
- е) карданные шарниры;
- ж) шатуны;
- з) сферические шарниры с креплениями;
- и) верхняя крышка (платформа) в виде правильного шестиугольника с пазами для магнитов.

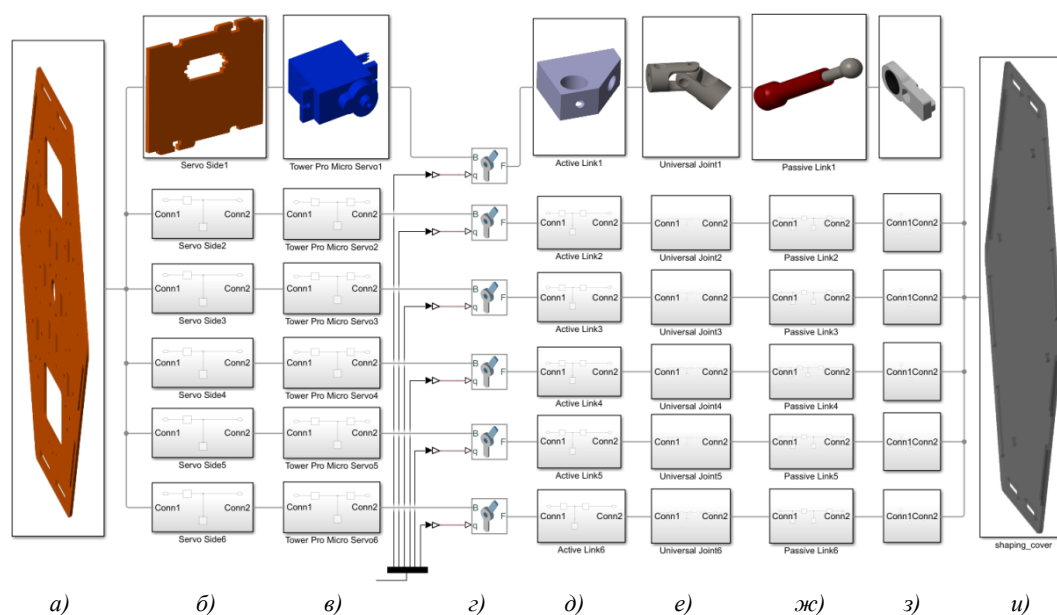


Рис. 10. Иерархия функциональных Simulink-блоков для построения механической модели разрабатываемого ПМ

Для удобства линии управляющих сигналов, используемых для задания углов вращения валов микросерводвигателей, сведены в единую шину. Библиотека Simscape Multibody позволяет автоматически генерировать 3D-анимацию для визуализации динамики полученной системы, моментальный снимок которой изображен на рис. 11, а демонстрационный видеоролик можно найти по адресу <https://www.youtube.com/watch?v=3dP0g6iG9Ik>. При создании виртуального корпуса ПМ с помощью Simulink-блоков одним из самых сложных процессов была сборка карданных шарниров, так как каждый из них состоял из трех отдельных элементов: двух вилок и крестовины. При этом требовался дополнительный геометрический расчет углов наклона крестовин четных и нечетных карданных шарниров, для того чтобы во время начала процесса моделирования центр подвижной платформы ПМ находился в стационарном положении.

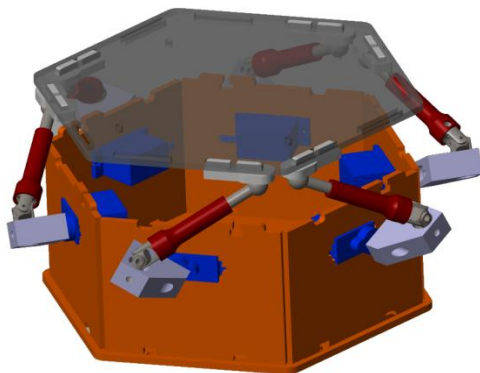


Рис. 11. 3D-модель ПМ в виртуальной среде

Значения инерции отдельных элементов вычислялись автоматически с помощью библиотеки Simscape Multibody на основе геометрических параметров, содержащихся в соответствующих САД-моделях, и предварительного ручного ввода значений массы элементов конструктора, полученных путем их взвешивания. Таким образом, первый этап реализации МОП был полностью завершен. Второй этап заключался в проведении анализа физических свойств полученного объекта.

Механическое вращение кривошипов реализовывалось с помощью микросерводвигателей Tower Pro SG90, которые имеют следующие характеристики: габариты –  $23 \times 12 \times 29$  мм, вес – 9–14,5 г (в зависимости от количества металлических шестерен), угол поворота выходного вала –  $180^\circ$ , напряжение – 4,8–6 В, вращающий момент – 1,8–2,5 кг·см (в зависимости от напряжения), скорость вращения выходного вала – 600 град/с.

