

ISSN 1816-0301

ИНФОРМАТИКА

2(54)

АПРЕЛЬ-ИЮНЬ
2017

Редакционная коллегия:

Главный редактор

А.В. Тузиков

Заместитель главного редактора

М.Я. Ковалев

Члены редколлегии

С.В. Абламейко, В.В. Анищенко, П.Н. Бибило, М.Н. Бобов,
А.Н. Дудин, С.Я. Килин, В.В. Краснопрошин, А.М. Крот, С.В. Кругликов,
С.П. Кундас, Н.А. Лиходед, П.П. Матус, С.В. Медведев, А.А. Петровский,
Ю.Н. Сотсков, Ю.С. Харин, А.Ф. Чернявский, В.Н. Ярмолик
Н.А. Рудая (*заведующая редакцией*)

Адрес редакции:

220012, Минск,
ул. Сурганова, 6, к. 305
тел. (017) 284-26-22
e-mail: rio@newman.bas-net.by
<http://uiip.bas-net.by>

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ИНФОРМАТИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

ИНФОРМАТИКА

ЕЖЕКВАРТАЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 2004 г.

№ 2(54) • апрель-июнь 2017

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- Полевиков В.К., Ерофеев В.Т.** Численное моделирование взаимодействия магнитного поля с цилиндрическим слоем магнитной жидкости5
- Шушкевич Г.Ч.** Моделирование поля электростатического диполя при наличии тонкой сплюснутой незамкнутой эллипсоидальной оболочки и плоскости14
- Крот А.М., Ткачева П.П., Спагар И.Н.** Компьютерное моделирование пароводяных потоков внутри рабочей камеры микротурбины и оценивание коэффициента полезного действия для усовершенствования конструкции турбоагрегата24

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

- Пузанов А.В.** Методика формирования САЕ-моделей на примере конструкторско-технологической проработки плунжера форсированной гидромашины37
- Бибило П.Н., Ланкевич Ю.Ю.** Минимизация многоуровневых представлений систем булевых функций на основе разложения Шеннона45
- Ярмолик В.Н., Мрозек И., Леванцевич В.А.** Псевдоисчерпывающее тестирование ОЗУ58

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ, ИЗОБРАЖЕНИЙ И РЕЧИ

Старовойтов В.В. Сингулярное разложение матриц в анализе цифровых изображений	70
Лысы С.І., Гецэвіч Ю.С. Генерацыя нацыянальнай транскрыпцыі тэкстаў на беларускай мове.....	84

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Маркевич В.Э. Аналитический синтез метода наведения сверхзвукового беспилотного летательного аппарата на основе многомерной нелинейной динамической модели	93
Козадаев К.В., Макаренко А.Е. Повышение точности инерциально-спутниковой навигационной системы в режиме неподвижности	113

КОНФЕРЕНЦИИ

XVI Международная конференция «Развитие информатизации и государственной системы научно-технической информации» (РИНТИ–2017)	121
---	-----

Редактор Г.Б. Гончаренко
Корректор А.А. Михайлова
Компьютерная верстка О.Б. Бутевич

Сдано в набор 28.04.2017. Подписано в печать 15.05.2017.
Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл. печ. л. 14,2. Уч.-изд. л. 14,0. Тираж 60 экз. Заказ 5.

Государственное научное учреждение «Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/274 от 04.04.2014.
ЛП № 02330/444 от 18.12.13.
Ул. Сурганова, 6, 220012, Минск.

THE UNITED INSTITUTE OF INFORMATICS PROBLEMS
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

INFORMATICS

PUBLISHED QUATERLY

Issued since 2004

№ 2(54) • April-June 2017

CONTENTS

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING

- Polevnikov V.K., Erofeenko V.T.** Numerical modeling the interaction of a magnetic field with a cylindrical magnetic fluid layer5
- Shushkevich G.Ch.** Simulation of the electrostatic dipole field in the presence of a thin unclosed oblate ellipsoidal shell and plane14
- Krot A.M., Tkachova P.P., Spagar I.N.** Computational modeling the superheated steam flows into the setting parts of microturbine and efficiency estimation for improvement of turboaggregate construction24

DESIGN AUTOMATION

- Puzanov A.V.** The method of forming CAE models on the example of design and technological elaboration of the plunger of forced hydromachine37
- Bibilo P.N., Lankevich Y.Y.** Minimizing the multilevel representations of systems of boolean functions based on Shannon decomposition45
- Yarmolik V.N., Mrozek I., Levantsevich B.A.** Pseudoexhaustive RAM testing58

SIGNAL, IMAGE AND SPEECH PROCESSING

Starovoitov V.V. Singular value decomposition in digital image analysis.....	70
Lysy S.I., Hetsevich Yu.S. Generating the national transcription of texts in Belarusian	84

INTELLIGENT SYSTEMS

Markevich V.E. Analytical synthesis of the method of targeting a supersonic unmanned aerial vehicle based on multi-dimensional nonlinear dynamic model.....	93
Kozadaev K.V., Makarenko A.E. Improving the accuracy of inertial-satellite navigation system in immobility mode	113

CONFERENCES

XVI International conference «The development of informatization and state system of scientific and technical information» (DISTI-2017)	121
--	-----

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.8; 537.84; 517.958; 519.63

В.К. Полевилов, В.Т. Ерофеев

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ СЛОЕМ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

Применяется комбинированный метод конечных разностей и граничных элементов для решения нелинейной краевой задачи магнитогидростатики, описывающей взаимодействие однородного магнитного поля с цилиндрическим слоем магнитной жидкости. Рассматривается магнитная жидкость с магнитной проницаемостью, нелинейно зависящей от напряженности магнитного поля. Исследуются экранирующие свойства цилиндрического толстостенного слоя магнитной жидкости в зависимости от напряженности внешнего магнитного поля. Вычисляется коэффициент эффективности экранирования.

Введение

Важнейшим направлением научных исследований в настоящее время является изучение электромагнитных свойств композитных материалов, используемых в радиотехнике и электронике. В связи с этим разрабатываются методы моделирования процессов взаимодействия магнитных и электрических полей с объектами различной геометрии и материальной структуры, которые используются для конструирования технических устройств. Наиболее сложными для изучения являются материалы с нелинейными физическими свойствами [1–3], требующими разработки специальных вычислительных подходов.

Одной из насущных задач является исследование прохождения электромагнитных полей через материальные среды, в частности экраны и оболочки. Проводятся активные численные исследования задач экранирования электромагнитных полей твердотельными тонкостенными оболочками [4–7], а также экспериментальные исследования цилиндрических экранов с нелинейными свойствами [8]. Изучаются жидкие материалы с нелинейной магнитной проницаемостью [9–12] в геометрических структурах: капля, капилляр, прослойка. Что касается экранирующих возможностей магнитных жидкостей с нелинейными магнитными свойствами, то они до настоящего времени не изучались.

1. Постановка задачи магнитостатики для цилиндрического слоя магнитной жидкости

В пространстве \mathbb{R}^3 с декартовой системой координат $OXYZ$ и соответствующей цилиндрической системой координат $Or\varphi Z$ размещен цилиндрический слой $D(R_1 < \rho < R_2, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < Z < \infty)$ толщиной $\Delta = R_2 - R_1$ (рис. 1), заполненный магнитной жидкостью, которая характеризуется магнитной проницаемостью $\mu_a = \mu_0 \mu$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Лицевые поверхности слоя Γ_1 ($\rho = R_1$) и Γ_2 ($\rho = R_2$) предполагаются абсолютно проницаемыми для магнитного поля. Внутренняя область D_1 ($0 \leq \rho < R_1$) и внешняя бесконечная область D_2 ($R_2 < \rho < +\infty$) заполнены вакуумом с магнитной проницаемостью μ_0 . На слой D со стороны области D_2 действует внешнее однородное (постоянное) магнитное поле $\vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_\varphi$, где $H_0 = \text{const}$. В результате взаимодействия с магнитной жидкостью в области D_1 формируется магнитное поле \vec{H}_1 , в слое D – магнитное поле \vec{H} , в области D_2 – суммарное поле $\vec{H}_2 = \vec{H}_0 + \vec{H}'_2$, где \vec{H}'_2 – отраженное поле.

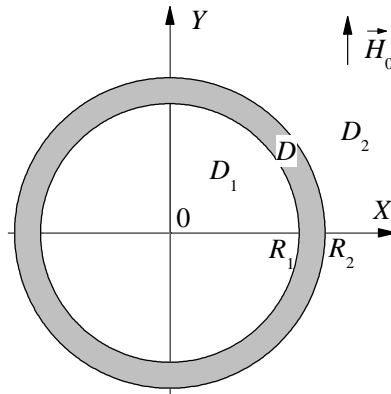


Рис. 1. Область определения задачи: D_1 – внутренняя немагнитная среда, D – магнитная жидкость, D_2 – внешняя немагнитная среда

Магнитная жидкость представляет собой устойчивую коллоидную суспензию частиц ферромагнетика в немагнитной жидкости-носителе (воде, керосине, трансформаторном масле, органических соединениях и др.), за счет которых жидкость приобретает магнитные свойства [3, 13–15]. Феррочастицы имеют размер порядка $10 \text{ нм} = 10^{-8} \text{ м}$ и находятся в состоянии броуновского движения в жидкости-носителе (матрице). Нелинейная зависимость относительной магнитной проницаемости жидкости $\mu = \mu(H) = 1 + M(H)/H$ от напряженности магнитного поля $H = |\vec{H}|$ для умеренно концентрированных магнитных жидкостей в приближении однородной концентрации частиц определяется формулой, используемой в работах [9–12]:

$$\mu(H) = \bar{\mu}(h) = 1 + 3\chi \frac{L(h)}{h}, \quad (1)$$

где $L(h) = \text{cth}(h) - 1/h$ – функция Ланжевена; $h = H/H_*$ – безразмерная напряженность поля; $H_* = kT/(\mu_0 m)$ – ланжевенский параметр, принимающий при комнатных температурах значения $(1 \div 3) \cdot 10^4 \text{ А/м}$; $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура жидкости; $m = (1 \div 3) \cdot 10^{-19} \text{ Дж/Тл}$ – магнитный момент феррочастицы; $\chi = \lim_{H \rightarrow 0} (dM(H)/dH)$ – начальная магнитная восприимчивость, являющаяся безразмерным параметром; $M(H)$ – намагниченность жидкости.

Формула (1) описывает намагниченность умеренно концентрированных однородных магнитных жидкостей по ланжевенскому закону $M(H) = M_s L(h)$ [3, 13, 14], откуда следует $\chi = M_s/(3H_*)$, где $M_s = 10^4 \div 2 \cdot 10^5 \text{ А/м}$ – намагниченность насыщения жидкости. Для примера рассмотрим жидкость, содержащую частицы с магнитным моментом $m = 2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж/Тл}$, с намагниченностью насыщения $M_s = 2 \cdot 10^5 \text{ А/м}$ и температурой $T = 300 \text{ К}$. Тогда из соотношений, связывающих материальные параметры жидкости, следует $H_* = 10^4 \text{ А/м}$, $\chi = 7$. Намагниченность высококонцентрированных магнитных жидкостей определяется более сложным образом, учитывающим магнитодипольное взаимодействие частиц [16, 17].

Так как внешнее магнитное поле не зависит от координаты Z , задача взаимодействия поля \vec{H}_0 с жидкостью является плоской задачей, а ρ и φ – полярными координатами. Для скаляризации векторной задачи введем потенциальные функции u , u_1 , u'_2 , u_0 , $u_2 = u_0 + u'_2$ для полей

$$\vec{H}_j = \text{grad } u_j, \quad \vec{H}_0 = \text{grad } u_0, \quad \vec{H} = \text{grad } u, \quad (2)$$

где $u_0 = H_0 \rho \sin \varphi$ – потенциал внешнего магнитного поля. Сформулируем краевую задачу.

Для заданного потенциала $u_0(\rho, \varphi)$ требуется определить потенциалы $u_1(\rho, \varphi)$, $u(\rho, \varphi)$, $u'_2(\rho, \varphi)$, которые удовлетворяют уравнениям [18, 19]

$$\Delta u_j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_j}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{в } D_j, \quad j=1, 2, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\mu \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad \text{в } D; \quad (4)$$

граничным условиям сопряжения на поверхностях Γ_1 и Γ_2

$$u|_{\rho=R_1} = u_1|_{\rho=R_1}, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_1} = \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_1}, \quad (5)$$

$$u|_{\rho=R_2} = (u_0 + u'_2)|_{\rho=R_2}, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_2} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial \rho} + \frac{\partial u'_2}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=R_2} \quad (6)$$

и условию на бесконечности

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} u'_2 = 0. \quad (7)$$

В уравнении (4) μ определяется формулой (1), из которой следует

$$\mu = \mu(|\text{grad } u|), \quad |\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2}.$$

2. Расчетная краевая задача

Из однородности внешнего магнитного поля следует симметрия задачи (3)–(7) с магнитной проницаемостью (1) и с осями симметрии OX и OY . В связи с этим исходную задачу сформулируем в виде плоской краевой задачи для сектора Ω_0 ($0 < \rho < \infty, 0 < \varphi < \pi/2$) на плоскости OXY , $\Omega_0 = \Omega_1 \cup \Omega \cup \Omega_2$, Ω_1 ($0 < \rho < R_1, 0 < \varphi < \pi/2$), Ω ($R_1 < \rho < R_2, 0 < \varphi < \pi/2$), Ω_2 ($R_2 < \rho < \infty, 0 < \varphi < \pi/2$). На осях симметрии OX ($\varphi = 0$), OY ($\varphi = \pi/2$) зададим соответствующие граничные условия симметрии для потенциалов u , u_j .

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$r = \frac{\rho}{R_1}, \quad v = v(r, \varphi) = \frac{u(R_1 r, \varphi)}{R_1 H_*}, \quad v_j = \frac{u_j(R_1 r, \varphi)}{R_1 H_*}, \quad x = \frac{X}{R_1}, \quad y = \frac{Y}{R_1},$$

$$h = \frac{H}{H_*} = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)^2}, \quad v_0 = h_0 r \sin \varphi, \quad h_0 = \frac{H_0}{H_*}, \quad \delta = \frac{R_2}{R_1},$$

где h_0 и δ вместе с магнитной восприимчивостью χ являются безразмерными определяющими параметрами задачи. В этих переменных сформулируем безразмерную краевую задачу, эквивалентную задаче (3)–(7). Для заданного потенциала $v_0(r, \varphi) = h_0 r \sin \varphi$ требуется определить потенциалы $v_1(r, \varphi)$, $v(r, \varphi)$, $v_2(r, \varphi) = v_0 + v'_2$, которые удовлетворяют:

– уравнениям

$$\Delta v_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (8)$$

в области $\bar{\Omega}_1$ ($0 < r < 1, 0 < \varphi < \pi/2$),

$$\Delta v_2 = \Delta v_2' = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_2'}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_2'}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (9)$$

в области $\bar{\Omega}_2$ ($\delta < r < \infty$, $0 < \varphi < \pi/2$),

$$\operatorname{div}(\bar{\mu} \operatorname{grad} v) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{\mu} r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\bar{\mu} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (10)$$

в области $\bar{\Omega}$ ($1 < r < \delta$, $0 < \varphi < \pi/2$) (рис. 2);

– граничным условиям сопряжения на поверхностях раздела сред

$$v|_{r=1} = v_1|_{r=1}, \quad \bar{\mu} \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=1} = \frac{\partial v_1}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (11)$$

$$v|_{r=\delta} = v_2'|_{r=\delta} + h_0 \delta \sin \varphi, \quad \bar{\mu} \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=\delta} = \frac{\partial v_2'}{\partial r} \Big|_{r=\delta} + h_0 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad (12)$$

– граничным условиям симметрии

$$v|_{\varphi=0} = v_1|_{\varphi=0} = v_2'|_{\varphi=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi/2} = \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi/2} = \frac{\partial v_2'}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \quad 0 < r < \infty; \quad (13)$$

– условию на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_2' = 0. \quad (14)$$

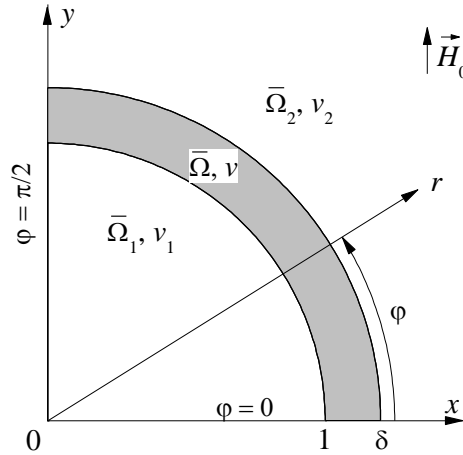


Рис. 2. Расчетная область краевой задачи

3. Алгоритм численного решения сопряженной краевой задачи

Задача (8)–(14) определена в секторе $\bar{\Omega}_0$ ($0 < r < \infty$, $0 < \varphi < \pi/2$) = $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega} \cup \bar{\Omega}_2$ (см. рис. 2) и состоит из трех самостоятельных задач магнитостатики: линейной задачи (8), (13) для потенциала v_1 во внутренней немагнитной области $\bar{\Omega}_1$; линейной задачи (9), (13), (14) для потенциала v_2' во внешней бесконечной немагнитной области $\bar{\Omega}_2$ и нелинейной задачи (1), (10), (13) для потенциала v в цилиндрическом слое магнитной жидкости $\bar{\Omega}$. На поверхностях раздела магнитной и немагнитной сред $r = 1$ и $r = \delta$ задачи (8), (13) и (1), (10), (13) связаны между собой условием сопряжения (11), задачи (1), (10), (13) и (9), (13), (14) – условием сопряжения (12).

Линейные задачи (8), (13) и (9), (13), (14) описываются плоским уравнением Лапласа, для которого известно фундаментальное решение [18]. На этом основании для решения задач применялся метод граничных элементов [20], который является наиболее эффективным в данном случае, поскольку не требует введения сетки в областях определения $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$ и точно удовлетворяет условию на бесконечности (14). Алгоритм метода заключается в том, что решение уравнения Лапласа для магнитного потенциала заменяется эквивалентной задачей решения поверхностного интегрального уравнения Фредгольма первого рода относительно нормальной производной от потенциала на границе $r=1$ в случае внутренней задачи (8), (13) и на границе $r=\delta$ в случае внешней задачи (9), (13), (14). Для аппроксимации интегрального уравнения применялся вариант метода с постоянными элементами на равномерной сетке по переменной интегрирования φ , аналогичный интерполяционному методу квадратур. При заданных значениях поверхностных потенциалов $v_1|_{r=1}$ и $v_2'|_{r=\delta}$ в граничных узлах сетки приходим к двум независимым системам линейных алгебраических уравнений относительно производных $q_1 = \partial v_1 / \partial r$ при $r=1$ и $q_2' = \partial v_2' / \partial r$ при $r=\delta$, размерность которых равна количеству граничных узлов.

Нелинейная краевая задача (10), (13) аппроксимировалась на равномерной сетке по r и φ . Построенная конечно-разностная схема представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений, обладает вторым порядком аппроксимации и в линейном приближении удовлетворяет принципу максимума при любых шагах сетки, т. е. является монотонной.

Вычислительный процесс был организован в виде итерационного алгоритма, на каждой итерации которого решались три сеточные задачи для потенциала независимо друг от друга. Сначала при заданных в граничных узлах значениях v_1 и v_2' , найденных на предыдущей итерации, решались линейные системы относительно q_1 и q_2' в граничных узлах, полученных по методу граничных элементов. Для решения линейных систем уравнений применялся метод исключения Гаусса. Затем с помощью условий сопряжения (11), (12), аппроксимированных на выбранной сетке узлов, вычислялись граничные сеточные значения $q = \partial v / \partial r$ при $r=1$ и $r=\delta$. Нелинейная разностная задача относительно потенциала v в слое магнитной жидкости рассчитывалась итерационным методом Зейделя. В результате этого определяются новые значения потенциала v не только во внутренних узлах области $\bar{\Omega}$, но и в граничных узлах, с помощью которых обновляются сеточные значения $\bar{\mu}$. Наконец, с помощью условий сопряжения (11), (12) вычисляются новые значения v_1 и v_2' в граничных узлах, и на этом одна итерация заканчивается. В качестве начального итерационного приближения выбиралось решение для невозмущенного магнитного потенциала $v(r, \varphi) = h_0 r \sin \varphi$.

Основные расчеты проводились на сетке с числом разбиений $N_1 = 10$ по переменной $r \in [1, \delta]$ и $N_2 = 100$ по переменной $\varphi \in [0, \pi/2]$. Контрольные вычисления на более мелкой сетке с $N_1 = 100$ и $N_2 = 200$ не выявили существенных изменений в решении.