Как было показано в предыдущем разделе, в разрабатываемой конструкции ПМ имеется сильная нелинейная зависимость между скоростью перемещения платформы и скоростью вращения валов микросерводвигателей. С целью разработки качественной системы управления ПМ требуется определить предельные значения его ключевых характеристик. К ним относятся максимально допустимые полезная нагрузка и скорость передвижения платформы. На рис. 12 показана схема проведения эксперимента, в которой использовались следующие элементы:

- а) управляющие сигналы в виде синусоид с амплитудами:
  - 0,1 рад для углов  $\psi$  и  $\theta$ ;
  - 0,08 рад для угла  $\varphi$ ;
  - 6 мм для перемещения вдоль осей  $x$  и  $y$ ;
  - 3 мм для оси  $z$ ;
- б) данные о геометрии ПМ для решения описанного в предыдущем разделе ОЗК:
  - начальные координаты шарниров на подвижной платформе в глобальной системе отсчета  $\mathbf{a}'_i$ , которые были записаны в массив AL;
  - радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник корпуса  $R$ ;
  - длина кривошипов  $r$ ;
  - длина шатунов  $d$ ;



- начальный угол поворота шатунов  $\alpha_3$  для выставления подвижной платформы в стационарное положение;
- в) программный модуль расчета ОЗК по предложенному выше способу, реализованный в виде  $m$ -функции;
- з) виртуальная модель ПМ, реализующая его кинематику и представленная в виде Simulink-блоков на рис. 10;
- д) виртуальные осциллографы, на дисплее которых выводятся значения скорости  $v$  и ускорения  $a$  центра подвижной платформы, а также угловая скорость  $\omega$  и вращающий момент  $M$ , возникающие на валах соответствующих микросерводвигателей.

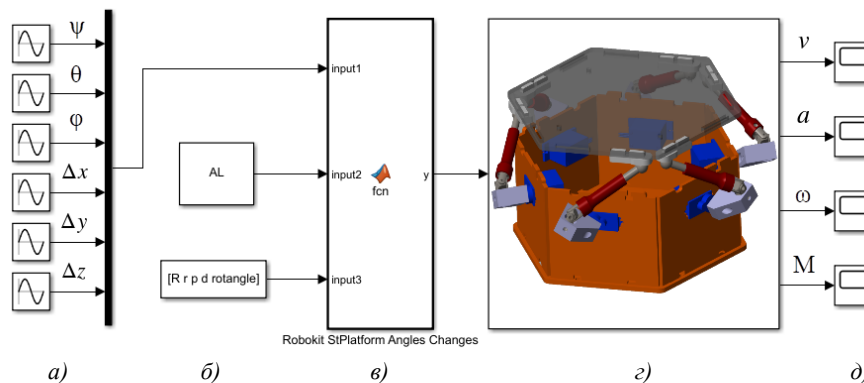


Рис. 12. Модель для проведения экспериментов с виртуальным ПМ в среде Simulink

Таким образом, для получения экспериментальных данных в модельной среде была реализована система управления ПМ, что соответствует уже третьему этапу реализации МОП. Полученная взаимная интеграция указанных этапов МОП лишний раз подтверждает целостность и прозрачность выбранного подхода. На основе разработанной имитационной модели был проведен ряд экспериментов, в которых при постепенно увеличивающихся массе полезной нагрузки и скорости перемещения платформы замерялись вращающий момент  $M$  и скорость вращения  $v$  выходных валов виртуальных микросерводвигателей. Замеры осуществлялись при помощи сенсорных свойств шарнирных примитивов, которые позволяют получить с идеальной точностью значения положения, скорости, ускорения и силовых параметров ведомого фрейма относительно базового фрейма по трем осям. Полученные значения вращающих моментов (рис. 13, а) и скоростей вращения (рис. 13, б) выходных валов микросерводвигателей остаются в пределах, допустимых их производителями. На основе моделирования были определены максимально допустимые значения искомых управляющих параметров проектируемого ПМ: линейная скорость – не более 50 мм/с, ускорение – не более 0,3 g, полезная нагрузка – не более 150 г.

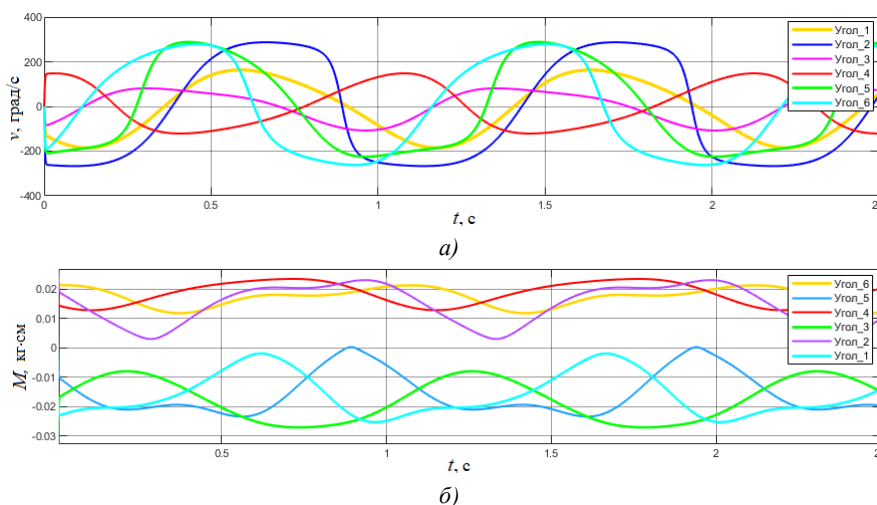


Рис. 13. Значения вращающих моментов (а) и скоростей вращения (б) выходных валов микросерводвигателей

На рис. 13 видно, что при указанных нагрузках требуемый вращающий момент максимально приблизился к допустимым значениям, а по скорости вращения валов еще остается запас.

На основе полученной модели ПМ также был проведен ряд численных экспериментов по определению точности перемещения его подвижной платформы. Для этого после блока решения ОЗК в нее принудительно вводился шум, соответствующий допустимым значениям ошибок поворота валов микросерводвигателей. Амплитуда шума основывалась на документации производителя и составляла  $1^\circ$ . В результате было получено, что при добавлении шума на все микросерводвигатели среднеквадратичная ошибка составляет всего 9,9 мкм, а при добавлении указанного шума на выборочные микросерводвигатели ошибка будет больше: 24,7 мкм для одного микросерводвигателя и 30,0 мкм для трех. Это доказывает, что благодаря уникальной кинематике ПМ ошибки, возникающие в их приводах, не накапливаются, а, наоборот, нивелируются. Таким образом, по сравнению с классическими манипуляторами разомкнутой структуры ПМ имеют гораздо большую точность и жесткость.

**Тестирование разработанной системы управления.** После выполнения первых трех этапов МОП требовалось решить, на какой аппаратной платформе будет реализована система управления ПМ. Так как разрабатываемый ПМ предназначен прежде всего для применения в образовательных целях, было предложено воспользоваться хорошо известной линейкой микропроцессорных плат семейства Arduino. В связи с наличием цифровых и аналоговых портов ввода-вывода и трех основных интерфейсов (UART, SPI, I2C) микроконтроллерные платы Arduino обладают возможностью работы с большим количеством датчиков и сенсоров, а также достаточно широким набором плат расширения. Благодаря своему широкому распространению и использованию в образовательной сфере платы Arduino были включены в список поддерживаемых аппаратных платформ MATLAB и Simulink в виде Embedded Systems Toolbox. Это позволяет эффективно моделировать, программировать и верифицировать достаточно сложные микропроцессорные системы управления, применяя все имеющееся многообразие функций и алгоритмов указанных программных сред.

На рис. 14 показан принцип проведения эксперимента по управлению реальным ПМ. Программная модель системы управления (рис. 14, а), запущенная на компьютере в среде Simulink (рис. 14, б), с помощью указанного выше вспомогательного пакета Simulink Support Package for Arduino Hardware генерирует и загружает управляющий код в микропроцессорную плату Arduino Mega 2560 по USB-интерфейсу (рис. 14, в). Данный пакет позволяет пользователю получить доступ ко всем имеющимся в указанной плате цифровым и аналоговым портам ввода-вывода, интерфейсам и т. д.

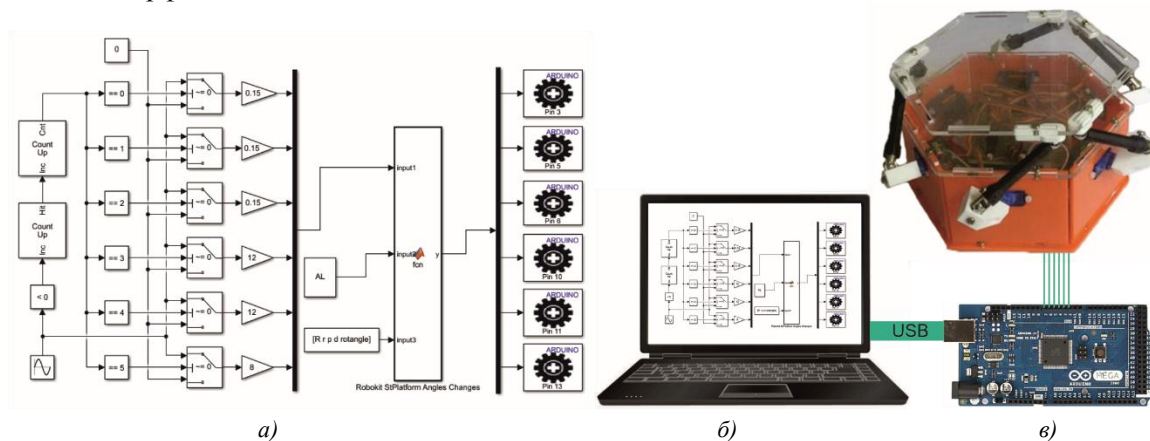


Рис. 14. Схема проведения эксперимента с реальным объектом управления

На основе полученных команд микропроцессорная плата Arduino сгенерировала на цифровых портах сигналы широтно-импульсной модуляции, которые были соединены со входами соответствующих микросерводвигателей, и платформа ПМ перемещалась по требуемой траектории. Указанный эксперимент продемонстрировал работоспособность проектируемого ПМ, синхронная работа всех шести опор которого позволила последовательно вращать и переме-

щать платформу вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ , т. е. двигаться по заданной траектории, используя все шесть степеней свободы.

После положительного завершения четвертого этапа МОП был реализован полноценный учебный стенд, который состоял из следующих элементов:

- механического ПМ, опоры которого приводились в движение шестью микросерводвигателями (см. рис. 3, *a*);
- системы управления на основе микроконтроллерной платы Arduino Mega 2560;
- системы автономного питания, включающей Li-Ion-батарею напряжением 7,8 В, и двух понижающих преобразователей напряжения постоянного тока для отдельного питания электроники и силовой части (микросерводвигателей).