4. Результаты вычислительного эксперимента

Все расчеты выполнялись для фиксированного значения геометрического параметра $\delta = 1,1$. При комнатных температурах $T \sim 290 \div 300$ К умеренно концентрированные магнитные жидкости имеют начальную магнитную восприимчивость $1 \leq \chi \leq 10$, а для высококонцентрированных она достигает значений $60 \div 80$ [21, 22]. Например, высококонцентрированная магнитная жидкость, полученная на основе органической жидкости «декан», имеет намагниченность насыщения $M_s = 1,07 \cdot 10^5$ А/м и магнитную восприимчивость $\chi = 51$ при комнатной температуре [23]. При понижении температуры до $230 \div 240$ К магнитная восприимчивость высококонцентрированных жидкостей возрастает до $100 \div 120$ при сохранении текучести кол-

лоида [22, 24]. На этом основании в вычислительном эксперименте параметр χ выбирался из диапазона $1 \leq \chi \leq 50$.

Магнитное поле в области D_1 определяется формулой (2):

$$\vec{H}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

На оси Oy с учетом (13) имеем

$$\vec{H}_1|_{\varphi=\pi/2} = \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \Big|_{\varphi=\pi/2} \vec{e}_y = H_* \frac{\partial v_1}{\partial r} \Big|_{\varphi=\pi/2} \vec{e}_y.$$

В центральной точке O

$$\vec{H}_1(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial v_1(r, \pi/2)}{\partial r} \vec{e}_y.$$

Определим эффективность экранирования магнитного поля \vec{H}_0 цилиндрическим слоем магнитной жидкости D по формуле

$$K_{\text{эф}} = \frac{|\vec{H}_0(0)|}{|\vec{H}_1(0)|} = h_0 \left/ \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial v_1(r, \pi/2)}{\partial r} \right| \right|. \quad (15)$$

Коэффициент (15) показывает, во сколько раз ослабевает внешнее магнитное поле H_0 при прохождении во внутреннюю область цилиндрического слоя D_1 .

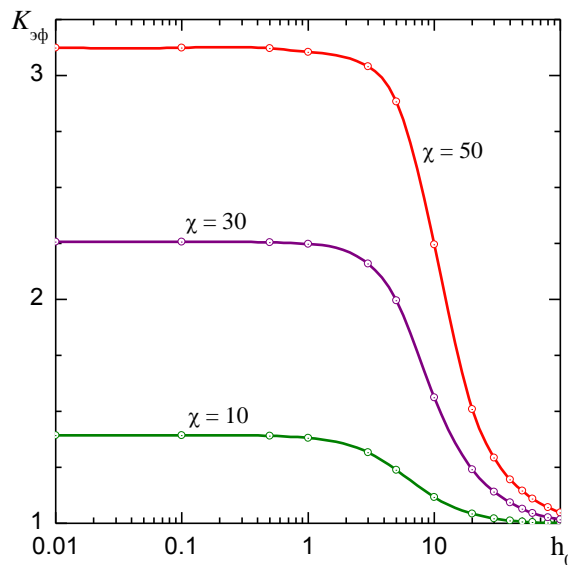


Рис. 3. Зависимость коэффициента эффективности экранирования $K_{\text{эф}}$ от безразмерной напряженности приложенного магнитного поля h_0 для различных значений магнитной восприимчивости

На рис. 3 изображены графики, иллюстрирующие эффективность экранирования цилиндрической магнитожидкостной оболочки для жидкостей с начальной магнитной восприимчивостью $\chi = 10, 30, 50$. Ввиду того что $H_0 = h_0 \cdot H_*$, значения $h_0 = \{0,01; 0,1; 1; 10; 100\}$ при $H_* = (1 \div 3) \cdot 10^4$ А/м соответствуют напряженности внешнего поля $H_0 = (1 \div 3) \cdot \{10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6\}$ А/м. Как видим, в слабых полях, соответствующих $h_0 < 1$ ($H_0 < 10^4$ А/м), коэффициент эффективности практически остается постоянным и достигает максимального значения, а при $h_0 > 1$ ($H_0 > 10^4$ А/м) он стремительно уменьшается при любых χ с ростом безраз-

мерной напряженности h_0 . Заметим, что при $\chi = 30$ напряженность магнитного поля во внутренней области при $h_0 < 1$ ослабевает более чем в два раза, а при $\chi = 50$ – более чем в три раза по сравнению с напряженностью внешнего магнитного поля. Это означает, что магнитожидкостные экраны могут быть эффективны в слабых магнитных полях, например, в случае влияния геомагнитных бурь, при которых напряженность геомагнитного поля на поверхности Земли не превышает 200 А/м , что соответствует $h_0 < 1$. Они могут быть использованы для выравнивания колеблющегося внешнего магнитного поля, проникшего во внутреннюю область экрана, путем изменения магнитной восприимчивости χ (концентрации частиц в жидкости).

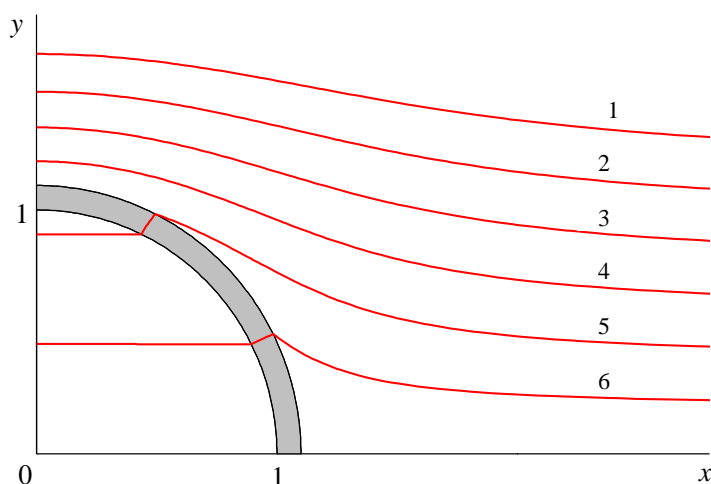


Рис. 4. Изолинии потенциала магнитного поля в области определения задачи при $h_0 = 1, \chi = 30$:

$$1 - v/h_0 = 1, 2; 2 - 1, 0; 3 - 0, 8; 4 - 0, 6; 5 - 0, 4; 6 - 0, 2$$

На рис. 4 изображена структура магнитного поля в области определения задачи при значениях определяющих параметров $h_0 = 1, \chi = 30$. Установлено, что при любых значениях χ и $h_0 \leq 1$ магнитное поле во внутренней области является однородным и вертикально направленным, так же как и во внешней области на бесконечности, но с меньшим значением напряженности $H_1(x, y) = H_* \partial v_1(x, y) / \partial y = \text{const} < H_0$ при $x^2 + y^2 < 1$.

Заключение

В работе исследованы экранирующие свойства толстостенного цилиндрического слоя магнитной жидкости при воздействии внешнего однородного магнитного поля. Разработан алгоритм вычисления магнитного поля, проникающего во внутреннюю немагнитную область, ограниченную магнитожидкостной оболочкой. Вычислен коэффициент эффективности экранирования, показывающий, во сколько раз ослабевает внешнее магнитное поле во внутренней области. Установлено, что при низкой напряженности поля ($H_0 < 10^4 \text{ А/м}$) коэффициент эффективности практически остается постоянной величиной, зависящей лишь от магнитной восприимчивости жидкости χ , т. е. нелинейные свойства магнитной жидкости, описываемые функцией Ланжевена, не влияют на эффективность экранирования. Например, при $\chi = 30$ напряженность магнитного поля внутри оболочки падает более чем в два раза, а при $\chi = 50$ – более чем в три раза. При высокой напряженности магнитного поля ($H_0 > 10^4 \text{ А/м}$) эффективность экранирования резко убывает с ростом H_0 .

Работа выполнена в рамках задания 1.5.01.3 Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2020» и задания 1.1.09 Государственной программы научных исследований «Информатика, космос и безопасность» на 2016–2020 гг.

Список литературы

1. Глонягин, Ю.В. Элементы теории и расчета магнитостатических полей ферромагнитных тел / Ю.В. Глонягин. – Л. : Судостроение, 1967. – 180 с.
2. Дорфман, Я.Г. Магнитные свойства и строение вещества / Я.Г. Дорфман. – М. : Изд-во ЛКИ, 2010. – 376 с.
3. Розенцвейг, Р. Феррогидродинамика / Р. Розенцвейг. – М. : Мир, 1989. – 356 с.
4. Эффективность экранирования постоянных магнитных полей цилиндрическим экраном с учетом нелинейных эффектов / Г.Ф. Громыко [и др.] // Физические основы приборостроения. – 2015. – Т. 4, № 4. – С. 30–39.
5. Резинкина, М.М. Использование численных расчетов для выбора средств экранирования от действия магнитного поля / М.М. Резинкина // Журнал технической физики. – 2007. – Т. 77, вып. 11. – С. 17–24.
6. Модель экранирования постоянных магнитных полей многослойным конечным цилиндрическим экраном / В.Т. Ерофеенко [и др.] // Информатика. – 2012. – № 3(35). – С. 80–93.
7. Громыко, Г.Ф. Численное исследование структуры магнитного поля в цилиндрическом пленочном экране / Г.Ф. Громыко, В.Т. Ерофеенко, Г.М. Заяц // Информатика. – 2016. – № 2(50). – С. 5–18.
8. Эффективность магнитостатического экранирования цилиндрическими оболочками / С.С. Грабчиков [и др.] // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2015. – № 4. – С. 101–114.
9. Numerical treatment of free surface problems in ferrohydrodynamics / O. Lavrova [et al.] // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2006. – Vol. 18. – P. S2657–S2669.
10. Lavrova, O. Instability of a magnetic fluid drop in a capillary: a numerical study / O. Lavrova, V. Polevnikov, L. Tobiska // Magnetohydrodynamics. – 2008. – Vol. 44, no. 2. – P. 183–189.
11. Lavrova, O. Numerical study of the Rosensweig instability in a magnetic fluid subject to diffusion of magnetic particles / O. Lavrova, V. Polevnikov, L. Tobiska // Mathematical Modeling and Analysis. – 2010. – Vol. 15, no. 2. – P. 223–233.
12. Lavrova, O. Modeling and simulation of magnetic particles diffusion in a ferrofluid layer / O. Lavrova, V. Polevnikov, L. Tobiska // Magnetohydrodynamics. – 2016. – Vol. 52, no. 4. – P. 417–430.
13. Magnetic fluids and applications handbook / Eds. B. Berkovski, V. Bashtovoi. – N. Y. : Begell House Inc. Publ., 1996. – 851 p.
14. Берковский, Б.М. Магнитные жидкости / Б.М. Берковский, В.Ф. Медведев, М.С. Краков. – М. : Химия, 1989. – 240 с.
15. Блум, Э. Я. Магнитные жидкости / Э. Я. Блум, М.М. Майоров, А.О. Цеберс. – Рига : Зинатне, 1989. – 386 с.
16. Ivanov, A.O. Magnetic properties of dense ferrofluids: an influence of interparticle correlations / A.O. Ivanov, O.B. Kuznetsova // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. – 2001. – Vol. 64, no. 4. – P. 0414051–04140512.
17. Pshenichnikov, A.F. Magnetophoresis, sedimentation and diffusion of particles in concentrated magnetic fluids / A.F. Pshenichnikov, E.A. Elfimova, A.O. Ivanov // J. Chem. Phys. – 2011. – Vol. 134, no. 18. – P. 184508–1–9.
18. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – 5-е изд. – М. : Наука, 1977. – 736 с.
19. Ерофеенко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – М. : КД Либроком, 2014. – 304 с.
20. Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М. : Мир, 1987. – 524 с.
21. Lebedev, A.V. Dipole interparticle interaction in magnetic fluids / A.V. Lebedev // Colloid Journal. – 2014. – Vol. 76, no. 3. – P. 334–341.
22. Pshenichnikov, A.F. Low-temperature susceptibility of concentrated magnetic fluids / A.F. Pshenichnikov, A.V. Lebedev // J. Chem. Phys. – 2004. – Vol. 121, no. 11. – P. 5455–5467.

23. Елфимова, Е.А. Статистическая термодинамика и физические свойства магнитных жидкостей: роль многочастичных корреляций : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.02 / Е.А. Елфимова ; Уральский федеральный ун-т им. Б.Н. Ельцина. – Екатеринбург, 2016. – 36 с.

24. Pshenichnikov, A.F. Magnetic susceptibility of concentrated ferrocolloids / A.F. Pshenichnikov, A.V. Lebedev // Colloid Journal. – 2005. – Vol. 67, no. 2. – P. 189–200.

Поступила 28.03.2017

*Белорусский государственный университет,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: polevikov@bsu.by*

*Учреждение БГУ «НИИ прикладных
проблем математики и информатики»,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: bsu_erofeenko@tut.by*

V.K. Polevikov, V.T. Erofeenko

NUMERICAL MODELING THE INTERACTION OF A MAGNETIC FIELD WITH A CYLINDRICAL MAGNETIC FLUID LAYER

A combined method of finite differences and boundary elements is applied to solve a nonlinear conjugate problem of magnetostatics describing, the interaction of a uniform magnetic field with a cylindrical magnetic fluid layer. Magnetic permeability of the fluid is considered to be a non-linearly dependent on the magnetic field intensity. Shielding properties of a cylindrical thick-walled magnetic-fluid layer, depending on the external magnetic field intensity, are investigated. A shielding effectiveness factor is calculated.

УДК: 519.6:537.2

Г.Ч. Шушкевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ ТОНКОЙ СПЛЮСНУТОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ И ПЛОСКОСТИ

Аналитическими методами исследуется решение граничной задачи электростатики для моделирования поля электрического диполя, расположенного внутри сплюснутой незамкнутой сфероидальной заземленной оболочки, в присутствии идеально проводящей плоскости. С помощью теорем сложения, связывающих сферические, эллипсоидальные и цилиндрические гармонические функции, решение поставленной граничной задачи сводится к решению парных сумматорных уравнений по полиномам Лежандра, которые преобразуются к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором. Численно исследуется влияние геометрических параметров задачи на значение вторичного потенциала электростатического поля.

Введение

Универсальными методами расчета электростатических, магнитных и электромагнитных полей являются численные методы конечных разностей, конечных элементов и интегральных уравнений [1–5]. Вместе с тем актуальность разработки новых аналитических и численно-аналитических методов решения краевых задач математической физики не уменьшилась и в наши дни. Эти методы остаются по-прежнему основными средствами решения фундаментальных проблем, создавая основу для тестирования решения краевых задач, полученных численными методами.

Метод разделения переменных и аппарат функций комплексного переменного наиболее часто используются для аналитического решения граничных задач математической физики. Обобщением метода разделения переменных для решения граничных задач со смешанными граничными условиями является метод парных (тройных) уравнений. Этот метод применялся для решения электростатических задач для одиночных тонких незамкнутых оболочек [6–17]. При решении граничных задач математической физики для многосвязных областей успешно применялся метод теорем сложения [18]. Имеются публикации, посвященные решению задач электростатики для двух проводников, которые представляют собой различные координатные поверхности [19–23]. Совместное использование теорем сложения и парных (тройных) уравнений позволило найти аналитическое решение для двух и более проводников, представляющих собой неполные координатные поверхности [24–29].

В статье [30] рассматривается применение метода теорем сложения для моделирования электрического поля импульсного электрического разряда в присутствии металлического шара и тонкого стержня. Численное решение задачи проникновения электростатического поля через прямоугольное отверстие вовнутрь параллелепипеда с идеально тонкими стенками приведено в [31].

В настоящей статье предлагается методика аналитико-численного решения краевой задачи для уравнения Лапласа, моделирующей поле электростатического диполя в присутствии тонкой сплюснутой незамкнутой сфероидальной оболочки и плоскости, с использованием теории сферических, сфероидальных и цилиндрических функций и пакета компьютерной математики Mathcad. Исследуется поведение электростатического поля в окрестности сфероидальной оболочки во внешней области.

1. Постановка и представление решения задачи

Пусть однородное пространство R^3 разделено плоскостью Γ на два полупространства W_1 и W_2 . В полупространстве W_1 находится незамкнутая идеально тонкая оболочка S , которая расположена на поверхности сплюснутого эллипсоида вращения S_1 с центром в точке O , где a, b –

большая и малая полуоси эллипса соответственно. Область пространства, ограниченную поверхностью эллипсоида вращения S_1 , обозначим через D_0 , тогда $D_1 = W_1 \setminus (D_0 \cup S_1)$. Точку пересечения прямой L с плоскостью Γ обозначим через O_1 . Прямая L проходит через точку O и перпендикулярна плоскости Γ . Расстояние между точками O и O_1 обозначим через h . Осевое сечение задачи показано на рис. 1.

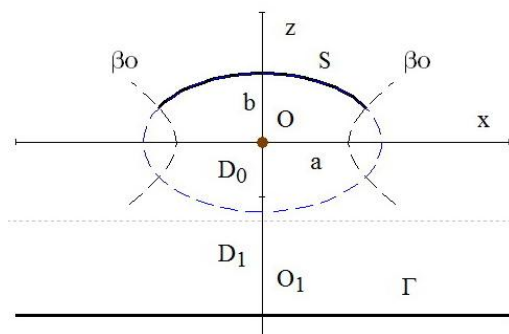


Рис. 1. Геометрия задачи

Для решения задачи с точкой O свяжем:

– сферические координаты $\{r, \theta, \varphi\}$

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

где $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$;

– сплюснутые вырожденные эллипсоидальные координаты $\{\alpha, \beta, \varphi\}$

$$x = c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta,$$

где $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$;

– цилиндрические координаты $\{\rho, \varphi, z\}$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

где $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

В этом случае поверхности Γ и S будут описываться следующим образом:

$$\Gamma = \{ \rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad z = -h \},$$

$$S = \{ \alpha = \alpha_0 = \operatorname{Arsh}(b/c), \quad 0 \leq \beta \leq \beta_0 < \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}.$$

В точке O расположен источник электростатического поля – электростатический диполь, момент которого направлен вдоль оси Oz .

Обозначим через U_d потенциал электростатического поля диполя, через U_j – потенциал вторичного электростатического поля в области D_j , $j = 0, 1$.

Постановка задачи. Требуется найти вторичные потенциалы U_j , $j = 0, 1$, которые удовлетворяют:

– уравнению Лапласа

$$\Delta U_j = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

– граничным условиям

$$(U_d(M) + U_0(M))|_{M \in S} = U_1(M)|_{M \in S} = 0, \tag{2}$$

$$U_1(M)|_{M \in \Gamma} = 0; \quad (3)$$

– условию на бесконечности

$$U_1(M) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где M – произвольная точка области D_1 .

Кроме того, потребуем выполнения условий непрерывности потенциала на поверхности эллипсоида S_1 и непрерывности поля на части поверхности эллипсоида S_1 , которая не является экраном [28]:

$$U_d + U_0 = U_1 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \quad 0 \leq \beta \leq \pi; \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(U_d + U_0) = \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta_0 < \beta \leq \pi. \quad (6)$$

Потенциал диполя, момент которого направлен вдоль оси Oz , представим в виде [32]

$$U_d(r, \theta) = P \frac{\cos \theta}{r^2} = P \frac{1}{r^2} P_1(\cos \theta), \quad (7)$$

где $P_n(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра [33], P – известная величина.

Решение поставленной краевой задачи будем искать в виде суперпозиции цилиндрических и эллипсоидальных гармонических функций так, чтобы автоматически выполнялось условие на бесконечности (4):

$$U_0(\alpha, \beta) = P \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{P_n(ish\alpha)}{P_n(ish\alpha_0)} P_n(\cos \beta); \quad (8)$$

$$U_1 = U_1^{(1)}(\alpha, \beta) + U_1^{(2)}(\rho, z); \quad (9)$$

$$U_1^{(1)}(\alpha, \beta) = P \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{Q_n(ish\alpha)}{Q_n(ish\alpha_0)} P_n(\cos \beta); \quad (10)$$

$$U_1^{(2)}(\rho, z) = P \int_0^{\infty} A(\lambda) J_0(\lambda \rho) e^{-\lambda(z+h)} d\lambda, \quad z+h > 0, \quad (11)$$

где $P_n(z)$, $Q_n(z)$ – присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно; $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода [33]. Неизвестные коэффициенты a_n , b_n и функция $A(\lambda)$ подлежат определению из граничных условий.