Необходимые траектории движения платформы ПМ записывались в аппаратную часть микроконтроллерной системы управления заранее через USB-интерфейс. При этом если траекторию движения платформы можно было представить компактно в виде циклически повторяющихся комбинаций непрерывных функций (как, например, на рис. 14, *a*), то управляющая программа содержала предложенный способ решения ОЗК и контроллер постоянно пересчитывал требуемые углы поворота кривошипов. В другом случае ОЗК решалась на компьютере, а в контроллер уже записывался двухмерный массив, содержащий значения углов поворота для всех кривошипов через одинаковые промежутки времени. После запуска системы данный массив считывался из памяти циклически.

**Заключение.** Благодаря применению технологии МОП за пять последовательных этапов было спроектировано, протестировано и изготовлено законченное электромеханическое устройство с микроконтроллерным управлением. Полученный ПМ обладает шестью степенями свободы и способен перемещать полезный груз массой 150 г со скоростью 50 мм/с в рабочей зоне каплевидной формы и объемом 0,64 дм<sup>3</sup>.

Процесс реализации МОП был выполнен с помощью целого ряда программных продуктов Mathworks, что позволило эффективно и беспрепятственно их комбинировать. Посредством среды и языка программирования MATLAB была доказана работоспособность предложенного способа решения ОЗК для конкретного ПМ. Пакет Simulink Simscape Multibody дал возможность реализовать трехмерную твердотельную модель подвижного механического объекта, которая максимально точно имитирует физические свойства проектируемого манипулятора. Пакет Simulink Support Package for Arduino Hardware позволил не только смоделировать аппаратную часть будущей системы управления, но и сгенерировать управляющие программы для реализации различных траекторий движения платформы ПМ на реальной микроконтроллерной плате Arduino Mega 2560.

Применение технологии МОП позволило значительно сократить сроки разработки сложного механического устройства и его системы управления. Сложность управления любым параллельным механизмом заключается в том, что при несогласованной работе его подвижных опор отрицательными результатами будет не только рассогласование с требуемой траекторией движения платформы, но и выход из строя всего механизма из-за заклинивания его подвижных элементов.

#### Список использованных источников

1. Шахинпур, М. Курс робототехники : пер. с англ. / М. Шахинпур. – М. : Мир, 1990. – 527 с.
2. Merlet, J. P. Parallel Robots / J. P. Merlet. – 2nd ed. – Heidelberg : Springer, 2005. – 417 p.
3. Pandilov, Z. Comparison of the characteristics between serial and parallel robots / Z. Pandilov, V. Dukovski // Acta Technica Corvininensis – Bulletin of Engineering. – 2014. – Vol. 7(1). – P. 143–160.
4. Parallel Manipulators, Towards New Applications / ed. Wu Hwapeng. – Vienna : I-Tech, 2008. – 506 p.
5. Кун, С. Структурный синтез параллельных механизмов / С. Кун, К. Госселин ; пер. с англ. Л. А. Рыбак, А. В. Чичварина ; под ред. А. В. Синева. – М. : Физматлит, 2012. – 276 с.
6. Прокопович, Г. А. Мобильный робот с нулевым радиусом поворота / Г. А. Прокопович // Робототехника и техническая кибернетика. – 2015. – № 2(7). – С. 39–44.
7. Механизмы параллельной структуры в металлорежущих станках / Е. Б. Щелкунов [и др.] // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2012. – № 12. – С. 52–61.

8. Талукдер, Ю. З. Модельно-ориентированное проектирование систем автоматического управления в инженерном образовании / Ю. З. Талукдер // Научное обозрение. Технические науки. – 2014. – № 2. – С. 174–182.

9. Применение модельно-ориентированного проектирования к созданию АСУ ТП опасных промышленных объектов / С. С. Журавлев [и др.] // Вестн. НГУ. Сер. Информационные технологии. – 2018. – Т. 16, № 4. – С. 56–67.

---

## References

1. Shahinpoor M. *A Robot Engineering Textbook Hardcover*. Harperrcollins College Div, 1987, 480 p.
2. Merlet J. P. *Parallel Robots*. 2nd ed. Heidelberg, Springer, 2005, 417 p.
3. Pandilov Z., Dukovski V. Comparison of the characteristics between serial and parallel robots. *Acta Technica Corviniensis – Bulletin of Engineering*, 2014, vol. 7(1), pp. 143–160.
4. Wu Huapeng (ed.). *Parallel Manipulators, Towards New Applications*. Vienna, I-Tech, 2008, 506 p.
5. Kong X., Gosselin C. M. Type Synthesis of Parallel Mechanisms. *Springer Tracts in Advanced Robotics*, 2007, vol. 33, 276 p.
6. Prakapovich R. A. Mobil'nyj robot s nulevym radiusom povorota [Mobile robot with zero-turn]. *Robototekhnika i tekhnicheskaya kibernetika [Robotics and Technical Cybernetics]*, 2015, vol. 2(7), pp. 39–44 (in Russian).
7. Shchelkunov E. B., Vinogradov S. V., Shchelkunova M. E., Samar E. V. Mekhanizmy paralel'noj struktury v metallorezhushchih stankah [Mechanisms of parallel structure in metal-cutting machines]. *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Scientific notes of Komsomolsk-on-Amur State Technical University]*, 2012, vol. 12, pp. 52–61 (in Russian).
8. Talukder Yu. Z. Model'no-orientirovannoe proektirovanie sistem avtomaticheskogo upravleniya v inzhenernom obrazovanii [Model-oriented design of automatic control systems in engineering education]. *Nauchnoe obozrenie. Tekhnicheskie nauki [Scientific Review. Technical science]*, 2014, vol. 2, pp. 174–182 (in Russian).
9. Zhuravlev S. S., Rudometov S. V., Okol'nishnikov V. V., Shakirov S. R. Primenenie model'no-orientirovannogo proektirovaniya k sozdaniyu ASU TP opasnyh promyshlennyh ob"ektov [Application of model-oriented design to the creation of industrial control systems for hazardous industrial facilities]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Informacionnye tekhnologii [Bulletin of Novosibirsk State University. Series Information Technology]*, 2018, vol. 16, no. 4, pp. 56–67 (in Russian).

## Информация об авторе

Прокопович Григорий Александрович, кандидат технических наук, доцент, заведующий лабораторией робототехнических систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
E-mail: rprakapovich@robotics.by

## Information about the author

Ryhor A. Prakapovich, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Head of the Robotics Systems Department, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: rprakapovich@robotics.by



### ОРГАНИЗАТОРЫ

- Национальная академия наук Беларуси
- Государственное научное учреждение «Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси»
- Государственное научное учреждение «Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси»
- Научно-инженерное республиканское унитарное предприятие «Геоинформационные системы»

### ЦЕЛИ КОНГРЕССА

- Обсуждение новых достижений в космической области, определение приоритетных направлений развития космической тематики
- Укрепление международного сотрудничества в области космических исследований
- Расширение совместных усилий белорусских и зарубежных деловых кругов, фирм, компаний, ученых и специалистов, направленных на выполнение космических программ, анализ хода их реализации и выбор перспективных направлений дальнейших исследований
- Развитие партнерства правительственных и общественных организаций, предприятий и организаций разных форм собственности, заинтересованных в исследованиях и использовании космического пространства в мирных целях

### ТЕМАТИКА КОНГРЕССА

- Инновационные программы, проекты и технологии в ракетно-космической отрасли. Использование результатов космической деятельности в интересах различных отраслей экономики
- Космические аппараты, целевая и научная аппаратура. Системы навигационно-временного обеспечения, спутниковой связи и вещания
- Средства, технологии и методы обработки и отображения данных дистанционного зондирования Земли, геосервисы на их основе. Искусственный интеллект в космических технологиях
- Технологии обучения и подготовки кадров для космической отрасли
- Теплофизические аспекты практической космонавтики, перспективные материалы, элементы и устройства для космической техники

### РАБОЧИЕ ЯЗЫКИ КОНГРЕССА

Белорусский, русский, английский

**ВАЖНЫЕ ДАТЫ**

Подача заявки на участие и представление доклада	–	до 31 мая 2020 г.
Извещение о приеме доклада	–	до 5 сентября 2020 г.
Оплата оргвзноса по безналичному расчету	–	до 30 сентября 2020 г.

**ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ДОКЛАДА**

Доклады на конгресс представляются на белорусском, русском или английском языках по электронной почте. Белорусские авторы в **обязательном порядке** предоставляют также в оргкомитет конгресса **акт экспертизы** о возможности опубликования доклада в открытой печати (нарочным или письмом на почтовый адрес конгресса). Без такого документа доклад оргкомитетом не рассматривается.

Объем предоставляемых докладов – до четырех полных нумерованных страниц формата А4. Труды конгресса будут изданы к началу его работы.

Текст должен быть размещен в пределах рабочего поля 160×240 (верх/низ/лево/право – 25/32/25/25) мм, в одну колонку, с одинарным межстрочным интервалом, шрифт 12 пт Times New Roman. Доклад должен включать: УДК (в левом верхнем углу), название (прописными буквами), Ф. И. О. авторов, полное название организации, город, аннотацию (не более 100 слов, шрифт 10 пт), основной текст доклада.

Требования к оформлению докладов будут представлены на сайте конгресса.

Авторам докладов необходимо зарегистрироваться на сайте конгресса и указать полностью фамилию, имя и отчество, организацию, должность, ученую степень и ученое звание, почтовый адрес, телефоны, факс и e-mail для оперативной связи.

**ИНФОРМАЦИЯ О КОНГРЕССЕ**

Восьмой Белорусский космический конгресс будет проводиться в Минске в Объединенном институте проблем информатики НАН Беларуси и Институте тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова НАН Беларуси с **27 по 29 октября 2020 г.**

Для участия в работе конгресса необходимо **до 30 сентября 2020 г.** оплатить организационный взнос **по безналичному расчету**. Информация об уплате организационного взноса и реквизиты для оплаты будут предоставлены авторам принятых докладов.

В рамках проведения конгресса будет организована выставка научно-технической продукции космического назначения.

**ПОЧТОВЫЙ АДРЕС КОНГРЕССА**

Государственное научное учреждение «Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси» (ОИПИ НАН Беларуси), ул. Сурганова, 6, г. Минск, 220012, Беларусь.