2. Выполнение граничных условий

На основании формулы [18], связывающей сферические и эллипсоидальные гармонические функции:

$$\frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \sum_{s=n}^{\infty} B_s^n(c) Q_s(ish\alpha) P_s(\cos \beta), \quad B_s^n(c) = \frac{(-1)^s (2s+1)}{n! (-ic)^{n+1}} P_s^n(0),$$

где индекс s принимает значения одинаковой четности с индексом n , потенциал диполя в эллипсоидальных координатах будет иметь представление

$$U_d(\alpha, \beta) = P \sum_{s=0}^{\infty} d_s(c) Q_s(ish\alpha) P_s(\cos \beta), \quad (12)$$

$$\text{где } d_s(c) = \begin{cases} 0, & s = 0, 2, 4, \dots; \\ \frac{(-1)^{s+1}(2s+1)}{c^2} P_s^1(0), & s = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Величина $P_s^1(0)$ может быть вычислена по формуле [34]

$$P_n^m(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } (n-m) - \text{нечетное,} \\ \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}} (n+m)!}{2^n ((n+m)/2)! ((n-m)/2)!}, & \text{если } (n-m) - \text{четное.} \end{cases}$$

Выполним граничные условия (2), (5), (6). Для этого функцию $U_1^{(2)}(\rho, z)$ представим через эллипсоидальные гармонические функции, используя формулу, связывающую цилиндрические и эллипсоидальные гармонические функции [18]:

$$J_0(\lambda\rho)e^{-\lambda z} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(c\lambda) P_n(ish\alpha) P_n(\cos\beta).$$

Тогда получим

$$U_1^{(2)}(\alpha, \beta) = P \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(ish\alpha) P_n(\cos\beta), \quad (13)$$

$$\text{где } A_n = i^n (2n+1) \int_0^{\infty} A(\lambda) j_n(c\lambda) e^{-\lambda h} d\lambda. \quad (14)$$

Граничное условие (5) на основании представлений (8), (10), (12), (13) с учетом условия ортогональности полиномов Лежандра $P_n(\cos\beta)$ на отрезке $[0, \pi]$ примет вид

$$a_n + d_n(c) Q_n(\xi_0) = b_n + A_n P_n(\xi_0), \quad \xi_0 = ish\alpha_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Вычислим частные производные $\frac{\partial}{\partial\alpha} U_0(\alpha, \beta)$, $\frac{\partial}{\partial\alpha} U_1^{(1)}(\alpha, \beta)$, $\frac{\partial}{\partial\alpha} U_d(\alpha, \beta)$, $\frac{\partial}{\partial\alpha} U_1^{(2)}(\alpha, \beta)$ и выполним граничные условия (2), (5). Получим парные сумматорные уравнения по полиномам Лежандра:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + A_n P_n(\xi_0)) P_n(\cos\beta) = 0, & 0 \leq \beta < \beta_0; \\ \sum_{n=0}^{\infty} (d_n(c) Q_n'(\xi_0) + a_n \frac{P_n'(\xi_0)}{P_n(\xi_0)} - b_n \frac{Q_n'(\xi_0)}{Q_n(\xi_0)} - A_n P_n'(\xi_0)) P_n(\cos\beta) = 0, & \beta_0 < \beta \leq \pi. \end{cases}$$

Исключим коэффициенты a_n в парных уравнениях, учитывая формулу (15) и значение вронскиана [33]

$$W[P_n(z), Q_n(z)] = -\frac{1}{z^2 - 1}.$$

В результате получим

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + A_n P_n(\xi_0)) P_n(\cos\beta) = 0, & 0 \leq \beta < \beta_0; \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b_n}{P_n(\xi_0) Q_n(\xi_0)} - \frac{d_n(c)}{P_n(\xi_0)} \right) P_n(\cos\beta) = 0, & \beta_0 < \beta \leq \pi. \end{cases} \quad (16)$$

Преобразуем парные уравнения (16) к стандартному виду. Для этого введем в рассмотрение новые коэффициенты T_n по формуле

$$(2n+1)T_n = \frac{b_n}{P_n(\xi_0)Q_n(\xi_0)} - \frac{d_n(c)}{P_n(\xi_0)}, \quad n=0, 1, \dots, \quad (17)$$

и малый параметр g_n по формуле

$$g_n = 1 - (2n+1)ich\alpha_0 P_n(\xi_0)Q_n(\xi_0), \quad g_n = O(n^{-2}). \quad (18)$$

В результате парные сумматорные уравнения (16) примут вид

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (1-g_n)T_n P_n(\cos\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos\beta), & 0 \leq \beta < \beta_0; \\ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)T_n P_n(\cos\beta) = 0, & \beta_0 < \beta \leq \pi, \end{cases} \quad (19)$$

где
$$f_n = -ich\alpha_0 (A_n P_n(\xi_0) + d_n(c)Q_n(\xi_0)). \quad (20)$$

На основании интегральных представлений Мелера – Дирихле для полиномов Лежандра [33]

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos(n+0,5)x dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos\theta)}} = \frac{2}{\pi} \int_\theta^\pi \frac{\sin(n+0,5)x dx}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos x)}}$$

парные сумматорные уравнения (19) преобразуем сначала к двум интегральным уравнениям Абеля с нулевой правой частью, а затем – к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго порядка с вполне непрерывным оператором

$$T_n - \sum_{k=0}^{\infty} g_k Q_{nk}(\beta_0) T_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k Q_{nk}(\beta_0), \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

где
$$Q_{sn}(\beta_0) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-s)\beta_0}{n-s} + \frac{\sin(n+s+1)\beta_0}{n+s+1} \right], \quad \frac{\sin(n-s)\beta_0}{n-s} \Big|_{n=s} = \beta_0.$$

Для выполнения граничного условия (3) используем формулу, связывающую эллипсоидальные и цилиндрические гармонические функции,

$$Q_n(ish\alpha)P_n(\cos\beta) = -ci^{n+1} \int_0^\infty j_n(c\lambda)J_0(\lambda\rho)e^{\lambda z} d\lambda, \quad z < 0,$$

и представим функцию $U_1^{(1)}(\alpha, \beta)$ через цилиндрические гармонические функции

$$U_1^{(1)}(\rho, z) = P \int_0^\infty B(\lambda)J_0(\lambda\rho)e^{\lambda z} d\lambda, \quad (22)$$

где
$$B(\lambda) = -c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1} j_n(c\lambda)}{Q_n(\xi_0)} b_n. \quad (23)$$

Выполним граничное условие (3) на поверхности плоскости Γ , принимая во внимание представления (11), (22), и получим

$$A(\lambda) + B(\lambda)e^{-\lambda h} = 0. \quad (24)$$

Установим связь между коэффициентами A_n , входящими в правую часть системы (21), и коэффициентами T_n . Для этого исключим в (14) функцию $A(\lambda)$ с помощью представления (24), затем в полученном выражении заменим функцию $B(\lambda)$ коэффициентами b_n , используя представление (23). Учитывая связь (17) между коэффициентами T_n и b_n , окончательно получим

$$A_n = \sum_{k=0}^{\infty} ((2k+1)P_k(\xi_0)T_k + d_k)I_{nk}, \quad (25)$$

где $I_{nk} = c(2n+1)i^{n+k+1} \int_0^{\infty} j_n(c\lambda) j_k(c\lambda) e^{-2\lambda h} d\lambda$.

Подставим представление (25) для коэффициентов A_n в (20) и после некоторых преобразований получим бесконечную СЛАУ второго порядка с вполне непрерывным оператором

$$T_n + \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{nk} - g_k Q_{nk}(\beta_0)) T_k = - \sum_{k=0}^{\infty} f_{nk}^{(1)} - f_n^{(2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где $\alpha_{nk} = ich\alpha_0(2k+1)P_k(\xi_0) \sum_{p=0}^{\infty} P_p(\xi_0) I_{pk} Q_{np}(\beta_0)$, $f_{nk}^{(1)} = ich\alpha_0 P_k(\xi_0) Q_{nk}(\beta_0) \sum_{p=0}^{\infty} d_p(c) P_p(\xi_0) I_{kp}$,

$$f_n^{(2)} = ich\alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} d_k(c) Q_k(\xi_0) Q_{nk}(\beta_0).$$

Используя формулы [18]

$$J_0(\lambda\rho)e^{-\lambda z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} r^n P_n(\cos\theta), \quad Q_n(ish\alpha)P_n(\cos\beta) = \sum_{s=n}^{\infty} D_n^s r^{-s-1} P_s(\cos\theta), \quad r > c,$$

где $D_n^s = \begin{cases} 0, & \text{если } (s-n) - \text{нечетное,} \\ \frac{2^n (-ic)^{s+1} s! ((s+n)/2)!}{(s+n+1)! ((s-n)/2)!}, & \text{если } (s-n) - \text{четное,} \end{cases}$

представим потенциал вторичного электростатического поля U_1 в области D_1 через сферические гармонические функции

$$U_1(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} (\chi_n r^n + \gamma_n r^{-n-1}) P_n(\cos\theta),$$

где $\chi_n = c \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{i^{k+1}}{Q_k(\xi_0)} J_{kn}$, $\gamma_n = \sum_{p=0}^n b_p \frac{D_p^n}{Q_p(\xi_0)}$, $J_{kn} = \int_0^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} j_k(c\lambda) e^{-2\lambda h} d\lambda$.

Коэффициенты b_n определяются через решение системы (26) по формуле (17).

3. Вычислительный эксперимент

С помощью системы компьютерной математики Mathcad [35] был вычислен потенциал электростатического поля $U_1(r, \theta)$ в области D_1 для некоторых параметров задачи. Сферическая функция $j_n(x)$ вычислена с помощью встроенной функции $js(n, x)$, а полиномы Лежандра $P_n(x)$ – с помощью встроенной функции $Leg(n, x)$. Присоединенные функции Лежандра первого рода $P_n(z)$ вычислены по рекуррентной формуле [33]:

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_n(z) = [(2n-1)zP_{n-1}(z) - (n-1)P_{n-1}(z)]/n, \quad n = 2, 3, \dots$$

Присоединенные функции Лежандра второго рода $Q_n(z)$ вычислены по следующему алгоритму [36]:

$$R_N = z - \sqrt{z^2 - 1}, \quad R_j = \frac{j}{(2j+1)z - (j+1)R_{j+1}}, \quad j = \overline{N-1, 1},$$

$$Q_0(z) = 0, 2 \ln \frac{z+1}{z-1}, \quad Q_1(z) = zQ_0(z) - 1, \quad Q_j = R_j Q_{j-1}(z), \quad j = \overline{2, N}, \quad N = 300.$$

Результаты вычислений $Q_n(z)$ совпадают с контрольными значениями [36].

Бесконечная система (26) решена методом усечения [19]. Для получения достоверного решения конечной системы линейных алгебраических уравнений необходимо проверить обусловленность системы. Матрица, соответствующая системе, считается хорошо обусловленной, если число обусловленности матрицы меньше 300 [37, с. 150]. Для вычисления числа обусловленности матрицы использовали встроенные функции cond1 (число обусловленности в норме L_1), cond2 (в норме L_2) и conde (в евклидовой норме). Вычислительный эксперимент показал, что для рассмотренных параметров задачи порядок усечения матрицы можно взять равным 100. Это обеспечивает решение конечной системы (26) с точностью 10^{-4} , и число обусловленности в рассматриваемых нормах не будет превосходить 20. Все сходящиеся бесконечные суммы вычислены с точностью 10^{-5} .

Разработанное программное обеспечение позволяет вычислять значение вторичного потенциала $U_1(r, \theta)$ и анализировать экранирующие свойства рассматриваемой системы экранов. Приведем некоторые результаты расчетов.

На рис. 2 изображены графики нормированного потенциала $U_1(r, \theta) / P$ для увеличивающихся значений большой полуоси эллипса a (значения даны в левом углу рисунка в метрах) при $b = 0,05$ м, $h = 0,35$ м, $r = 0,25$ м, $\beta_0 = \pi / 4$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

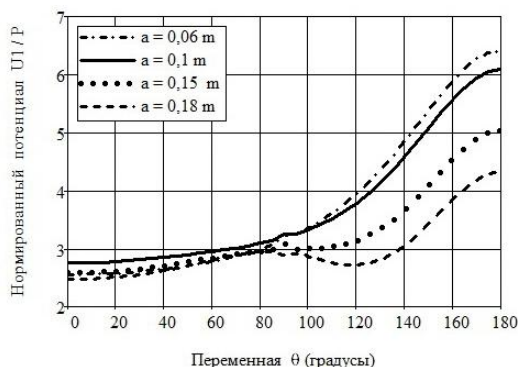


Рис. 2. Графики нормированного потенциала $U_1(r, \theta) / P$ для некоторых значений a

Из приведенных вычислений следует, что для $0 \leq 90^\circ$ значение нормированного потенциала почти одинаково для изменяющихся значений большой полуоси эллипса a . С увеличением переменной θ и величины a (эллипс становится более сплюснутым) значение нормированного потенциала увеличивается.

На рис. 3 показаны графики нормированного потенциала $U_1(r, \theta) / P$ для некоторых значений угла раствора незамкнутой эллипсоидальной оболочки β_0 в градусах при $a = 0,1$ м; $b = 0,05$ м; $h = 0,3$ м; $r = 0,15$ м; $0 \leq \theta \leq \pi$.

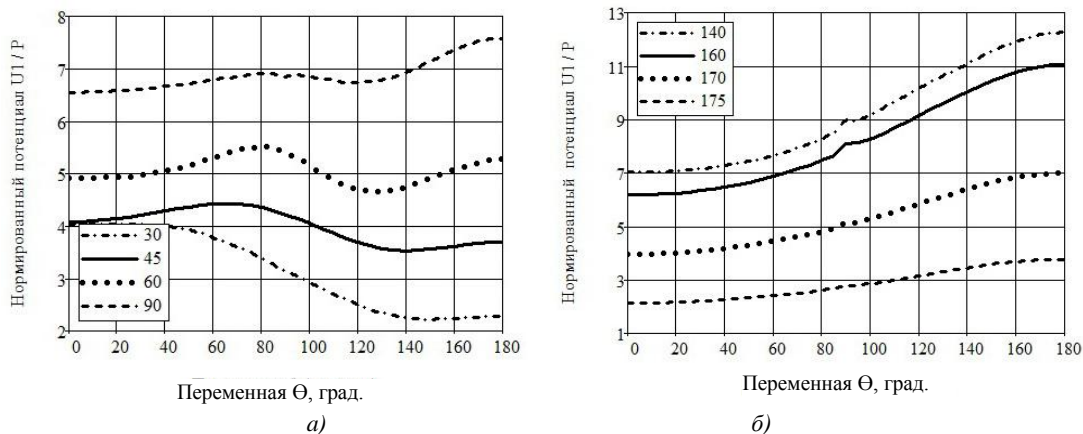


Рис. 3. Графики нормированного потенциала $U_1(r, \theta) / P$ для некоторых значений угла раствора незамкнутой эллипсоидальной оболочки β_0

Из приведенных вычислений следует, что при угле раствора $\beta_0 < 60^\circ$ значение нормированного потенциала убывает для всех значений θ на фиксированном расстоянии от центра эллипса O (рис. 3, *а*), затем при увеличении угла раствора незамкнутой оболочки до $\beta_0 = 140^\circ$ увеличивается (рис. 3, *а* и *б*). При уменьшении отверстия в оболочке ($\beta_0 > 140^\circ$) значение нормированного потенциала уменьшается (рис. 3, *б*).

На рис. 4 изображены графики нормированного потенциала $U_1(r, \theta) / P$ для возрастающих значений h при $a = 0,075$ м, $b = 0,05$ м, $r = 0,15$ м, $\beta_0 = 120^\circ$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

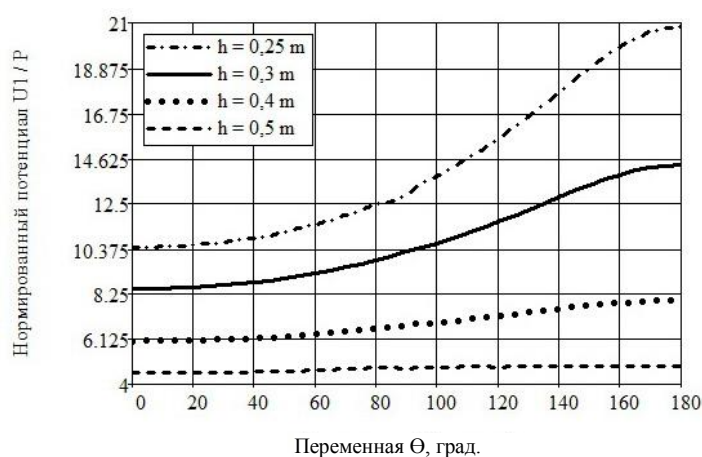


Рис. 4. Графики нормированного потенциала $U_1(r, \theta) / P$ для некоторых значений h

Из приведенных вычислений следует, что при увеличении h значение нормированного потенциала становится одинаковым для всех значений $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ на фиксированном расстоянии от точки O .

Заключение

В статье разработан аналитико-численный алгоритм решения осесимметричной задачи экранирования электростатического поля идеально тонкой незамкнутой сплюснутой эллипсоидальной оболочкой, расположенной в полупространстве с идеально проводящей плоскостью. В качестве источника поля рассмотрен электростатический диполь, расположенный внутри тонкой незамкнутой эллипсоидальной оболочки. С использованием соответствующих теорем сложения для гармонических функций решение поставленной задачи сведено к решению парных сумматорных уравнений по полиномам Лежандра, которые преобразованы к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором.

Численно исследовано влияние геометрических параметров задачи на значение вторичного потенциала электростатического поля. Вычислительные эксперименты показали, что с увеличением большой полуоси эллипса a при заданном значении угла раствора β_0 значение нормированного потенциала $U_1(r, \theta) / P$ на фиксированном расстоянии r от центра эллипса при $\theta \leq 90^\circ$ незначительно изменяется, а при $\theta > 90^\circ$ — постоянно увеличивается. При увеличении угла раствора незамкнутой оболочки β_0 (отверстие незамкнутой оболочки уменьшается) значение нормированного потенциала значительно уменьшается на фиксированном расстоянии r от центра эллипса. Значение нормированного потенциала с увеличением расстояния h от центра эллипса до плоскости становится практически одинаковым для заданных параметров незамкнутой оболочки на фиксированном расстоянии от центра эллипса r .

Разработанная методика и программное обеспечение могут найти практическое применение при разработке и конструировании экранов в различных областях техники.

Список литературы

1. Маергойз, И.Д. Расчет электростатических полей методом интегральных уравнений второго рода / И.Д. Маергойз // *Электричество*. – 1975. – № 12. – С. 11–15.
2. Демирчан, К.С. Машинные расчеты электромагнитных полей / К.С. Демирчан, В.Л. Чечурин. – М. : Высш. шк., 1986. – 240 с.
3. Дмитриев, В.И. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике / В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. – М. : МАКС Пресс, 2008. – 316 с.
4. Ильин, В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений / В.П. Ильин. – Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2000. – 345 с.
5. Исаев, Ю.Н. Методы расчета электромагнитных полей. Практика использования MathCAD, COMSOL Multiphysics / Ю.Н. Исаев, О.В. Васильева. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 162 с.
6. Лебедев, Н.Н. Применение парных интегральных уравнений к электростатическим задачам для полого проводящего цилиндра конечной длины / Н.Н. Лебедев, И.П. Скальская // *ЖТФ*. – 1973. – Т. 43, № 1. – С. 44–51.
7. Лебедев, Н.Н. Распределение электричества на конечном конусе / Н.Н. Лебедев, И.П. Скальская // *Ж. выч. мат. и мат. физики*. – 1969. – Т. 9, № 6. – С. 1336–1346.
8. Лебедев, Н.Н. Распределение электричества на тонком гиперболическом сегменте / Н.Н. Лебедев, И.П. Скальская // *Ж. выч. мат. и мат. физики*. – 1967. – Т. 7, № 2. – С. 349–356.
9. Лебедев, Н.Н. Распределение электричества на тонком параболическом сегменте / Н.Н. Лебедев // *ДАН СССР*. – 1957. – Т. 114, № 3. – С. 513–516.
10. Лебедев, Н.Н. Распределение электричества на тонком сферическом кольце / Н.Н. Лебедев, И.П. Скальская // *ЖТФ*. – 1982. – Т. 52, № 12. – С. 2325–2331.
11. Кадников, С.Н. Методы расчета электростатического поля тонких оболочек и их применение в технике высоких напряжений : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.09.05 / С.Н. Кадников ; НПИ. – Новочеркасск, 1990. – 42 с.
12. Виноградов, С.С. К решению краевых задач теории потенциала для незамкнутых эллипсоидов вращения / С.С. Виноградов, Ю.А. Тучкин, В.П. Шестапов // *Доклады АН УССР. Серия А*. – 1981. – № 12. – С. 47–51.
13. Занадворов, Н.П. Электростатическая задача для полого усеченного конуса / Н.П. Занадворов // *ЖТФ*. – 1987. – Т. 57, № 4. – С. 634–638.
14. Виноградов, С.С. Расчет электростатических полей проводников в форме сферических оболочек с двумя круглыми отверстиями / С.С. Виноградов, Е.Д. Луценко // *Электричество*. – 1988. – № 2. – С. 52–55.
15. Кленов, Г.Э. О потенциале электростатического поля кольцевого электрода / Г.Э. Кленов // *Электричество*. – 1973. – № 9. – С. 85–87.
16. Шушкевич, Г.Ч. Методика решения электростатической задачи для тонкой незамкнутой сферической оболочки // *Электричество*. – 2010. – № 6. – С. 63–68.
17. Collins, W.D. On some triple series equations and their application / W.D. Collins // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1962. – Vol. 11, no. 2. – P. 122–137.
18. Ерофеенко, В.Т. Теоремы сложения / В.Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 240 с.
19. Ерофеенко, В.Т. Задача электростатики для двух тороидальных проводников / В.Т. Ерофеенко // *ЖТФ*. – 1986. – Т. 56, № 8. – С. 1641–1643.
20. Ерофеенко, В.Т. Метод теорем сложения и теория усредненных граничных условий в краевых задачах электродинамики : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.03 / В.Т. Ерофеенко ; Белорус. гос. ун-т. – Минск, 1993. – 29 с.
21. Chang, I.C. Potential of a charged axially symmetric conductor inside a cylindrical tube / I.C. Chang, I.D. Chang // *J. Appl. Phys.* – 1970. – Vol. 41, no. 5. – P. 1967–1970.
22. Smythe, W.R. Charged spheroid in cylinder / W.R. Smythe // *J. Math. Phys.* – 1963. – Vol. 4, no. 6. – P. 833–837.
23. Руховец, А.Н. Решение некоторых классов смешанных краевых задач методом парных уравнений : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 10.00.05 / А.Н. Руховец ; ЛПИ. – Л., 1971. – 11 с.