**КОНТАКТЫ**

**Тел.:** +375-17-284 20 74 Кореняко Сергей Анатольевич  
+375-17-284 20 75 Телегин Виктор Викторович  
+375-17-284 20 98 Ляткевич Ирина Антоновна

**Факс:** +375-17-284 21 75

**E-mail:** cosmos8@tut.by

**Официальный сайт:** <http://sit.basnet.by/congress8>

**ХІХ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
«РАЗВИТИЕ ИНФОРМАТИЗАЦИИ И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ» (РИНТИ-2020)**

**19 ноября 2020 г., Минск, Беларусь**

**ЦЕЛИ КОНФЕРЕНЦИИ**

Анализ состояния и проблем развития информатизации (цифровой трансформации) экономики, социальной сферы, государственного управления и системы научно-технической информатизации в Республике Беларусь и за рубежом.

Разработка новых подходов к научно-методическому обеспечению развития информатизации и информационного общества (ИТ-страны, ИТ-государства), а также созданию информационных технологий и информационной инфраструктуры Беларуси.

Анализ хода реализации Стратегии развития информатизации и информационного общества в Республике Беларусь на 2016–2022 годы.

Разработка и внедрение автоматизированных систем научно-технической информации, корпоративных библиотечно-информационных систем автоматизации научных и научно-технических библиотек, автоматизированных систем информационного обеспечения научной, научно-технической и инновационной деятельности.

**ТЕМАТИКА КОНФЕРЕНЦИИ**

Анализ состояния и проблем развития единого информационного пространства, методы и средства обеспечения его формирования, использования и развития в интересах граждан, общества и государства.

Основные направления и технологии цифровой трансформации: электронное государство, цифровая экономика, электронная торговля и логистика, электронное обучение, электронное здравоохранение, электронные библиотеки, оцифровка культурного наследия, формирование национального электронного контента.

Формирование нормативно-правовой базы, интегрированной системы стандартизации (унификации), сертификации, экспертизы, оценки эффективности реализации программ и проектов в области информатизации и систем научно-технической информации.

Исследования и разработки, проводимые в рамках Межведомственного исследовательского центра искусственного интеллекта, Научно-технического центра технологий электронного государства Объединенного института проблем информатики НАН Беларуси.

Разработка и внедрение корпоративных систем научно-технической информации, библиотечно-информационных систем и технологий для автоматизации информационного обеспечения научной, научно-технической и инновационной деятельности. Публикационная активность ученых и организаций.

Научно-информационные компьютерные сети, технологии высокоскоростного информационного обмена между организациями с доступом в международные научно-образовательные сети.

Корпоративная сеть библиотек Беларуси и ее информационные ресурсы, генерация собственных информационных ресурсов, обеспечение доступа к национальным и зарубежным информационным ресурсам.

Региональная информатизация и информационная инфраструктура.

Обсуждение вопросов информационной поддержки науки и образования на основе современных информационно-телекоммуникационных технологий, организации единого научно-информационного пространства.

Социальные исследования цифровизации экономики и общества.

Психологические аспекты в информатизации.

## РАБОЧИЕ ЯЗЫКИ КОНФЕРЕНЦИИ

В качестве рабочих языков устанавливаются белорусский, русский и английский.

## ПОРЯДОК ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ДОКЛАДОВ

Представление докладов – до 10 августа 2020 г.

Доклады представляются в электронном виде на белорусском, русском или английском языках по электронной почте [vengerov@basnet.by](mailto:vengerov@basnet.by) или [griganec@bas-net.by](mailto:griganec@bas-net.by). Белорусские авторы предоставляют также акт экспертизы (экспертное заключение) о возможности опубликования доклада в открытой печати.

Доклады публикуются в сборнике докладов конференции.

Участие в конференции бесплатное.

Авторы докладов должны зарегистрироваться на сайте конференции и указать полностью фамилию, имя и отчество, организацию, должность, ученую степень и ученое звание, e-mail, телефоны.

Объем предоставляемых докладов – не более пяти нумерованных страниц формата А4.

Доклад должен включать: УДК (в левом верхнем углу); название; Ф. И. О. авторов; полное название организации, города, страны; аннотацию (не более 100 слов); текст доклада (с обязательными ссылками на литературу и рисунки); список литературы (если имеется), согласно требованиям ВАК по оформлению библиографического описания (<https://vak.gov.by/bibliographicDescription>).

Поля: верхнее – 2,5 см, нижнее – 3,2 см, левое – 2,5 см, правое – 2,5 см; абзацный отступ – 1,0 см. Интервал – одинарный. Текст доклада набирается с переносами.

При подготовке текста доклада необходимо использовать шрифты семейства Times New Roman Cyr следующих размеров и типов:

УДК – прописные 12 пт, в левом верхнем углу страницы.

**НАЗВАНИЕ ДОКЛАДА** – прописные полужирные 12 пт.

И. О. Фамилия(и) – строчные 12 пт.

Организация – строчные 12 пт; город, страна – строчные 12 пт.

*Аннотация* – курсив 10 пт (отступ слева и справа – 1 см).

**Заголовки разделов** – строчные полужирные 12 пт с абзацным отступом.

**Заголовки подразделов** – строчные полужирные курсив 12 пт, с абзацным отступом. Все заголовки должны быть выровнены по левому краю.

Основной текст – 12 пт без нумерации страниц.

В тексте доклада в возрастающем порядке должны быть указаны ссылки на литературу, а также на рисунки и таблицы (черно-белый формат, четко читаемый текст), если такие имеются.

Образцы оформления докладов представлены на сайте конференции.

Тексты докладов проходят научную и редакторскую обработку.

## АДРЕС КОНФЕРЕНЦИИ

220012, Республика Беларусь, Минск, ул. Сурганова, 6, ОИПИ НАН Беларуси  
(<http://www.uip.basnet.by>, <http://opac.bas-net.by/opacpage/rinti>, тел. +375 17 284-25-26).

### Председатель программного комитета:

Тузиков Александр Васильевич +375 17 284-21-75 [tuzikov@newman.bas-net.by](mailto:tuzikov@newman.bas-net.by)

### Заместители председателя программного комитета:

Кругликов Сергей Владимирович +375 17 284-09-85 [kruglikov\\_s@newman.bas-net.by](mailto:kruglikov_s@newman.bas-net.by)

Григанец Ромуальд Брониславович +375 17 284-25-26 [griganec@bas-net.by](mailto:griganec@bas-net.by)

### Ответственный секретарь:

Венгеров Виктор Николаевич +375 17 284-12-08 [vengerov@basnet.by](mailto:vengerov@basnet.by)

**E-mail:** [griganec@bas-net.by](mailto:griganec@bas-net.by), [vengerov@basnet.by](mailto:vengerov@basnet.by)



**УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ**  
**SCIENTISTS OF BELARUS**

**ПАМЯТИ ВЛАДИМИРА АНАТОЛЬЕВИЧА ЛАПИЦКОГО ПОСВЯЩАЕТСЯ...**



*Уходят те, кто уважаем и любим,  
внезапно, безвозвратно, безнадежно...  
Как трудно сердцем пережить людским  
И осознать... почти что невозможно...*

*Когда, казалось, зрелости расцвет  
И впереди путей еще так много,  
Но догорел заката яркий свет,  
И лишь одна «открыта» им дорога...*

*Бесследно спрячет время белый снег  
прошедших лет и дней давно минувших,  
Короткой жизни завершен пробег.*

*Господь, как видно, забирает лучших ...*

Ушел из жизни замечательный человек – наш коллега, товарищ, ученый и практик Владимир Анатольевич Лапицкий. Эти строки – наша скромная дань его памяти.

Владимир Анатольевич родился 10 марта 1963 г. в Гомеле в семье рабочего, белорус. После окончания школы № 36 поступил в Минское высшее инженерное зенитное ракетное училище ПВО, которое окончил в 1985 г. по специальности военный радиоинженер. После этого проходил службу в в/ч 33398. С 1989 г. В. А. Лапицкий занимается научно-исследовательской работой, обучается в очной адъюнктуре МВИЗРУ по специальности «Военная кибернетика, информатика» и в 1993 г. году защищает кандидатскую диссертацию. С 1995 по 2001 г. – период его работы на научных должностях в Военной академии Республики Беларусь, а с декабря 2001 г. он переходит на работу в Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси.

В ОИПИ НАН Беларуси Владимир Анатольевич прошел путь от старшего научного сотрудника до заместителя генерального директора по научной работе и одновременно заведующего лабораторией информационно-аналитических систем. Именно в ОИПИ НАН Беларуси он проявил свой талант ученого, организатора и стал наиболее известным в Беларуси специалистом в области разработки концепций, информационных моделей и научно-методических основ проектирования и эксплуатации распределенных проблемно-ориентированных информационно-аналитических систем медицинского назначения. Им было опубликовано свыше 100 научных работ, в том числе четыре монографии в соавторстве, получено в соавторстве два авторских свидетельства на изобретения, три патента Российской Федерации на изобретения, шесть патентов Республики Беларусь на полезные модели и два патента Российской Федерации на полезные модели.

Однако наибольшую известность Владимир Анатольевич Лапицкий получил благодаря своей неутомимой деятельности по внедрению в практику отечественного здравоохранения разрабатываемых его лабораторией медицинских информационных систем, автоматизирующих деятельность лечебных учреждений стационарного и амбулаторно-поликлинического типа, распределенных телемедицинских радиологических систем по цифровой флюорографии и по цифровой маммографии, республиканской системы «Травма», республиканской информационно-аналитической системы по медэкспертизе и реабилитации инвалидов Республики Беларусь и других систем, которые заложили прочную основу для информатизации всего отечественного здравоохранения. В настоящий момент системы, разработанные под руководством и при непосредственном участии В. А. Лапицкого, внедрены, эксплуатируются и сопровождаются более чем в 200 учреждениях и организациях Министерства здравоохранения Республики Беларусь в 36 городах страны.

Неоценим вклад В. А. Лапицкого в определение направлений информатизации здравоохранения Республики Беларусь. При его непосредственном участии в 2018 г. была разработана и сейчас реализуется Концепция развития электронного здравоохранения Республики Беларусь, определяющая пути информатизации отечественного здравоохранения.