24. Шушкевич, Г.Ч. Расчет емкости двух тонких сферических оболочек / Г.Ч. Шушкевич // Электричество. – 1984. – № 10. – С. 62–64.
25. Шушкевич, Г.Ч. Электростатическое поле тонкой незамкнутой сферической оболочки и двух дисков / Г.Ч. Шушкевич // Электричество. – 1999. – № 6. – С. 28–34.
26. Шушкевич, Г.Ч. Электростатическое поле тонкого сферического сегмента и диска / Г.Ч. Шушкевич // ЖТФ. – 1984. – Т. 54, № 9. – С. 1801–1803.
27. Шушкевич, Г.Ч. Электростатическое поле тонкой незамкнутой сферической и сфероидальной оболочек / Г.Ч. Шушкевич // Электричество. – 1997. – № 3. – С. 59–64.
28. Шушкевич, Г.Ч. Моделирование полей в многосвязных областях в задачах электростатики / Г.Ч. Шушкевич. – Saarbruchen : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 228 с.
29. Sampath, C. Some electrostatic problems of two equal coaxial circular strips / C. Sampath, D. Jain // J. Math. and Phys. Sci. – 1991. – Vol. 25, no. 3. – P. 217–230.
30. Ерофеенко, В.Т. Моделирование поля канала импульсного электрического разряда в присутствии сферического экрана и тонкого проводящего стержня / В.Т. Ерофеенко, Д.В. Комнатный, Е.В. Лозовская // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2012. – № 3. – С. 85–92.
31. Ерофеенко, В.Т. Расчет электростатических полей в корпусе с отверстием методом граничных элементов / В.Т. Ерофеенко, Д.В. Комнатный // Информатика. – 2011. – № 2(30). – С. 48–55.
32. Аполлонский, С.М. Электромагнитные поля в экранирующих оболочках // С.М. Аполлонский, В.Т. Ерофеенко. – Минск : Университетское, 1988. – 246 с.
33. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.
34. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е.А. Иванов. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.
35. Шушкевич, Г.Ч. Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14. Ч. 2 / Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич. – Минск : Изд-во Гревцова, 2012. – 256 с.
36. Агеев, М.И. Библиотека алгоритмов 0516–100б (справ. пособие). Вып. 2 / М.И. Агеев, В.П. Алик, Ю.И. Марков. – М. : Сов. радио, 1976. – 136 с.
37. Петров, Ю.П. Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов / Ю.П. Петров. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012. – 160 с.

Поступила 26.03.2017

*Гродненский государственный
университет им. Янки Купалы,
ул. Ожешко, 22
e-mail: g_shu@tut.by*

G.Ch. Shushkevich

SIMULATION OF THE ELECTROSTATIC DIPOLE FIELD IN THE PRESENCE OF A THIN UNCLOSED OBLATE ELLIPSOIDAL SHELL AND PLANE

An analytical solution of axially symmetric problem for determining the field of an electrostatic dipole located inside a thin unclosed oblate ellipsoidal shell in the presence of a grounded plane is constructed. Using the addition theorems connecting spherical, ellipsoidal and cylindrical harmonic functions, the solution of the boundary problem is reduced to the solution of dual series equations by the Legendre polynomials that are transformed to an infinite system of linear algebraic equations of the second kind with a completely continuous operator. The influence of the geometrical parameters of the problem on the value of the secondary potential of the electrostatic field is numerically investigated, the corresponding graphs are given.

УДК 658.012.011.56; 004.946; 621.001.63

А.М. Крот¹, П.П. Ткачева^{1,2}, И.Н. Спагар³

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРОВОДЯНЫХ ПОТОКОВ ВНУТРИ РАБОЧЕЙ КАМЕРЫ МИКРОТУРБИНЫ И ОЦЕНИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ КОНСТРУКЦИИ ТУРБОАГРЕГАТА

Рассматриваются основные этапы создания расчетных сеток и компьютерного моделирования пароводяных потоков в рабочей камере корпуса микротурбины с помощью современных программных комплексов. Разрабатывается методика расчета энергетических потерь в проточных частях микротурбины и оценивания КПД ступени микротурбины на основе результатов компьютерного моделирования потоков перегретого пара при вращении рабочего колеса. С целью усовершенствования конструкции турбоагрегата исследуются модификации конечно-элементной модели проточных частей рабочей камеры корпуса микротурбины с учетом различных положений дефлекторов (лопаток) в сопловых каналах, а также выполняется расчет динамических характеристик пароводяного потока и рассчитывается КПД модифицированной ступени микротурбины.

Введение

Компьютерное моделирование аэрогазодинамических процессов [1–6] является важной составляющей при разработке различных типов энергетических машин с целью улучшения их эксплуатационных характеристик [7]. В этом направлении лаборатория моделирования самоорганизующихся систем ОИПИ НАН Беларуси совместно с ООО «Промпривод» успешно выполнила задание 01.02 «Разработать и внедрить интегрированную информационную технологию поддержки процессов проектирования новых типов энергетических машин (турбоагрегатов малой мощности) с применением средств компьютерного аэродинамического моделирования и натурных испытаний» в рамках ГНТП «Электронное управление ресурсами предприятия (CALS-ERP-технологии)», 2011–2016 гг.

Основное предназначение газодинамического анализа потока внутри корпуса микротурбины связано с необходимостью построения адекватных компьютерных моделей движения пароводяных потоков в проточных частях микротурбины для определения наиболее оптимальной геометрической формы корпуса микротурбины и каналов, положения дефлекторов (лопаток) в сопловых каналах.

Начальным этапом процесса компьютерного моделирования является создание по чертежам трехмерной конструкторской модели турбоагрегата, которое может быть осуществлено в одном из известных программных комплексов инженерного анализа: SolidWorks, Pro/ENGINEER, Unigraphics NX и т. п. Так, например, конструкторские 3D-модели микротурбин, изготавливаемые ООО «Промпривод», были созданы в программном комплексе SolidWorks.

В настоящей статье рассматриваются подходы к созданию объемных конечно-элементных расчетных сеток проточных частей рабочей камеры корпуса микротурбины, исследуются проблемы, связанные с построением по геометрическим 3D-моделям объемных расчетных сеток, компьютерным моделированием потоков перегретого пара средствами программного комплекса STAR-CCM+, на основе которого оценивается КПД для усовершенствования конструкции турбоагрегата.

1. Создание объемных конечно-элементных неподвижных и вращающихся расчетных сеток проточных частей корпуса микротурбины

На начальной стадии создается, как правило, твердотельная модель конструкции турбоагрегата, поэтому первичной задачей является изучение особенностей геометрии на предмет их влияния на газодинамику происходящих внутри процессов. С этой целью определяются несущие

шественные элементы (например, болты, шпонки и т. п.), которые следует удалить для упрощения создаваемой модели и уменьшения ресурсоемкости задачи. Вместе с тем создаваемая модель должна полностью соответствовать исходной конструкции и позволять выполнять компьютерное моделирование всех особенностей протекающих газодинамических процессов, оказывающих значительное влияние на КПД турбоагрегата.

Следующей стадией является передача (импорт) геометрии в программный комплекс вычислительной газогидродинамики STAR-CCM+ [8, 9]. Твердотельная модель микротурбины после импорта показана на рис. 1. Здесь, в частности, видны рабочее колесо, поворотнo-сопловые каналы, а также вход (снизу) и выход (сверху) конструкции (рис. 1, а). Система поворотнo-сопловых каналов микротурбины состоит из шести ступеней, каждая из которых содержит по три сопловые лопатки (дефлектора), объединенные в поворотнo-сопловую диафрагму. Далее для построения расчетной сетки необходимо выделить объем, занимаемый рабочим телом (пароводяным потоком). Эта операция может быть реализована как на предыдущем этапе, так и после импорта посредством простейших теоретико-множественных операций (объединения, пересечения, вычитания) над объемами. Другими словами, из большего по сравнению с размерами конструкции объема вычитаются области, занимаемые конструктивными элементами, а оставшиеся части будут моделью объема [1], занимаемого рабочим телом (рис. 1, б). Целью разделения вращающихся и неподвижных частей на данном этапе является последующее использование подвижных сеток [3, 5] при моделировании газодинамического процесса вращения ротора.

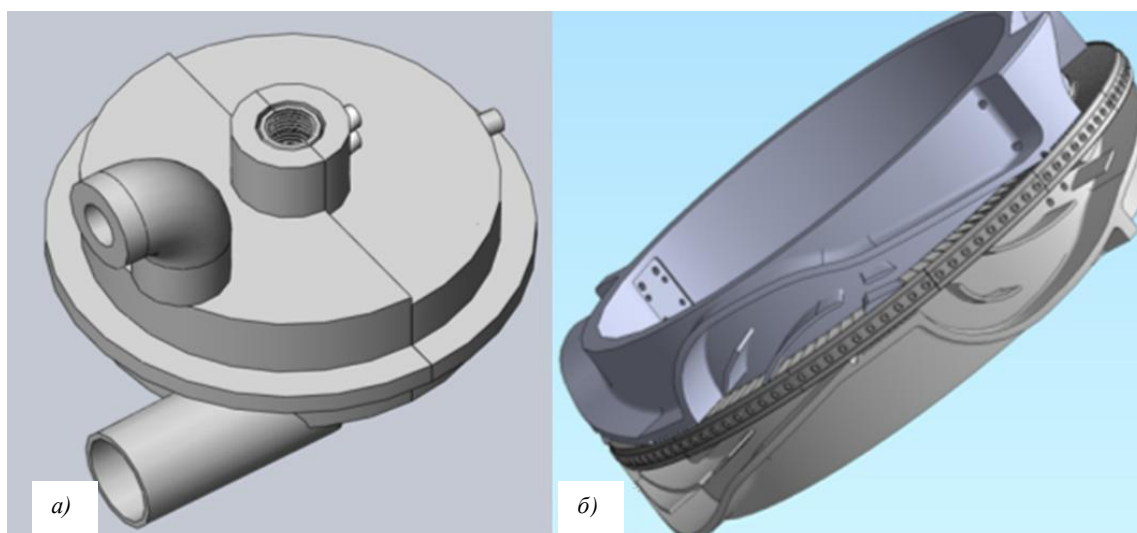


Рис. 1. Полная геометрическая твердотельная модель микротурбины (а); выделенная часть рабочей камеры, включающая поворотнo-сопловые каналы и рабочее колесо (б)

Далее осуществляется генерация конечно-элементной расчетной сетки. Для этого вначале необходимо определить требуемый средний размер ячейки исходя из минимальной величины зазоров либо характерных элементов, присутствующих в модели [1]. В данном случае речь идет о расстоянии между лопатками рабочего колеса и внешней стенкой колеса поворотнo-сопловой диафрагмы либо о глубине диафрагменных уплотнений. Однако при выборе среднего размера ячейки для соблюдения требований ресурсоемкости задачи важно учесть то обстоятельство, что помимо основного рабочего объема проточных частей будет дополнительно сгенерирован пристеночный слой толщиной в несколько ячеек, который может значительно увеличить общее число ячеек. Учитывая дальнейшие задачи компьютерного моделирования, необходимо также уделить большое внимание качеству генерируемой сетки. В частности, следует избегать существенных различий в размерах ячеек, а также слишком больших либо слишком малых соотношений сторон отдельных ячеек [1]. Для рассматриваемого примера были получены конечно-элементные модели, содержащие примерно 1 500 000 ячеек для рабочей камеры колеса, около 770 000 ячеек для входной части и приблизительно 880 000 для выходной части.

На рис. 2 изображены сечения сгенерированной расчетной сетки.

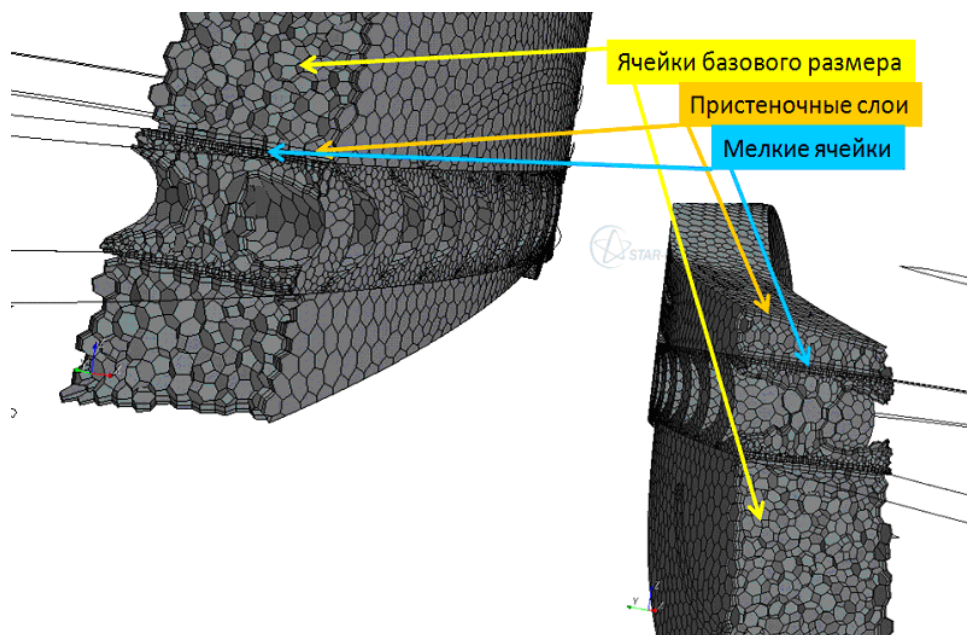


Рис. 2. Вид сечений сгенерированной расчетной сетки

Далее сгенерированные расчетные сетки должны объединяться посредством создания интерфейсных областей между вращающимися (колесом) и неподвижными (входной и выходной частями) элементами в соответствии с нестационарной моделью «подвижная сетка» (moving grid) [3, 6, 8, 9]. Однако с целью ускорения расчет может осуществляться и в стационарной постановке задачи с использованием модели «подвижная система координат» (moving reference frame) [8, 9]. Синтезированные конечно-элементные объемные сетки проточных частей микротурбины необходимо тщательно проверить контролирующими средствами программного комплекса STAR-CCM+ (рис. 3).

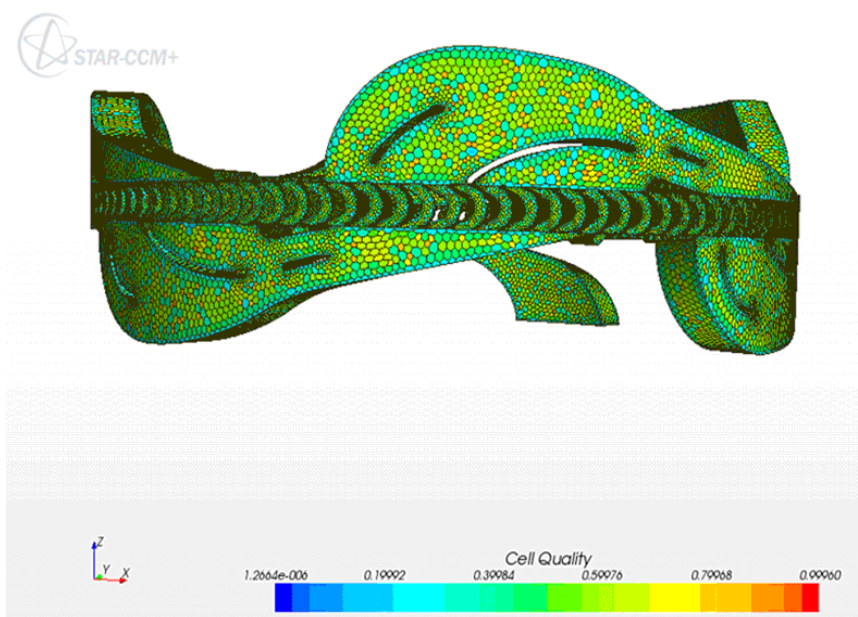


Рис. 3. Результат синтеза и проверки объемной сетки проточных частей микротурбины (сеточная модель в сборке)

В ходе проверки объемной расчетной сетки не было обнаружено ни бракованных ячеек, ни ячеек с низким качеством [1]. Расчетная сетка в основе своей содержала ячейки с качеством синтеза, оцениваемым показателем в интервале от 0,39984 до 0,99960. Другими словами, синтезированные объемные конечно-элементные сетки проточных частей системы микротурбины оказались пригодными к реализации на них численного моделирования в программном комплексе STAR-CCM+ или STAR-CD [2].

2. Компьютерное моделирование потоков перегретого пара внутри проточных частей корпуса рабочей камеры микротурбины с рабочим колесом

Для эффективной работы микротурбины наиболее приемлемым является однонаправленное ламинарное движение потоков перегретого пара, однако анализ результатов компьютерного моделирования выявил в камере микротурбины нежелательные зоны с вихревым движением потоков (рис. 4, а, в). В этих зонах наблюдалось не только попятное движение, но и значительные потери скоростного напора потока, т. е. за счет диссипации кинетической энергии пароводяного потока в стационарном вихре скорость уменьшалась со 143 до 1,5 м/с, что наглядно демонстрируется на рис. 4 в областях расчетной модели, выделенных замкнутыми кривыми красного цвета. Исходя из этого, акцент исследования был направлен на изменение (усовершенствование) конструкции для уменьшения зон вихревого движения, а значит, и уменьшения потерь мощности микротурбины.

С целью детального изучения проблемы и выявления существенных причин, приводящих к уменьшению рабочей мощности микротурбины, были сделаны три сечения картины распределения векторов скоростей движения пароводяных потоков в действующей конструкции микротурбины, т. е. на уровнях, соответствующих диаметрам: периферийному $D_1 = 0,75$ м, среднему $D_2 = 0,69$ м, корневому $D_3 = 0,6$ м.