Плодотворная деятельность Владимира Анатольевича была по заслугам оценена. В 2007 г. В. А. Лапицкий стал лауреатом премии НАН Беларуси 2007 г. за цикл научных работ «Информационные технологии и системы для медицины» (в соавторстве). В 2009 г. ему была установлена персональная надбавка Президента Республики Беларусь за выдающийся вклад в социально-экономическое развитие республики. В том же году он награжден Почетной грамотой Министерства здравоохранения Республики Беларусь за разработку и внедрение в медицинскую практику высокоэффективных технологий, а в 2012 г. – Почетной грамотой Государственного комитета по науке и технологиями Республики Беларусь за разработку и внедрение в медицинскую практику телемедицинских систем. В 2015 г. В. А. Лапицкий был награжден медалью «За трудовые заслуги» за большой личный вклад в развитие научно-технических разработок в области создания распределенных проблемно-ориентированных информационно-аналитических систем различного назначения и их широкое использование в Республике Беларусь.

Скромность, интеллигентность, сердечность, порядочность – все это черты, присущие Владимиру Анатольевичу Лапицкому, и его уход из жизни – невосполнимая утрата и боль для всего нашего коллектива.

## Правила для авторов

Редакция журнала «Информатика» просит авторов руководствоваться приведенными ниже правилами:

1. Статьи принимаются в редакцию через электронную систему подачи по адресу <http://inf.grid.by> в формате файлов текстовых редакторов Microsoft Word. Основной текст статьи не должен превышать 17 стр., включая рисунки, таблицы и достаточное количество наиболее актуальных ссылок; обзорной статьи – 10 стр., включая все основные ссылки. Текст набирается с переносами, шрифт Times New Roman 11 пт, интервал между строками одинарный, абзацный отступ 0,5 см, поля по 2,5 см со всех сторон.

Изложенный в статье материал должен быть четко структурированным: введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение (выводы).

2. Статьи о результатах работ, проведенных в научных учреждениях, должны иметь разрешение на публикацию (сопроводительное письмо за подписью руководителя или выписку из заседания ученого совета, отдела или кафедры, акт экспертизы).

3. Статья в обязательном порядке должна иметь следующую структуру: индекс по универсальной десятичной классификации (УДК); инициалы и фамилии всех авторов, название статьи, полное название учреждений, где работают авторы, с указанием города, страны, аннотацию (150–250 слов), подрисуночные надписи, названия таблиц и ключевые слова (7–10) на русском и английском языках, адрес электронной почты контактного лица.

4. Аннотация (авторское резюме) должна кратко представлять результаты работы и быть информативной, содержательной. Приветствуется структура аннотации, повторяющая структуру статьи и включающая введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение.

5. Формулы, рисунки, таблицы в статье нумеруются в соответствии с порядком их упоминания в тексте. Ссылки на рисунки и таблицы в тексте обязательны. Рисунки должны быть выполнены с хорошим разрешением в масштабе, позволяющем четко различать надписи и обозначения. Подрисуночные подписи с расшифровкой всех позиций, представленных на рисунке, набираются шрифтом гарнитуры основного текста размером 9 пт. Цветные иллюстрации печатаются только в том случае, когда это необходимо для понимания излагаемого материала.

6. Набор формул выполняется в формульном редакторе Microsoft Equation или Math Type. Прямым шрифтом набираются: греческие и русские буквы; математические символы ( $\sin$ ,  $\lg$ ,  $\infty$ ); символы химических элементов (C, Cl, СНС13); цифры (римские и арабские); векторы; индексы (верхние и нижние), являющиеся сокращениями слов. Курсивом набираются латинские буквы, символы физических величин (в том числе и в индексе).

7. Сокращения в тексте статьи (за исключением единиц измерения) могут быть использованы только после упоминания полного термина. Единицы измерения физических величин следует приводить в Международной системе единиц (СИ).

8. Цитируемые в статье фамилии авторов теорем, теорий, законов и т. д. следует приводить в скобках на языке оригинала после русского написания. Например, теорема Эйлера (Euler).

9. Список использованной литературы оформляется в соответствии с требованиями Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь (ГОСТ 7.5–2008). Номер литературной ссылки в тексте дается порядковым номером в квадратных скобках. Ссылаться на неопубликованные работы не допускается.

10. Отдельно приводится список цитированных источников в *романском* (латинском) алфавите со следующей структурой: авторы (транслитерация), название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация) [перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)], выходные данные с обозначениями на английском языке.

11. Поступившие в редакцию статьи направляются на рецензирование специалистам. Основным критерием целесообразности публикации является новизна и информативность статьи. Если по рекомендациям рецензента статья возвращается автору на доработку, а переработанная рукопись вновь рассматривается редколлегией, датой поступления считается день получения редакцией ее окончательного варианта. Статьи не по профилю журнала возвращаются авторам после заключения редколлегии.

12. Статьи, направляемые на доработку, должны быть возвращены в исправленном виде с ответами на все замечания.

13. Редакция журнала предоставляет возможность первоочередного опубликования статей, представленных лицами, которые осуществляют послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения.

14. Авторы несут ответственность за направление в редакцию статей, уже опубликованных ранее или принятых к публикации другими изданиями.

15. Редакция оставляет за собой право на редакционные изменения, не искажающие основное содержание статьи. Окончательное решение о публикации принимается редакционной коллегией.

## **Индексы**

**00827**

для индивидуальных  
подписчиков

**008272**

для предприятий и  
организаций