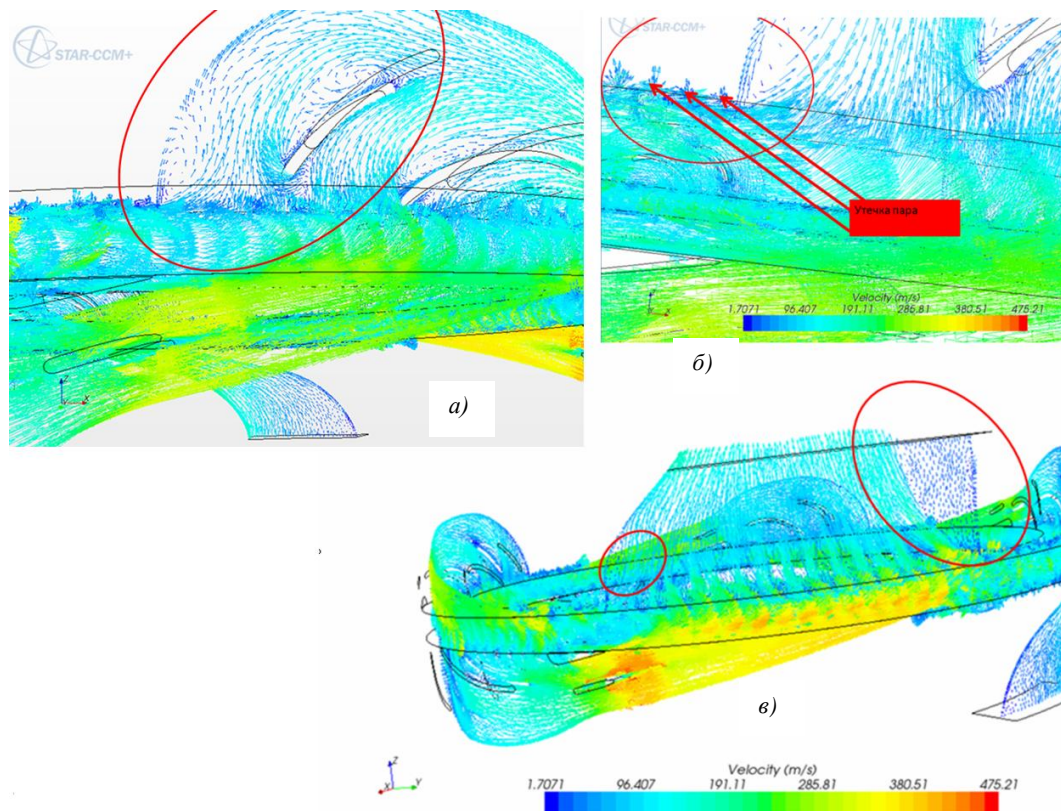


Рис. 4. Сечения картины распределения векторов скоростей движения пароводяных потоков в действующей конструкции микротурбины: а) на уровне, соответствующем диаметру $D_2 = 0,69$ м (четвертая ступень); б) $D_2 = 0,69$ м (система выхода); в) $D_1 = 0,75$ м (зоны утечки пара)

Следует отметить, что наличие вихревых зон было обнаружено практически во всех ступенях микротурбины в сечениях на уровнях, соответствующих диаметрам $D_2 = 0,69$ и $D_3 = 0,6$ м (сечения на уровне $D_1 = 0,75$ м выполнялись с третьей по шестую ступени). На всех сечениях отчетливо виден резкий скачок скорости после шестой ступени, а также вихревые зоны на выходе. Кроме того, были обнаружены области утечки пара, которые также приводят к уменьшению кинетической энергии основного потока и могут способствовать появлению вихревых зон в ступенях микротурбины (рис. 4, б).

Наличие вихревых зон в ступенях приводит к возникновению попятных движений потока [10], направленных против основного потока перегретого пара. Это, в свою очередь, обуславливает нежелательную диссипацию кинетической энергии потока, приводящую к уменьшению общего КПД микротурбины.

3. Модификации конечно-элементной модели проточных частей корпуса рабочей камеры микротурбины с учетом различных положений сопловых решеток и расчет динамических характеристик пароводяного потока

В связи с выявленными проблемами в ходе вычислительного эксперимента была предпринята попытка модифицировать конечно-элементную модель. В частности, была реализована модификация выходного канала посредством установки вертикальной перегородки в зоне выхода на основе рекомендаций, полученных от ведущих специалистов ООО «Промпривод» (рис. 5).

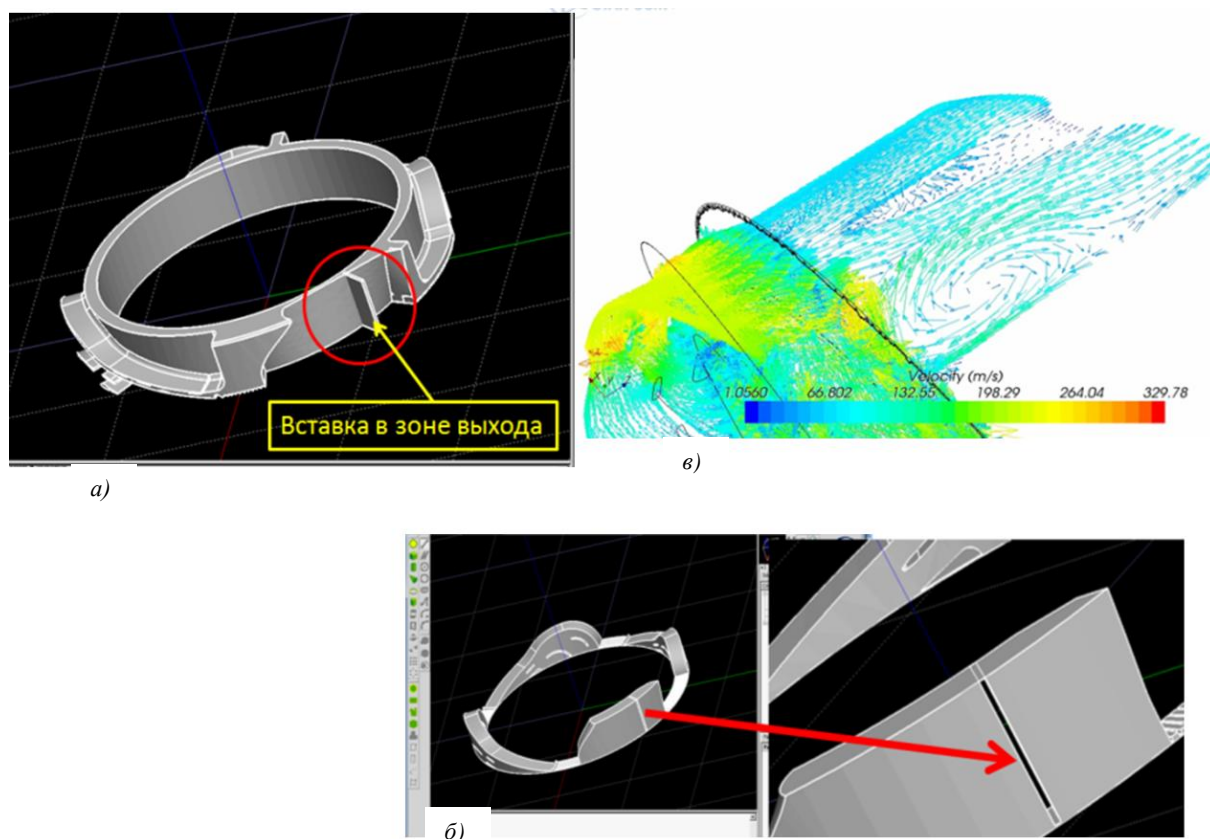


Рис. 5. Этап модификации рабочей камеры микротурбины посредством установки перегородки (вставки) в зоне выхода: а) вставка в зоне выхода; б) результат модернизации рабочей камеры микротурбины с выделенным фрагментом модификации выходного канала (справа); в) сечение поля распределения векторов скоростей движения потоков перегретого пара в модернизированной конструкции микротурбины в зоне выхода

Однако данная попытка (как и еще ряд других) не увенчалась успехом: на рис. 5, в видно наличие вихревых движений в зоне выхода. Этот результат показал, что пытаться создавать опытный образец со вставкой в зоне выхода не имеет смысла, т. е. компьютерное моделирование позволило реально сэкономить средства на изготовление неэффективного опытного образца [2, 6].

Еще одним вариантом модернизации микротурбины с целью увеличения ее КПД была попытка модификации сопловых решеток рабочей камеры микротурбины на основе электронных конструкторских 3D-моделей в среде программного комплекса STAR-Design.

Для модификации проточных частей корпуса рабочей камеры микротурбины в среде программного комплекса STAR-Design 3D-модель проточных частей корпуса рабочей камеры микротурбины была разделена на части с выходом, входом и рабочим колесом. В части с выходом были выделены те сопловые лопатки, которые подлежат модификации. Например, первоначально было произведено отделение каждой третьей сопловой лопатки первой, второй и пятой ступеней (рис. 6, а). Затем они были помещены на цилиндр, диаметр которого соответствует диаметру корпуса микротурбины (рис. 6, б). После этого цилиндр был повернут относительно оси Oz на 3° против часовой стрелки.

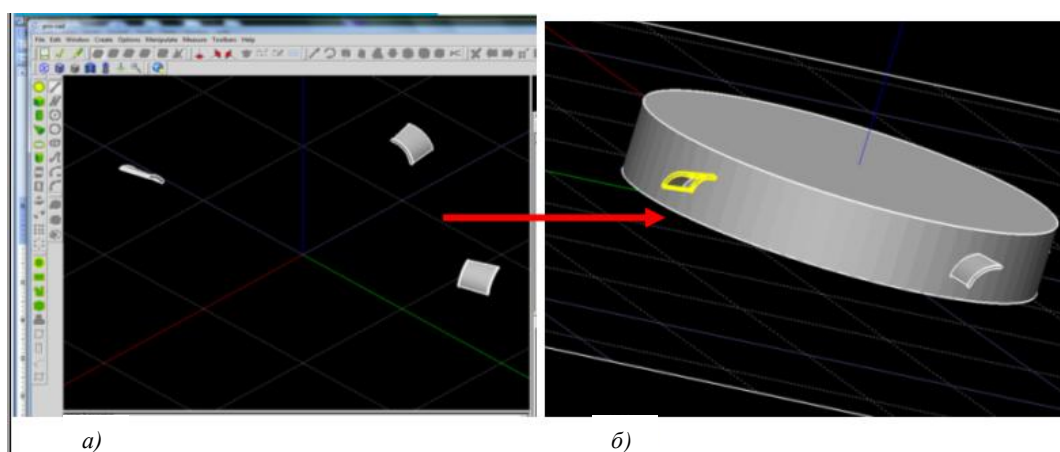


Рис. 6. Этапы модификации сопловых решеток рабочей камеры микротурбины: а) отделенные третьи сопловые лопатки первой, третьей и пятой ступеней; б) цилиндр с прикрепленными третьими сопловыми лопатками первой, третьей и пятой ступеней

На следующем этапе модификации было произведено удаление цилиндра, а сами сопловые лопатки помещены на корпус рабочей камеры микротурбины (рис. 7).

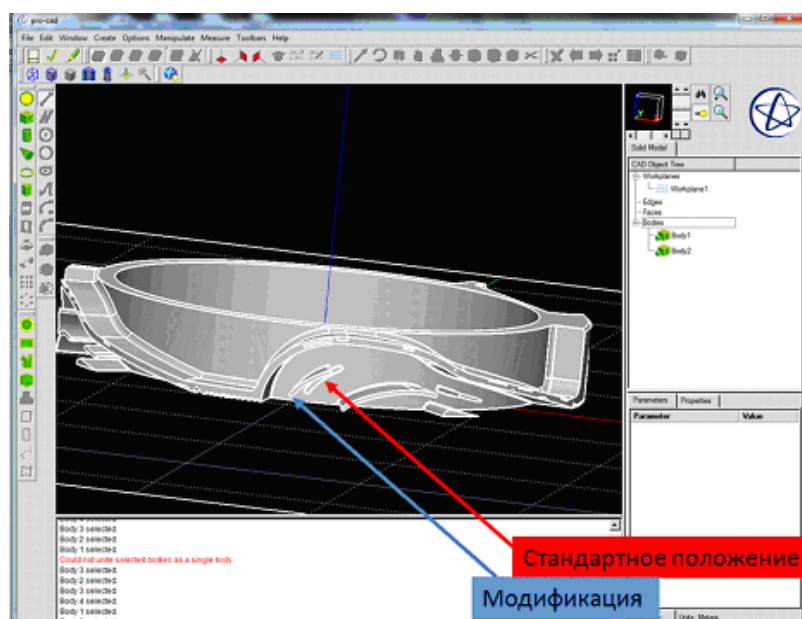


Рис. 7. Результат модификации проточных частей корпуса рабочей камеры микротурбины (часть с выходом)

Таким же образом произведена и модификация части со входом: первоначально были выделены третьи сопловые лопатки второй, четвертой и шестой ступеней, помещены на цилиндр, повернуты относительно оси Oz на 3° против часовой стрелки, после чего размещены на корпусе микротурбины. Полученные модификации рабочей камеры микротурбины были импортированы из программного комплекса STAR-Design в программный комплекс STAR-CCM+, затем реализованы этапы построения расчетных сеток и компьютерного моделирования описанными выше способами.

В ходе компьютерного моделирования, в частности, было обнаружено ослабление зон завихренности в модифицированных проточных частях камеры микротурбины при повороте каждой третьей сопловой решетки на -3° по оси Oz во всех ступенях микротурбины. Потенциально возникновение зон завихренности может существенно снижать КПД турбоагрегата и, напротив, ослабление зон завихренности приводит к его увеличению.

На рис. 8 изображено поле скоростей внутри проточных частей корпуса рабочей камеры модифицированной микротурбины после проведения компьютерного моделирования на основе программного комплекса STAR-CCM+, на котором отчетливо видно, что в результате принятых мер по изменению проточных частей микротурбины удалось практически полностью устранить паразитные вихревые зоны.

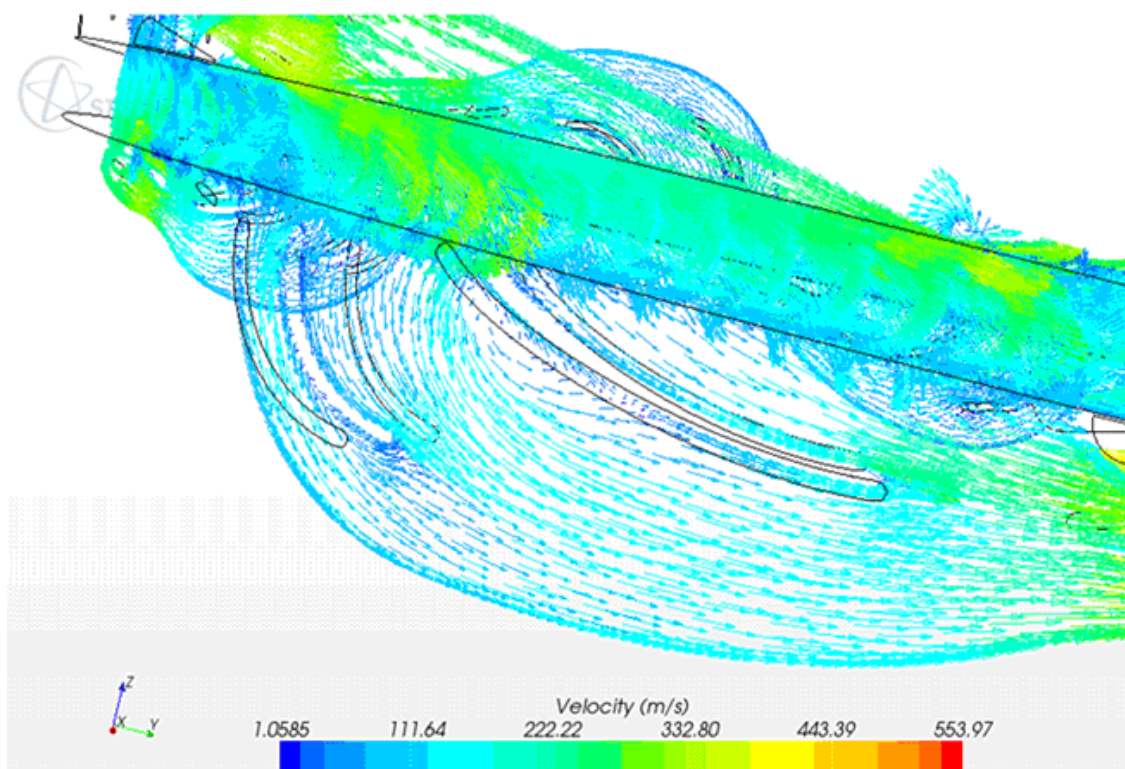


Рис. 8. Поле скоростей внутри проточных частей корпуса рабочей камеры модифицированной микротурбины (сечение на уровне, соответствующем диаметру $D_2 = 0,69$ м)

Во всех выполненных вычислительных экспериментах сходимость и точность решений отслеживались по графикам невязок для основных переменных потока: скорости, давления, температуры и т. д. (рис. 9, а), а также по текущему значению средней скорости на выходе ступени микротурбины (рис. 9, б).

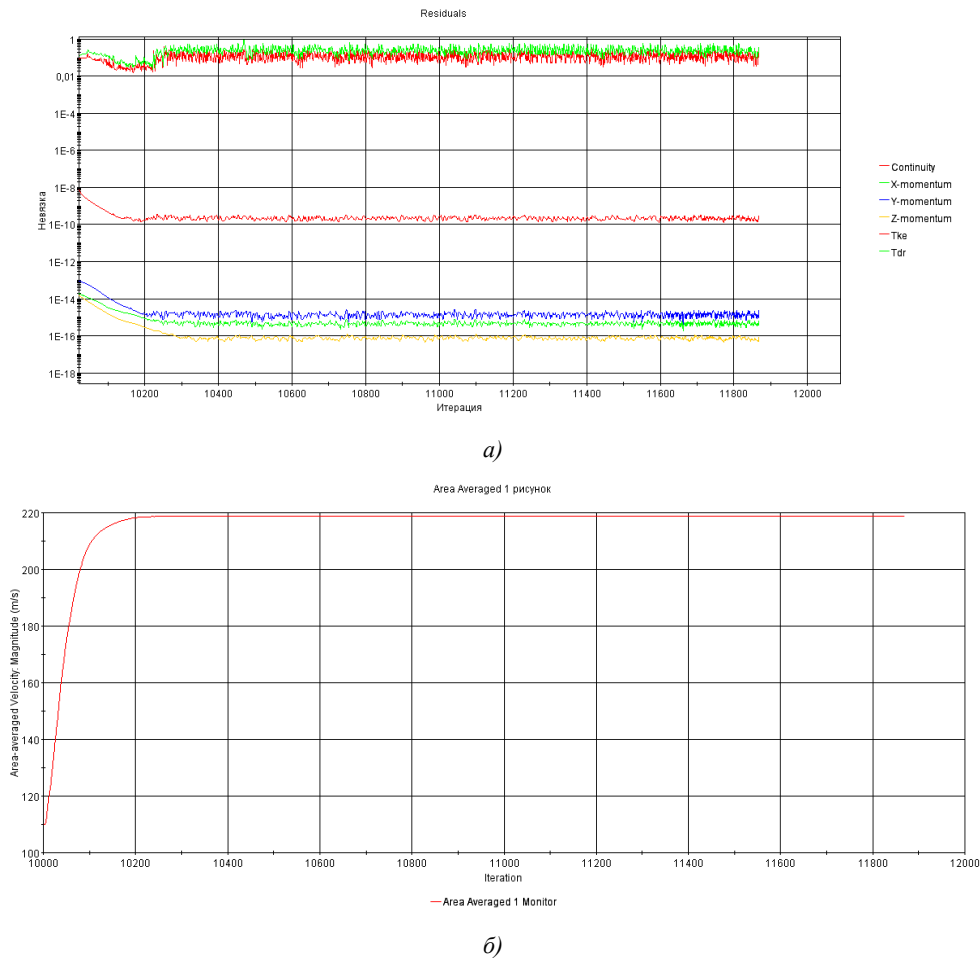


Рис. 9. Графики невязок для основных переменных задачи (а) и график средней скорости на выходе ступени микротурбины (б)

4. Оценка энергетических потерь в ступенях микротурбины и расчет КПД микротурбины на основе данных вычислительного эксперимента

С использованием результатов компьютерного моделирования была разработана методика оценивания энергетических потерь в проточных частях корпуса микротурбины, включающая термодинамический и газодинамический расчеты КПД микротурбины.

Энергетические потери в проточных частях микротурбины могут быть оценены посредством величины ее КПД [7], определенного при условии установившегося (стационарного) режима вращения микротурбины:

$$\eta = \frac{N_{mech}}{G \cdot \Delta q} = \frac{K \cdot \omega}{G \cdot \Delta q} \quad (1)$$

где N_{mech} – механическая мощность вращающейся микротурбины, оцениваемая по вычисленному на этапе компьютерного моделирования значению ее момента силы K ; ω – угловая скорость вращения микротурбины, $\omega = 2\pi n / 60$ рад/с, где n – частота вращения, заданная в об/мин; G – массовый расход водяного пара; Δq – перепад удельной теплоты потока водяного пара на входе и выходе рабочей камеры.

Термодинамическое состояние перегретого водяного пара не может быть точно описано уравнением Клапейрона – Менделеева состояния идеального газа или же уравнением Ван-дер-Ваальса с поправками на неидельность газа, поскольку оно подчиняется более общему уравнению Вукаловича – Новикова [11]:

$$pV_{\mu} = RT \left[1 + \frac{B_1(T)}{V_{\mu}} + \frac{B_2(T)}{V_{\mu}^2} + \dots \right],$$

где p – давление; V_{μ} – объем одного моля газа; T – температура; $R = 8,31 \cdot 10^3$ (Дж/кмоль·К) – универсальная газовая постоянная; $B_i(T)$ – вириальные коэффициенты, вычисление которых производится с учетом ассоциации молекул (объединения под влиянием ван-дер-ваальсовских сил притяжения).

Согласно основному соотношению термодинамики обратимых процессов, объединяющему первый и второй законы термодинамики, справедливы уравнения [11]

$$dq = Tds = du + \delta A = dh - vdp, \quad (2)$$

где s – удельная энтропия; u – удельная внутренняя энергия; A – удельная работа; h – удельная энтальпия; v – удельный объем, т. е. $v = V_{\mu} / \mu$, μ – молярный вес; T – температура; p – давление.

Воспользовавшись формулой (2), оценим бесконечно малое приращение функции удельной теплоты в окрестности $T = T_{\text{вых}}$:

$$\delta q = q(T_{\text{вых}}) - q(T_{\text{вых}} - \delta T) = T_{\text{вых}} \cdot [s(T_{\text{вых}}) - s(T_{\text{вых}} - \delta T)], \quad (3)$$

откуда

$$q(T_{\text{вых}}) = T_{\text{вых}} \cdot s(T_{\text{вых}}) \quad (4)$$

и аналогично

$$q(T_{\text{вх}}) = T_{\text{вх}} \cdot s(T_{\text{вх}}). \quad (5)$$

Итак, приращение функции удельной теплоты при изменении температуры от $T_{\text{вх}}$ до $T_{\text{вых}}$ определяется как

$$\Delta q = q(T_{\text{вых}}) - q(T_{\text{вх}}) = T_{\text{вых}} \cdot s(T_{\text{вых}}) - T_{\text{вх}} \cdot s(T_{\text{вх}}). \quad (6)$$

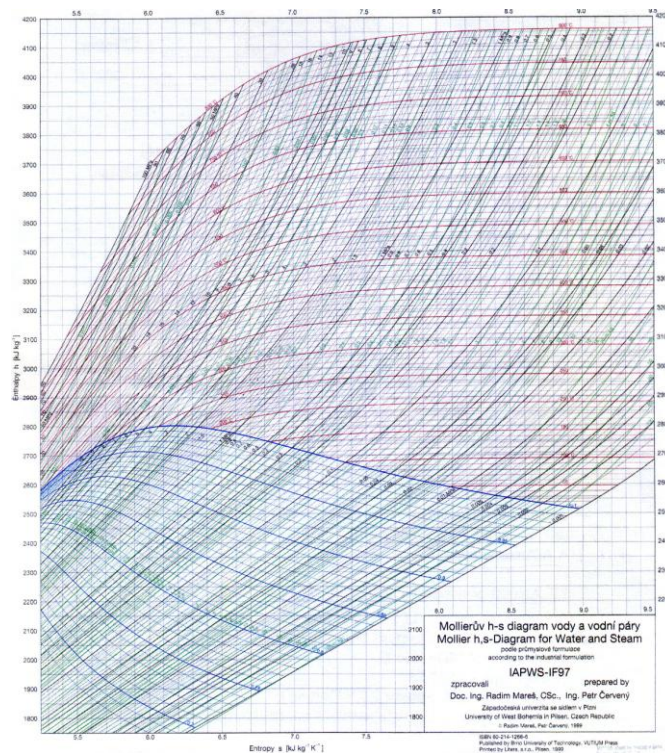


Рис. 10. Диаграмма термодинамического состояния водяного пара по М.П. Вукаловичу

Согласно таблицам М.П. Вукаловича [12] (см. также диаграмму на рис. 10) при температуре на входе (перед сопловым аппаратом первой ступени) $T_{\text{вх}} = T_0^1 = 523,15 \text{ К}$ ($250 \text{ }^\circ\text{C}$) энтропия насыщенного водяного пара $s_{\text{вх}} = s_0^1 = 6,07212 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$, а на выходе (за турбиной в шестой ступени) температуре $T_{\text{вых}} = T_2^6 = 423,15 \text{ К}$ ($150 \text{ }^\circ\text{C}$) соответствует энтропия, равная $s_{\text{вых}} = s_2^6 = 6,8383 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$. Поэтому согласно формуле (6) получаем

$$\Delta q = 523,15 \cdot 6,07212 \cdot 10^3 - 423,15 \cdot 6,8383 \cdot 10^3 = 3,176629 \cdot 10^6 - 2,893627 \cdot 10^6 = 2,83 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг.} \quad (7)$$

По результатам компьютерного моделирования вычисляется крутящий момент потока водяного пара – фактически момент силы вращательного движения микротурбины:

$$K_{\text{flow}} = 1,05 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}, \quad (8)$$

а также массовый расход рабочего тела G в установившемся режиме вращения микротурбины:

$$G = 2,14 \text{ кг/с.} \quad (9)$$

В данном вычислительном эксперименте установившийся (стационарный) режим исследовался при частоте вращения рабочего колеса микротурбины $n = 3000 \text{ об/мин}$, т. е. при угловой скорости вращения $\omega = \frac{2\pi n}{60} \approx 2 \cdot 3,1416 \cdot \frac{3000}{60} = 3,1416 \cdot 10^2 \text{ рад/с}$.

Следовательно, механическая мощность вращающейся микротурбины оценивается величиной

$$N_{\text{mech}} = K \cdot \omega = 1,05 \cdot 10^3 \cdot 3,1416 \cdot 10^2 = 3,29868 \cdot 10^5 \text{ Вт.} \quad (10)$$

Подставляя (7), (9) и (10) в формулу (1), находим искомый КПД микротурбины:

$$\eta = \frac{N_{\text{mech}}}{G \cdot \Delta q} = \frac{3,29868 \cdot 10^5}{2,14 \cdot 2,83 \cdot 10^5} = 0,54468. \quad (11)$$

Таким образом, согласно (11) КПД микротурбины приблизительно оценивается величиной 54–55 %. В целом этот вывод подтверждается результатами натурных испытаний. По заключению независимой экспертной организации РПУ «БЕЛТЭИ» от 21.07.2008 г. при испытаниях турбоустановок, использующих данную микротурбину, ее КПД составил $\eta_{oi} = 57 \%$ (при принятых КПД электрогенератора $\eta_r = 90 \%$, паспортных значениях расхода пара $G = 10 \text{ т/ч}$ и мощности электрогенератора $N_r = 250 \text{ кВт}$).

При помощи вышеизложенной методики была проведена серия вычислительных экспериментов по оценке влияния термо- и газодинамических параметров на величину КПД микротурбины. Так, согласно приведенным расчетам (1)–(11) в стационарном режиме работы микротурбина вращается со скоростью 3000 об/мин и, соответственно, ее КПД составляет 55 %. Результаты компьютерного моделирования показали, что с изменением числа оборотов меняется и КПД (табл. 1).

Таблица 1

Зависимость КПД микротурбины от числа оборотов

Число оборотов n , об/мин	1000	1500	2000	2500	3000
КПД, %	21	30	35	43	55

Данные табл. 1 объясняют, почему при измеренных параметрах потока водяного пара в результате натурных испытаний, проведенных РПУ «БЕЛТЭИ», осредненный по опытам КПД микротурбины составил только $\eta_{oi} = 45 \%$. В том же заключении данной экспертной ор-

ганизации указывалось, что различие паспортного значения КПД η_{oi} , равного 57 %, и полученного по измеренным параметрам КПД $\eta_{oi} = 45$ %, возможно, обуславливалось как влиянием технического состояния проточных частей турбины, так и погрешностью измерения самих параметров.

В табл. 2 показана зависимость КПД от изменения величины давления на выходе микро-турбины при $T_{вых} = 250$ °С. Очевидно, что изменение выходного давления приводит к незначительным изменениям КПД, т. е. механической мощности самой микро-турбины.

Таблица 2

Зависимость КПД микро-турбины
от величины выходного давления $p_{вых}$

Выходное давление, МПа	0,64	0,54	0,51
КПД, %	47	48	49

По результатам компьютерного моделирования пароводяных потоков в модифицированных проточных частях микро-турбины был оценен КПД на основе формул (1)–(11) (табл. 3).

Таблица 3

Зависимость КПД микро-турбины от режима ее работы

Режим работы микро-турбины		КПД микро-турбины, %
с модификацией лопаток	без модификации	
$p_{вх} = 1,3$ МПа; $T_{вх} = 191$ °С		59
	$p_{вх} = 1,3$ МПа; $T_{вх} = 191$ °С	57
$p_{вх} = 1,4$ МПа; $T_{вх} = 250$ °С		58
	$p_{вх} = 1,4$ МПа; $T_{вх} = 250$ °С	55

Сравнительный анализ оценок КПД микро-турбины на основе данных компьютерного моделирования показал, что достигнутый результат по устранению зон вихревых движений во всех шести ступенях камеры модифицированной микро-турбины привел к желаемому увеличению КПД с 55–57 до 58–59 % (см. табл. 3), т. е. в среднем на 3 %.

Заключение

В работе рассмотрены основные этапы генерации конечно-элементной расчетной сетки, которые являются необходимым звеном процесса компьютерного моделирования [2]. Для ускорения решения задачи расчет осуществлялся в стационарной постановке с использованием модели «подвижная система координат» (moving reference frame) [8, 9]. Это позволило сократить время расчета на один-два порядка по сравнению с нестационарной моделью типа «подвижная сетка» (moving grid) [3, 5, 6]. Проведен вычислительный эксперимент по моделированию поля скоростей и распределения давления внутри проточных частей корпуса рабочей камеры микро-турбины с рабочим колесом на основе пакета STAR-CCM+. Сходимость и точность решения оценивались по значениям невязок основных переменных потока (скорости, давления, температуры и т. д.), а также по стабилизационным значениям интегральных величин, таких как массовый расход, средняя скорость, давление и температура на границах и в сечениях модели. Для упрощения анализа результатов компьютерного моделирования построены графики изменения переменных (давлений, температур, скоростей, плотностей) для каждой ступени микро-турбины. С целью сокращения паразитных вихревых зон течения пароводяного потока произведена модификация сопловых решеток в ступенях микро-турбины.

Разработана методика оценивания энергетических потерь в проточных частях на основе термодинамического и газодинамического расчета КПД микро-турбины. Результаты, полученные при использовании этой методики, оказались близкими по значениям к данным КПД микро-турбины, полученным в ходе натурных (стендовых) испытаний.

Проведены вычислительные эксперименты по оценке влияния термо- и газодинамических параметров на величину КПД микротурбины. Установлено, что изменение числа оборотов микротурбины существенно сказывается на величине ее КПД.

Результаты компьютерного моделирования использовались для определения более рациональных параметров проточных частей микротурбины, закладываемых на стадии проектирования. В частности, компьютерное моделирование внутри модифицированных проточных частей микротурбины позволило предсказать увеличение КПД в среднем на 3 % по сравнению с реально функционирующим изделием.

Список литературы

1. Ткачева, П.П. Компьютерная технология синтеза расчетных сеток в программном комплексе STAR-CD для моделирования аэродинамических потоков в рабочей камере турбокомпрессора / П.П. Ткачева // Информатика. – 2005. – № 2(6). – С. 5–14.
2. Минервина, Е.Б. Компьютерное моделирование аэродинамических потоков в рабочей камере турбокомпрессора с использованием программного комплекса STAR-CD / Е.Б. Минервина // Информатика. – 2005. – № 2(6). – С. 15–24.
3. Исследование плоских ударных волн в турбокомпрессоре на основе аэродинамического компьютерного моделирования в программном пакете STAR-CD / В.А. Балдин [и др.] // Информатика. – 2005. – № 4. – С. 5–12.
4. Компьютерное моделирование аэродинамических процессов в транспортирующих органах кормоуборочных комбайнов / А.М. Крот [и др.] // Информатика. – 2006. – № 3(11). – С. 80–90.
5. Построение расчетных сеток и компьютерное моделирование в задачах исследования гидродинамических процессов в проточных частях гидротрансмиссионных систем / А.М. Крот [и др.] // Информатика. – 2008. – № 1(17). – С. 95–104.
6. Вычислительная аэрогидродинамика в машиностроении / А. Крот [и др.] // Наука и инновации. – 2009. – № 9(79). – С. 34–38.
7. Колчин, А.И. Расчет автомобильных и тракторных двигателей / А.И. Колчин, В.П. Демидов. – М. : Высш. школа, 2002.
8. User Guide for STAR-CD: version 3.15A. Computational Dynamics Limited. – London, 2002.
9. CD adapco DYNAMICS [Electronic resource]. – 2016. – Mode of access : [http:// www.cd-adapco.com](http://www.cd-adapco.com). – Date of access : 20.04.2017.
10. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М. : Наука, 2003. – 840 с.
11. Яворский, Б.М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М. : Гос. изд-во физико-математической литературы, 1963. – 848 с.
12. Вукалович, М.П. Термодинамические свойства воды и водяного пара / М.П. Вукалович. – М. : Наука, 1973. – 160 с.

Поступила 27.04.2017

¹Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: alxkrot@newman.bas-net.by

²Белорусский государственный университет,
Минск, пр. Независимости, 4

³ООО «Промпривод»,
Минск, пер. Бехтерева, 8

A.M. Krot, P.P. Tkachova, I.N. Spagar

**COMPUTATIONAL MODELING THE SUPERHEATED STEAM FLOWS INTO
THE SETTING PARTS OF MICROTURBINE AND EFFICIENCY ESTIMATION
FOR IMPROVEMENT OF TURBOAGGREGATE CONSTRUCTION**

The main stages of mesh creation and computational modeling the superheated steam flows into the setting parts of microturbine based on modern program packages have been considered. A method for energy loss calculation into the setting parts of microturbine and efficiency estimation based on computational modeling the superheated steam flows (arising from fluid converter rotation) has been developed. To improve turbo-aggregate construction the finite element model of the setting parts of microturbine has been modified. Further computational modeling the superheated steam flows into the modified setting parts of micro-turbine showed the efficiency increasing on 3 %.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

УДК 65.011.56

А.В. Пузанов

**МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ САЕ-МОДЕЛЕЙ НА ПРИМЕРЕ
КОНСТРУКТОРСКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОРАБОТКИ
ПЛУНЖЕРА ФОРСИРОВАННОЙ ГИДРОМАШИНЫ**

Отработка на технологичность с обеспечением требований функциональности изделия определяет анализ большого количества конструктивных исполнений. Предлагается методика формирования САЕ-моделей из САД-модели с учетом ее упрощения (исключения нефункциональных элементов, применения симметрии и т. п.), добавления недостающих данных (в том числе использования свойств материалов, отличных от САД-модели), возможности мультидисциплинарного анализа в одном или нескольких программных комплексах. Приводится пример конструкторско-технологической проработки плунжера форсированной гидромашин.

Введение

Гидропривод (ГП) – важный компонент современных следящих, силовых и прочих систем управления и стабилизации. Он представляет собой совокупность различных устройств, предназначенных для приведения в движение механизмов и машин посредством рабочей жидкости, находящейся под давлением, с одновременным выполнением функций регулирования и реверсирования скорости движения выходного звена гидродвигателя.

Одной из актуальных задач гидроприводростроения является увеличение мощности гидромашин и гидроаппаратов путем их форсирования (потенциально – по давлению или кинематически – по расходу). При этом улучшаются технические (в первую очередь массогабаритные) характеристики гидропривода, что позволяет расширять его использование в мобильной технике. Решение естественным образом возникающих в процессе разработки и производства ГП вопросов требует более глубокого теоретического анализа рабочих процессов самого привода и его элементов – гидромашин и гидроаппаратов – с конечной целью определения направлений и возможностей разработок и производства, а сокращение времени выпуска продукции – еще и проработки технологичности ее изготовления.

1. Описание отраслевой проблематики и направлений ее решения

В настоящее время наибольшее распространение получило направление теоретического исследования процессов и конструкций гидроприводов и их элементов посредством использования мультифизического (также известного как мульти- или многодисциплинарного) программного обеспечения (МД ПО, или MD CAE в зарубежной терминологии).

Средства инженерного анализа (САЕ-системы) позволяют еще на этапе проектирования до начала производства провести всесторонний виртуальный анализ функциональных и технических характеристик изделия, выполнить имитационное моделирование технологических процессов, оптимизируя технологические параметры для уменьшения брака и экономии ресурсов. Именно расширение использования САЕ-систем в процессах проектирования и технологической подготовки производства способствует повышению качества изделий и снижению издержек производства. Однако, как показали исследования, проведенные компанией Tech-Clarity inc. [1], предварительная подготовка модели конструктора для расчета является самым продолжительным этапом процесса, занимающим до 38 % общего времени моделирования.

Таким образом, при использовании САЕ-систем в условиях конкретного предприятия возникает ряд проблем методологического характера:

1. Как правильно проектировать конструкторскую 3D-модель, чтобы ее можно было эффективно с минимальными доработками использовать во всей линейке необходимых САЕ-систем, применяя МД-анализ, а также выполняя рекомендации технологов?

2. Какие упрощения допустимы в 3D-модели для различных видов анализа, чтобы, с одной стороны, не снизить достоверность результатов, а с другой – уменьшить требуемые вычислительные ресурсы?

3. Какие нужны исследования и эксперименты для создания актуальных баз данных по используемым материалам и производственным условиям? Какова применимость баз данных материалов с различными свойствами для разнотипных исследований?

4. Как подготовить эффективные расчетно-аналитические модели для отдельных видов анализа и для комплексного анализа изделия с учетом применяемых технологий его изготовления? (Проблема комплексного анализа либо декомпозиция моделей и сборка их результатов.)

Поэтому вопросы, рассматриваемые в настоящей статье, являются важными как с научной, так и с практической точки зрения.

При реализации указанных целей САЕ-анализ используется в качестве средства сравнения эффективности конструкторских решений применительно к условиям производства.

2. Комплексный анализ сборочных единиц

Первым вариантом решения обозначенной выше задачи является полный комплексный анализ, т. е. импорт геометрии из САД-программы в САЕ-модуль «как есть», без какой-либо доработки. Обычно подобный способ применяется на финальных этапах конструкторской проработки изделия как сборочной единицы, поскольку продолжительность формирования модели и ее расчет занимают много времени, а также в случаях, когда размерность задачи невелика, а аппаратные ресурсы достаточны либо когда декомпозиция задачи невозможна без нарушения физики процесса.

Некоторые методы решения упомянутых выше проблем изложены в работах [2–4].

В рассматриваемом случае на примере аксиально-поршневой гидромашины моделируем ее основной узел – модуль ходовой части. Исходными данными для расчета являются: контактные взаимодействия конструктивных элементов между собой, их механические свойства, внешние гидромеханические (рис. 1) и температурные нагрузки.

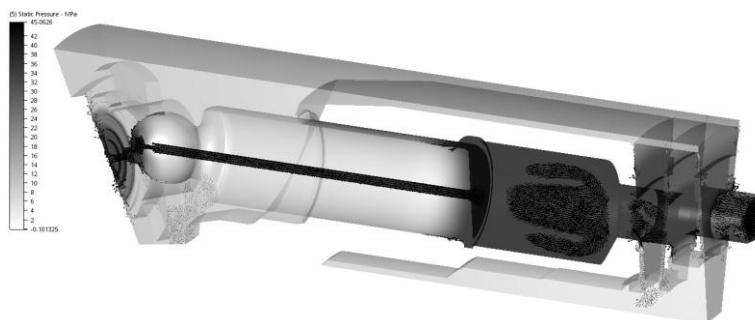


Рис. 1. Поле распределения давления рабочей жидкости и вектора скоростей

На рис. 1 показано используемое в качестве исходных данных для САЕ-анализа поле распределения давления с векторами скоростей поршневой камеры в точке кинематической нейтрали в момент наибольшего значения рабочего давления в зоне нагнетания (для наглядности все твердые тела скрыты). Это результат CFD-анализа на основе той же геометрии гидромашины с учетом установившегося теплового режима работы и диссипации энергии в рабочих зазорах (используется зависимость свойств жидкости от температуры).

В результате САЕ-анализа получаем картину распределения напряженно-деформированного состояния конструкции (рис. 2).

Подобный подход к анализу модели позволяет проанализировать состояние отдельной детали механизма как результат взаимодействия сопряженных деталей при воздействии внешних факторов.

Недостатками данного подхода являются:

- большое количество времени на подготовку модели, ее отладку и обработку результатов;
- длительное время решения;
- высокие требования к аппаратным средствам.

Даже в приведенном выше примере подготовки модели к анализу возникает необходимость в исключении из расчета вспомогательных элементов, не оказывающих влияния на физику процессов, но увеличивающих своим наличием размерность модели. На практике это осуществляется посредством «подавления» таких элементов непосредственно в САЕ-программе, что, однако, не высвобождает существенно компьютерные ресурсы.

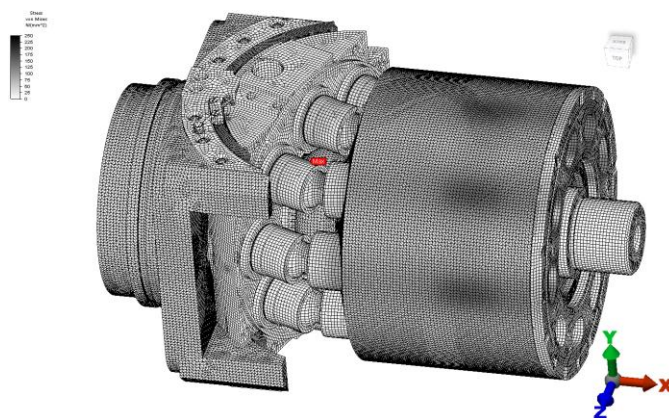


Рис. 2. Напряжения в конструкции модуля ходовой части

Автором предлагается вариант решения описанной выше проблемы посредством методики формирования и анализа моделей в комплексе программ, состоящем из программного средства проектирования 3D-моделей Autodesk Inventor и средств САЕ-анализа Autodesk Simulation CFD и Autodesk Simulation Mechanical [5, 6].

Геометрическая модель гидромашины проектируется в конструкторском подразделении (Autodesk Inventor) и представляет собой параметрическую 3D-модель гидромашины, выполненную из типовых конструкторско-технологических элементов, предварительно согласованных с технологическими службами блоков, обеспечивающих предварительную технологичность изготовления конструктивных примитивов детали [7]. Затем модель передается для моделирования в расчетное подразделение, которое выдает результаты для анализа эффективности предлагаемого решения конструктору или ведущему специалисту изделия.

Принцип формирования САЕ-модели декомпозированной конструкции при отработке ее на соответствие техническому заданию и технологичности рассмотрим на примере плунжера аксиально-поршневой гидромашины.

3. Пример реализации методики формирования САЕ-моделей

Для анализа прочности плунжера необходимо задать силовые воздействия и конструктивные ограничения. Задание ограничений посредством контакта с сопряженными деталями позволяет более подробно с точки зрения кинематики механизма описать рабочий процесс. Кроме того, адекватность модели увеличивается при учете технологических параметров деталей: зазоров в соединениях и отклонений от идеальной формы.

Очевидно, что с точки зрения анализа модель симметрична. Не нарушая функциональности, для расчета можем использовать половину модели (рис. 3), что снизит время анализа и требования к вычислительным ресурсам. Кроме того, в инструментарии постпроцессинга САЕ-программ есть опция «Зеркало результатов модели» (Mirror model Result), которая отражает по указанным плоскостям результаты, отображая исходную геометрию. Возникает организационное противоречие: вносить изменения в конструктивный облик изделия расчетчик не имеет права. При копировании САЕ-модели конструктора в САЕ-модель расчетчика разрыва-

ется связь с исходной геометрией и в случае ее изменения при конструктивной проработке необходимо заново копировать модель и переопределять параметры расчета. Это повышает трудоемкость работ по моделированию до 26 % [1].

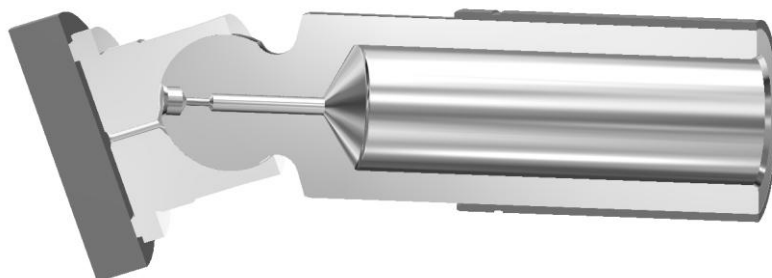


Рис. 3. Подготовленная для расчета модель плунжера с граничными условиями сопряженных деталей

Для исключения разрыва в информационном потоке и обеспечения гарантии аутентичности САЕ-модели (модели конструктора) автором предлагается создание новой сборки и импортирование в нее деталей, разработанных и редактируемых конструктором. На этом же этапе происходит регистрация проекта (расчета) в PDM-системе с присвоением ему типа (PP01, PP04, PP17 и т. п.). Используя в дальнейшем инструменты PDM и PLM, можно не только хранить модели и результаты, но и фиксировать хронологию достижения этих результатов, формировать на ее основе инженерные методики. Вся дальнейшая доработка модели под нужды расчетчика производится только над сборкой, не затрагивая исходную геометрию. Таким образом, при конструкторско-технологической отработке изделия геометрическая модель конструктора автоматически обновляется в сборке для расчета. Это обеспечивает актуализацию расчетной модели и ее результатов. При дальнейшей процедуре импорта и обновления модели в программе анализа прочности дополнительных манипуляций расчетной моделью, как правило, не требуется. Исключением является ситуация с принципиальными решениями: внесением или удалением конструктивных элементов. При этом расчетную модель необходимо проинспектировать, особенно в измененных местах.

В работе в модель для САЕ-анализа в качестве граничных условий добавлена втулка блока цилиндров, гидростатическая опора плунжера и опорный диск (рис. 3). Все детали, кроме опорного диска, импортированы и адаптивно связаны с моделями конструктора. Опорный диск в целях упрощения расчетной модели был заменен на плоский диск с унаследованными свойствами материала.

Поскольку отклонение органа регулирования и, следовательно, перпендикулярной к нему оси гидростатической опоры плунжера расположены под углом к оси плунжера, упрощением для расчета является плоскосимметричная модель относительно плоскости, образованной этими осями.

К параметрам, подлежащим настройке в базовой (шаблонной) расчетной модели, относятся силовые и температурные нагрузки, размеры конечных элементов (КЭ), сгущения и разрежения КЭ сети, контактные пары и их свойства, свойства материалов.

Как правило, свойства материалов, используемых при проектировании изделия в САД-программе, ограничены необходимостью геометрического формообразования, взаиморасположения деталей друг относительно друга и определения их центра масс. Для расчета прочности, частотного отклика, тепло- и массообмена и т. д. необходимы дополнительные параметры материала, такие как модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного расширения и т. п. Таким образом, в расчетной модели недостающие компоненты свойств материалов либо заполняются вручную, либо используется аналог материала САД-программы из базы данных САЕ-программы, но с полным набором необходимых значений (также применяются импортные аналоги материалов). При обновлении (повторной трансляции) геометрии детали необходимо определить выбор процедуры фиксации или переопределения свойств материалов, заданных в САЕ-программе. Результаты анализа напряженно-деформированного состояния конструкции плунжера показаны на рис. 4.

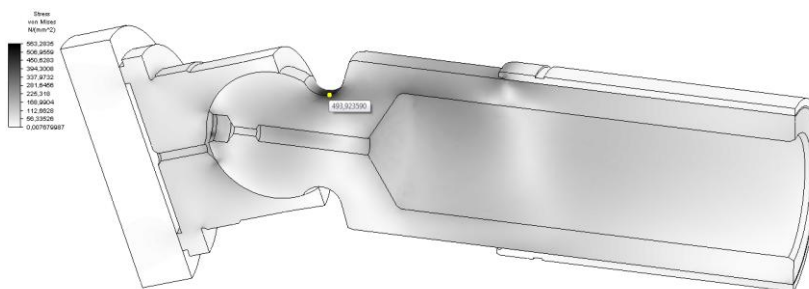


Рис. 4. Результаты расчета напряженно-деформированного состояния плунжера. Поле напряжений

В практике разработки новых изделий крайне редко деталь, спроектированная конструктором, с первой попытки отвечает всем требованиям технического задания на изделие и технологическим условиям производства. Поэтому процесс конструкторско-технологической проработки изделия обычно носит многоитерационный характер. Продолжительность и количество циклов зависят от квалификации сотрудников и их опыта, величины и точности целевых показателей. При этом окончательное конструктивное исполнение детали претерпевает кардинальные изменения относительно базового варианта. В рассматриваемом случае конструкция полового поршня не отвечает требованиям к весу детали. Кроме того, наличие внутриворшневого пространства оказывает негативное влияние на динамику колебательного процесса рабочей жидкости в процессе функционирования гидромашин. Решением последней проблемы является отсечение внутренней полости плунжера перемычкой. Снижение веса осуществляется путем формирования внутреннего цилиндрического пустотелого объема. Уменьшение объема рабочей жидкости в поршневой камере блока цилиндров делает более жесткой характеристику динамики гидромашин и в меньшей степени зависит от количества растворенного газа в рабочей жидкости. При этом, естественно, возникают новые проблемы технологического плана, решать которые приходится также на этапе конструкторской проработки изделия, в том числе используя средства CAE.

Таким образом, в первоначальной конструкторской модели произошли серьезные изменения: вместо одной детали стало две или три (в зависимости от возможностей технологий механической обработки и сварки), причем даже материалы этих деталей могут различаться. Информацию об изменении в модели и необходимости нового расчета (а также о готовности результатов расчета) обеспечивает PDM-система предприятия.

Для сокращения времени на доработку ранее созданной геометрии CAE-модели в распоряжении инженера-расчетчика имеется инструмент Inventor «Компонент / Заменить». В рассматриваемом случае необходима замена одной детали сборкой. Если обновленная деталь (или сборка) окажется нерассеченной плоскостью симметрии, то к дополнительным действиям по настройке модели следует добавить перенос заголовка детали (или сборки) в соответствующую ветвь дерева построения модели (рис. 5).

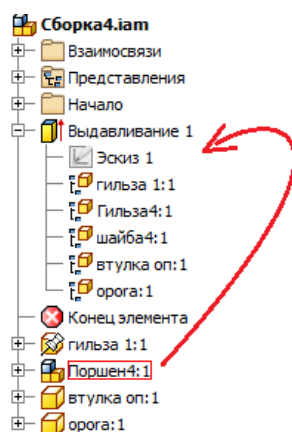


Рис. 5. Добавление элемента, обрабатываемого в сборке

В результате должна отобразиться модель, аналогичная представленной на рис. 3, но с новой геометрией плунжера (рис. 6).

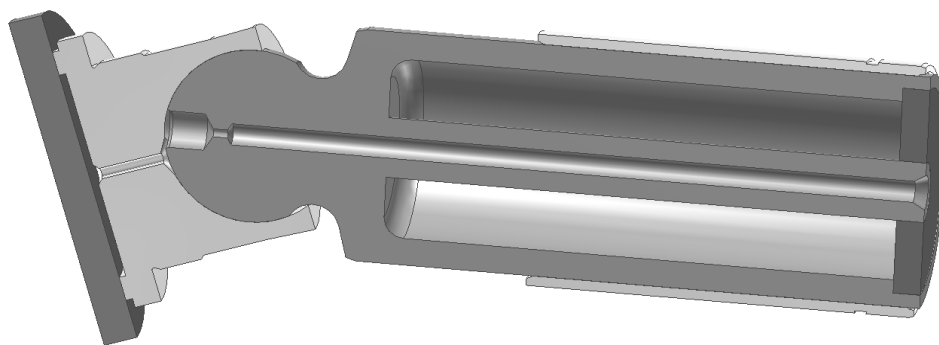


Рис. 6. Обновленная конструкция плунжера в модели для расчета

В дальнейшем процедура препроцессинга упрощается в связи с наличием шаблона (ранее проработанной САЕ-модели). После выполнения процедуры обновления САЕ-модели (команда Inventor Simulation / Launch Active Model) в Simulation Mechanical отобразится модель, в которой будут отсутствовать параметры, необходимые для расчета. Отсутствующие данные связаны с новыми деталями (их материал, тип и размер КЭ, нагрузки и ограничения, включая свойства контакта) и изменениями в конструкции прежних деталей (новые поверхности пазов, отверстий, фасок и т. п.). Все изменения, связанные с изменением вида КЭ, его размера по умолчанию, а также тип контакта для новых деталей можно настроить в свойствах программы или применительно к конкретной модели. Закрепления и нагрузки для новых поверхностей или объемов (деталей) необходимо определить по описанной выше технологии.

После донастройки модели выполняется расчет напряженно-деформированного состояния конструкции плунжера в обычном порядке (рис. 7).

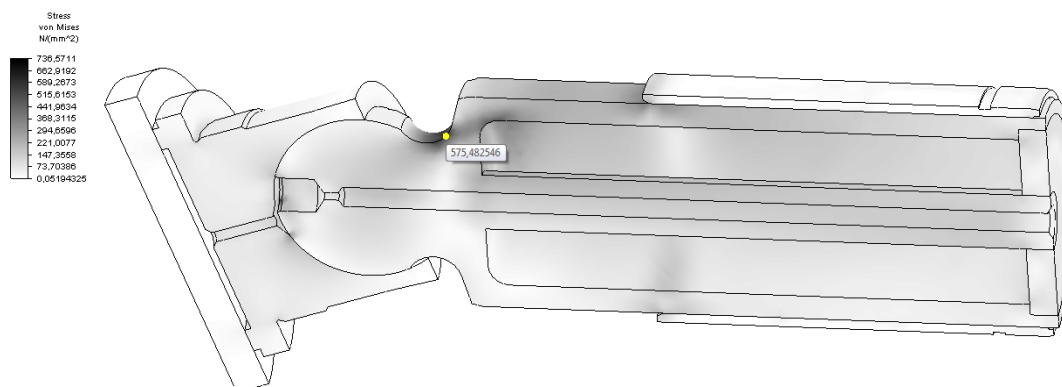


Рис. 7. Результаты расчета напряженно-деформированного состояния плунжера. Поле напряжений

Примечание. Стоит отметить, что есть возможность изменения геометрии модели непосредственно в Autodesk Simulation Mechanical. Для этого используется таблица Inventor Parameters, заимствующая из Inventor дерево построения модели и ее параметры (сам Inventor может отсутствовать на данной рабочей станции), но в таком случае возникает разрыв взаимосвязи САЕ-модели с моделью САД, что идеологически неправильно.

Как показано выше, небольшие по объему и времени доработки модели необходимы в случае изменения состава изделия или количества поверхностей. Для конструкторско-технологической проработки утвержденного геометрического облика изделия – изменения зна-

чений длины, диаметра, фаски, радиуса и т. п., работа может быть автоматизирована простым макросом [8]. При усложнении подобного макроса условиями и критериями изменения параметров и целевыми параметрами напряжений или деформации получаем локальную оптимизацию конструкции, а используя конструкторско-технологические блоки [7], – оптимизацию с учетом технологичности.

Стоит отметить, что существует альтернативный подход – минимизация размерности задачи посредством преобразования объемных конечных элементов плоскими (оболочечными). В основном этот метод широко применяется в авиационной и космической промышленности для моделирования тонко- и толстостенных конструкций, аппроксимация которых 3D-элементами требует колоссальных вычислительных ресурсов. Подход не нов, однако при простой аппроксимации объемных конструкций оболочечными элементами (например, по средней линии) возникают разрывы в местах торцевых стыков, сопрягать которые приходится вручную или в полуавтоматическом режиме (задав допуск и контролируя сопряжения). Характерным примером автоматизации данного типа формирования CAE-моделей является MSC Apex [9]. MSC Apex «запоминает» расположение и направления сопряжений, восстанавливая и переопределяя их при изменении базовых размеров CAD-деталей.

Заключение

Для сокращения времени конструкторско-технологической подготовки производства гидроприводов, в частности, при отработке на технологичность с обеспечением требований функциональности изделия необходимо моделирование большого количества конструктивных исполнений. В статье предложен один из вариантов решения этой задачи – методика формирования CAE-моделей на примере конструкторско-технологической проработки плунжера форсированной гидромашины с использованием идеологии цифрового прототипа Autodesk и технологии адаптивных моделей Inventor и Simulation Mechanical.

Методика формирования CAE-моделей учитывает возможности мультидисциплинарного анализа в одном или нескольких программных комплексах с учетом упрощения модели (исключения нефункциональных элементов, применения симметрии и т. п.), а также использования свойств материалов, отличных от материалов, предназначенных для CAD-модели.

Для применения принципа декомпозиции модели предложен критерий «время ожидания результатов».

Список литературы

1. Boucher, M. Узкие места в процессе анализа методом конечных элементов / M. Boucher // CAD/CAM/CAE observer. – 2016. – № 6(106). – С. 50–61.
2. Шафранский, С.В. Декомпозиция и многокритериальный выбор в проектировании систем : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.16 / С.В. Шафранский ; Черновиц. гос. ун-т им. Ю. Федьковича. – Черновцы, 1991. – 12 с.
3. Левин, Г.М. Параметрическая декомпозиция в задачах оптимизации проектных решений : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.13.12 / Г.М. Левин. – Минск, 1996. – 38 с.
4. Копысов, С.П. Методы декомпозиции и параллельные распределенные технологии для адаптивных версий метода конечных элементов : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 05.13.18 / С.П. Копысов ; Ин-т мат. моделирования РАН. – М., 2006. – 39 с.
5. Пузанов, А.В. Инженерный анализ в Autodesk Simulation Multiphysics / А.В. Пузанов. – М. : ДМК Пресс, 2013. – 912 с.
6. Пузанов, А.В. Autodesk Simulation Mechanical. Базовый учебный курс : учеб.-метод. пособие / А.В. Пузанов. – М. : Академия САПР и ГИС, 2014. – 75 с.
7. Пузанов, А.В. Принцип постпроизводственного проектирования гидроприводов / А.В. Пузанов // Системный анализ и прикладная информатика. – 2015. – № 3. – С. 36–41.

8. Система автоматизированной оптимизации структурно-параметрических моделей на основе интеграции среды проектирования Autodesk Inventor и языка программирования Python / О.В. Кретинин [и др.] // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 9, ч. 2. – С. 257–260.

9. MSC.Арех [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.mssoftware.ru/products/арех>. – Дата доступа : 15.11.2016.

Поступила 13.03.2017

*Специальное конструкторское бюро
приборостроения и автоматики,
г. Ковров, ул. Крупской, 55
e-mail: avp@oao-skbpa.ru*

A.V. Puzanov

**THE METHOD OF FORMING CAE MODELS ON THE EXAMPLE
OF DESIGN AND TECHNOLOGICAL ELABORATION
OF THE PLUNGER OF FORCED HYDROMACHINE**

Testing on the manufacturability with ensuring the functionality requirements of the product determines the analysis of a large number of designs. The paper proposed a method of forming CAE models from CAD models, taking into account simplification models (with the exception of non-functional elements, the use of symmetry, etc.), add the missing data (including the use of the properties of materials differ from the CAD model), the possibility of a multidisciplinary analysis in one or more software systems. An example of design and technological elaboration of the plunger of forced hydraulic machine is shown.

УДК 517.98

П.Н. Бибило, Ю.Ю. Ланкевич

МИНИМИЗАЦИЯ МНОГОУРОВНЕВЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИСТЕМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ШЕННОНА

Предлагается приближенный алгоритм формирования перестановки переменных, по каждой из которых последовательно строятся разложения Шеннона системы дизъюнктивных нормальных форм полностью определенных булевых функций с целью получения многоуровневого представления функций, называемого в литературе сокращенной упорядоченной диаграммой двоичного выбора либо диаграммой двоичных решений. Приводятся результаты экспериментального сравнения программы, реализующей предложенный алгоритм, с программой, реализующей алгоритм перебора случайных перестановок.

Введение

Разложение Шеннона для булевых функций было предложено давно [1] и позволяет уменьшать число переменных подфункций (коэффициентов разложения). На этом основываются методы синтеза комбинационных схем в различных базисах логических элементов [2]. Получающиеся многоуровневые представления функций и систем реализуются каскадными логическими схемами. Для представления булевых функций и систем таких функций разложения Шеннона исходных функций (и получающихся в процессе разложения подфункций) стали задавать в виде ориентированных графов BDD (Binary Decision Diagram – диаграмма двоичного выбора, диаграмма двоичных решений) [3–7]. По сути, BDD задают ортогонализированные многоуровневые представления (формы) булевых функций, что позволяет эффективно выполнять логические операции над BDD [2, 3, 7]. Широкое распространение получили представления в виде BDD при решении задач верификации проектов цифровых систем [8]. Например, в верификаторе SMV, реализующем метод символьной верификации Model Checking [9], применяется алгоритм верификации моделей, основанный на OBDD (Ordered Binary Decision Diagram – упорядоченная диаграмма двоичного выбора).

Многоуровневые разложения систем функций на базе разложения Шеннона, полученные в результате логической оптимизации, широко используются при синтезе логических схем на этапе технологически независимой оптимизации, например, в промышленном синтезаторе LeonardoSpectrum [10]. В работе [2] показано, что глобальная оптимизация комбинационной логики на основе разложения Шеннона позволяет значительно улучшать результаты синтеза, так как уменьшение сложности (площади) синтезируемых логических схем основано на предварительной технологически независимой оптимизации – нахождении одинаковых коэффициентов в разложениях Шеннона функций реализуемой системы. Основной проблемой при оптимизации таких многоуровневых представлений булевых функций является нахождение последовательности (перестановки) переменных, по которым проводятся разложения.

В настоящей работе предлагается приближенный алгоритм нахождения такой перестановки переменных, которая ориентирована на уменьшение сложности BDD, представляющей систему булевых функций. Предложенный алгоритм программно реализован. Для систем функций большой размерности (25 и более переменных) он оказался более предпочтительным по сравнению с алгоритмом [11] перебора случайно генерируемых перестановок, так как при последующем синтезе позволяет получать схемы меньшей площади и большего быстродействия, что подтверждается проведенным экспериментальным сравнением программ, реализующих данные алгоритмы.

1. Основные определения

Булевыми называются функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, принимающие значения 0, 1 и зависящие от переменных x_1, x_2, \dots, x_n , которые также принимают значения 0, 1. Широко распространенной формой задания булевых функций являются ДНФ (дизъюнктивные нормальные

формы) – дизъюнкции элементарных конъюнкций. ДНФ обычно представляется троичной матрицей. Например, ДНФ D^1 булевой функции $f^1 = x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \vee x_2 x_3 x_5 x_6 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4$ может быть представлена троичной матрицей (табл. 1), строки которой соответствуют элементарным конъюнкциям. В данной таблице троичный вектор (0 1 – 1 – –) задает элементарную конъюнкцию $\bar{x}_1 x_2 x_4$: литералы x_2, x_4 представляются единицами в троичном векторе, литерал \bar{x}_1 – нулем, отсутствующие литералы переменных x_3, x_5, x_6 – символом «–». Характеристическое множество M^{f^1} булевой функции, заданной ДНФ из табл. 1, представлено в табл. 2. В характеристическое множество включаются только те наборы значений переменных, на которых булева функция принимает единичное значение [12].

Таблица 1
ДНФ D^1 функции f^1

D^1	k_i
$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$	
– 1 1 1 0 0	k_1
– 0 0 – 1 1	k_2
0 1 – 1 – –	k_3

Таблица 2
Характеристическое множество M^{f^1} функции f^1

M^{f^1}
$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$
0 1 1 1 0 0
1 1 1 1 0 0
0 0 0 0 1 1
0 0 0 1 1 1
1 0 0 0 1 1
1 0 0 1 1 1
0 1 0 1 0 0
0 1 0 1 0 1
0 1 0 1 1 0
0 1 0 1 1 1
0 1 1 1 0 1
0 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1

Если исходные булевы функции представлены в ДНФ, то основной задачей при оптимизации их многоуровневых представлений на базе разложения Шеннона является сравнение ДНФ на равносильность. Обозначим через D ДНФ, которая представляет булеву функцию $f = f(x_1, \dots, x_n)$ с характеристическим множеством M^f . Пусть M^k – характеристическое множество элементарной конъюнкции k . Будем говорить, что элементарная конъюнкция k имплицирует ДНФ D тогда и только тогда, когда $M^k \subseteq M^f$, т. е. когда характеристическое множество M^k конъюнкции включается в характеристическое множество той булевой функции, которую представляет ДНФ D . Например, элементарная конъюнкция $k_1 = \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5$ с характеристическим множеством $M^{k_1} = \{010100, 010101\}$, представленная троичным вектором (0 1 0 1 0 –), имплицирует D^1 (табл. 1). Элементарная конъюнкция $k_2 = x_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5$ с характеристическим множеством $M^{k_2} = \{111100, 111101\}$, представленная троичным вектором (1 1 1 1 0 –), не имплицирует D^1 , так как набор 111101 не принадлежит M^{f^1} и поэтому условие $M^{k_2} \subseteq M^{f^1}$ не выполняется.

Рассмотрим ДНФ D^h булевой функции $h = h(x_1, \dots, x_n)$, имеющей характеристическое множество M^h , и ДНФ D^g булевой функции $g = g(x_1, \dots, x_n)$ с характеристическим множеством M^g . Очевидно, что ДНФ D^h, D^g являются равносильными (записывается $D^h = D^g$) тогда и только тогда, когда $M^h = M^g$.

В литературе хорошо известно, что использование для сравнения ДНФ функций построения их характеристических множеств является неэффективным, когда число переменных функций превышает три десятка [12, 13]. Для сравнения ДНФ будем применять способ, основанный на операциях над ДНФ и следующем утверждении [12]: ДНФ $D^h = k_1^h \vee k_2^h \vee \dots \vee k_{p_1}^h$ и $D^g = k_1^g \vee k_2^g \vee \dots \vee k_{p_2}^g$ являются равносильными тогда и только тогда, когда каждая из конъюнкций k_i^h ДНФ D^h имплицирует ДНФ D^g (это записывается в виде $(k_i^h \rightarrow D^g) = 1$), а каждая из конъюнкций k_i^g ДНФ D^g имплицирует ДНФ D^h (записывается в виде $(k_i^g \rightarrow D^h) = 1$). Далее будет приведен алгоритм сравнения двух ДНФ, базирующийся на данном утверждении.

Под векторной булевой функцией $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, будем понимать упорядоченную систему булевых функций $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$. Широко известной в литературе формой представления систем булевых функций является пара матриц $\langle T^x, B^f \rangle$: троичная матрица T^x задания элементарных конъюнкций в виде троичных векторов и булева матрица B^f вхождений конъюнкций в ДНФ компонентных функций системы. В табл. 3 дан пример задания системы ДНФ векторной полностью определенной функции $f(x) = (f^1(x), f^2(x), f^3(x))$, где $f^1 = x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_5 x_6 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4$; $f^2 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_6 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 x_6$; $f^3 = \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 x_6 \vee x_3 \bar{x}_4 x_5 x_6 \vee \bar{x}_1 x_3 x_5 x_6 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \vee x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4$. Здесь троичный вектор (0 1 - 1 - -) (последняя строка матрицы T^x) задает элементарную конъюнкцию $\bar{x}_1 x_2 x_4$, входящую в ДНФ компонентных функций f^1 и f^3 .

Таблица 3
Пример системы ДНФ трех булевых функций

T^x	B^f
$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6$	$f^1 \ f^2 \ f^3$
- 1 1 1 0 0	1 0 0
- 0 0 - 1 1	1 0 0
0 1 - 1 - -	1 0 1
- 1 0 - 0 0	0 1 0
0 1 0 - - -	0 1 0
1 1 1 1 - 0	0 1 0
- 0 1 0 1 1	0 1 0
0 - 1 0 - 1	0 0 1
- - 1 0 1 1	0 0 1
0 - 1 - 1 1	0 0 1
- 1 0 1 0 0	0 0 1
- 1 1 0 - -	0 0 1

Второй используемой в данной работе формой задания систем булевых функций являются алгебраические многоуровневые представления на базе разложения Шеннона.

Разложением Шеннона полностью определенной булевой функции $f = f(x)$ по переменной x_i называется представление

$$f = f(x) = \bar{x}_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \vee x_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (1)$$

Функции $f_0 = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $f_1 = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ в правой части (1) называются остаточными функциями либо коэффициентами разложения. Они полу-

чаются из функции $f = f(x_1, \dots, x_n)$ подстановкой вместо переменной x_i констант 0 и 1 соответственно. Каждый из коэффициентов $f_0 = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ и $f_1 = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ может быть разложен по одной из переменных из множества $\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$. Процесс разложения коэффициентов заканчивается, когда все n переменных будут использованы для разложения, либо когда все коэффициенты вырождаются до констант 0, 1. На каждом шаге разложения выполняется сравнение на равенство полученных коэффициентов и оставляется один из нескольких попарно равных коэффициентов. Если же коэффициенты разложения по переменной x_i равны

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

то переменная x_i называется несущественной (фиктивной) и $f = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Под BDD понимается ориентированный ациклический граф, задающий последовательные разложения Шеннона булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по всем ее переменным x_1, \dots, x_n при заданном порядке (перестановке) переменных, по которым проводятся разложения. BDD одной полностью определенной булевой функции содержит три вида вершин [2]: функциональные вершины, соответствующие разлагаемым функциям либо коэффициентам; вершины-переменные; листовые вершины, соответствующие константам 0, 1. Функциональная вершина, соответствующая функции f , называется корнем. Если коэффициенты разложения (1) равны, то граф BDD упрощается, так как вершина x_i , из которой исходит одна дуга, удаляется из графа. BDD, представляющая систему m полностью определенных булевых функций, имеет m корневых и две листовые вершины 0, 1, которые обычно дублируются для упрощения изображения графа. Ориентация дуг не показывается, так как при изображении BDD все дуги ориентируются сверху вниз. Под сложностью S_{BDD} понимается число функциональных вершин BDD [2].

Заметим, что представление многоуровневого разложения системы булевых функций в виде графа в данной статье используется для иллюстрации зависимостей булевых переменных в логических выражениях. Целью является получение минимального числа логических выражений, по которым впоследствии осуществляется синтез логической схемы в заданном базисе (библиотеке) логических элементов. Каждой функциональной вершине BDD соответствует логическое выражение, представляющее формулу (1) разложения Шеннона либо редуцированную (сокращенную) форму в тех случаях, когда один из коэффициентов равен 0 либо 1. Поэтому функциональные вершины нижнего (неконстантного) уровня BDD равны переменной либо ее инверсии. В виде уравнений такие функции не будут записываться, поэтому число уравнений многоуровневого представления обычно меньше сложности BDD на одну либо две функциональные вершины.

2. Постановка задачи

BDD задает в виде графа последовательность разложений Шеннона исходной функции и получаемых коэффициентов разложения по некоторой перестановке переменных. Минимизация сложности BDD основана на том, что в процессе разложения могут появляться одинаковые коэффициенты разложения не только у одной, но и у нескольких (либо даже у всех) компонентных функций. Давно известно, что от перестановки переменных, по которым ведется разложение, зависит сложность (число вершин) BDD, поэтому основной задачей компактного представления булевой функции либо системы функций в виде BDD является нахождение перестановки, дающей минимальное число вершин BDD.

Под BDD-минимизацией в данной работе будет пониматься оптимизация многоуровневых представлений систем булевых функций, соответствующих сокращенным упорядоченным BDD (ROBDD, от англ. Reduced Ordered BDD). Подробное описание упорядоченных BDD дано в [5], ROBDD – в [7]. Далее под BDD будет всегда пониматься ROBDD.

Задача. Для заданной системы ДНФ булевых функций найти такую перестановку $\langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n} \rangle$ переменных, по которой будет получена BDD минимальной сложности.

Сложность BDD зависит от порядка следования (перестановки) переменных разложения. Так как число всех перестановок переменных для булевой функции $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, зависящей от n переменных, равно $n!$ (факториалу числа n), то нахождение лучшей перестановки, т. е. перестановки, обеспечивающей минимальную сложность BDD для больших (сотни и более) значений числа n , представляет собой такую трудоемкую задачу, что точное ее решение в настоящее время невозможно получить. Поэтому основными методами нахождения лучшей перестановки, предложенными в литературе [14–18], являются методы генерирования случайных перестановок, дополненные различными эвристиками. Полный перебор всех $n!$ перестановок осуществим для небольших значений n . Например, в работе [11] были испытаны все перестановки переменных для примеров систем ДНФ со значениями $n \leq 8$.

3. Представление одной ДНФ и систем ДНФ

При программной реализации операций над конъюнкциями и ДНФ было использовано представление элементарных конъюнкций в виде $2n$ разрядных булевых векторов, при этом инверсному литералу \bar{x}_i присваивался код 01, литералу x_i – код 10, отсутствующий в элементарной конъюнкции литерал получал код 11, кодовая комбинация 00 при таком кодировании считается недопустимой и ее наличие является ошибкой. Например, элементарные конъюнкции ДНФ (см. табл. 1) представляются следующими булевыми векторами:

111010100101 (k_1) (3749)

110101111010 (k_2) (3450)

0110**11101111** (k_3) (1775).

Жирным шрифтом выделены кодовые комбинации 11, соответствующие отсутствующим литералам. Булевы векторы, представляющие элементарные конъюнкции, можно интерпретировать как целые положительные числа и упорядочить по возрастанию (неубыванию) их десятичного эквивалента. Каждая из ДНФ системы представлялась в подобном виде, после чего строилась упорядоченная последовательность всех ДНФ системы булевых функций. Если элемент (число) из задания ДНФ D^i был больше (не меньше) соответствующего числа из задания ДНФ D^j , то D^i располагалась раньше ДНФ D^j в общей упорядоченной последовательности их задания.

4. Алгоритм нахождения перестановки переменных

Предлагаемый эвристический алгоритм решения задачи является итерационным и выполняется до тех пор, пока текущая система функций (коэффициентов разложений) не выродится до констант 0, 1. На первой итерации в качестве текущей берется исходная система функций. На каждой итерации j ($j = 1, \dots, n$) выполняются следующие шаги:

Шаг 1. Выбор переменной x_j , по которой производится разложение Шеннона всех функций текущей системы.

1.1. Построение разложений Шеннона по каждой из переменных x_1, x_2, \dots, x_n каждой из ДНФ текущей системы функций системы, т. е. получение ДНФ коэффициентов, не равных нулю. Исключение из рассмотрения коэффициентов, равных нулю.

1.2. Отдельная минимизация в классе ДНФ каждого из полученных коэффициентов. Для этого итеративным образом выполняются всевозможные склеивания и поглощения элементарных конъюнкций, входящих в минимизируемую ДНФ. Конъюнкции исходной ДНФ разбиваются на такие подмножества, что все конъюнкции в одном подмножестве содержат одинаковое число единиц. Проверка на склеивание конъюнкций осуществляется между векторами

соседних подмножеств, т. е. векторами, содержащими k и $k + 1$ единицу, точно так же, как это выполняется в методе Квайна – Мак-Класки [12]. После выполнения всевозможных склеиваний выполняются поглощения и начинается следующая итерация склеиваний и поглощений. Итерации заканчиваются тогда, когда нет склеивающихся пар конъюнкций. Таким образом, минимизация осуществляется с помощью приближенного алгоритма.

1.3. Проверка полученных минимизированных ДНФ на равносильность, в результате чего из всего множества ДНФ, представляющих коэффициенты, формируется множество M_i^j попарно различных ДНФ.

1.4. Исключение из дальнейшего рассмотрения коэффициентов, равных константе 1.

1.5. Оценка переменных, от которых зависят функции текущей системы. Каждая переменная x_i текущей системы оценивается числом S_i^j – мощностью $|M_i^j| = S_i^j$ множества M_i^j различных коэффициентов, полученных при разложении всех функций текущей системы по переменной x_i .

1.6. В качестве переменной x_j для разложения Шеннона на итерации j выбирается переменная x_i , оцениваемая минимальным числом S_i^j . Если таких переменных несколько, то из них выбирается первая по порядку. Переход на шаг 2.

Шаг 2. Построение разложений Шеннона текущей системы функций и формирование системы функций для итерации $j+1$.

2.1. Построение разложений Шеннона функций текущей системы (на итерации j) по выбранной переменной x_i , т. е. получение ДНФ коэффициентов, не равных 0. Исключение из рассмотрения коэффициентов, равных 0.

2.2. Минимизация ДНФ, представляющих коэффициенты, так же, как она выполнялась на шаге 1.2.

2.3. Проверка полученных минимизированных ДНФ на равносильность и формирование множества M_i^j попарно различных ДНФ из всего множества ДНФ, представляющих коэффициенты. Сравнению на равносильность подвергались пары тех ДНФ, которые были соседними в общей упорядоченной последовательности их задания. Алгоритм проверки ДНФ на равносильность описывается далее.

2.4. Исключение из множества M_i^j (т. е. из дальнейшего рассмотрения) коэффициентов, равных 1.

2.5. Проверка, является ли множество M_i^j пустым, т. е. остались ли в множестве M_i^j такие коэффициенты, которые не равны константе 1. Если M_i^j оказалось пустым, то переход на шаг 3. В противном случае множество минимизированных ДНФ множества M_i^j является текущей системой функций для итерации $j+1$.

Шаг 3. Конец.

Описанный выше алгоритм позволяет найти перестановку переменных для проведения разложений Шеннона по всем переменным. После того как перестановка сформирована и BDD построена, выполняется процедура сокращения BDD. Выполнение процедуры сокращения BDD требуется потому, что алгоритм сравнения коэффициентов на равенство является приближенным и не все пары ДНФ сравнивались на равносильность. Описание процедуры сокращения BDD дано в [4, 7]. Она основывается на том, что функции (коэффициенты) равны тогда и только тогда, когда равны их BDD, при этом предполагается один и тот же порядок переменных для разложения. Алгоритм R [7, с. 257] сокращения (приведения) BDD формулируется в терминах задания графов BDD в виде списков.

Если число выполненных итераций алгоритма оказалось меньше числа n , то это означает, что некоторые переменные оказались несущественными для каждой из функций исходной системы.

5. Алгоритм сравнения ДНФ

Алгоритм сравнения ДНФ $D^h = k_1^h \vee k_2^h \vee \dots \vee k_{p_1}^h$, $D^g = k_1^g \vee k_2^g \vee \dots \vee k_{p_2}^g$ заключается в проверке равенств

$$(k_i^h \rightarrow D^g) = 1; \tag{2}$$

$$(k_j^g \rightarrow D^h) = 1, \tag{3}$$

где $i=1, 2, \dots, p_1, j=1, 2, \dots, p_2$, и является приближенным. Он точно гарантирует установление неравносильности ДНФ, однако некоторые равносильные ДНФ может посчитать неравносильными. Именно это обстоятельство и требует выполнения после алгоритма нахождения перестановки процедуры сокращения BDD.

Шаг 1. Нахождение тождественно равных конъюнкций, входящих как в ДНФ D^h , так и в ДНФ D^g , и исключение этих конъюнкций из проверок (2), (3).

Шаг 2. Проверка выполнения условий (2), (3) для оставшихся конъюнкций. Если все равенства (2), (3) выполняются, то ДНФ равносильны: $D^h = D^g$. Если же хотя бы одно из равенств (2), (3) не выполняется, то ДНФ неравносильны: $D^h \neq D^g$.

Проверка равенства $(k_i^h \rightarrow D^g)=1$ осуществляется следующим образом: вычисляется ДНФ $D_i^{h,g} = k_i^h \& D^g$, затем ДНФ $D_i^{h,g}$ минимизируется в классе ДНФ с помощью алгоритма, описанного на шаге 1.2 алгоритма нахождения перестановки переменных. Если в результате минимизации будет получена элементарная конъюнкция k_i^h , то считается, что $(k_i^h \rightarrow D^g) = 1$. Поскольку алгоритм минимизации ДНФ является приближенным, то это означает, что ДНФ $D_i^{h,g}$ (возможно, равная k_i^h) может оказаться представленной несколькими элементарными конъюнкциями (а не одной элементарной конъюнкцией k_i^h). Такое представление приведет к выводу о том, что равенство $(k_i^h \rightarrow D^g) = 1$ не выполняется, и будет считаться, что $D^h \neq D^g$, хотя на самом деле данные ДНФ равносильны.

Проведем сравнение на равносильность ДНФ D^h (табл. 4) и D^g (табл. 5). Так как $k_1^h = k_1^g, k_2^h = k_2^g, k_4^h = k_3^g$, то осталось проверить выполнение равенства $(k_3^h \rightarrow D^g)=1$. Вычислим ДНФ $D_3^{h,g}$: $D_3^{h,g} = k_3^h \& D^g = \bar{x}_1 x_3 x_4 (\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 = \bar{x}_1 x_3 x_4 = k_3^h$. Таким образом, $(k_3^h \rightarrow D^g)=1$ и $D^h = D^g$.

Таблица 4
ДНФ функции h

D^h	k_i^h
$x_1 x_2 x_3 x_4$	
0 0 1 -	k_1^h
0 1 0 0	k_2^h
0 - 1 1	k_3^h
- 1 1 1	k_4^h

Таблица 5
ДНФ функции g

D^g	k_i^g
$x_1 x_2 x_3 x_4$	
0 0 1 -	k_1^g
0 1 0 0	k_2^g
- 1 1 1	k_3^g

Таблица 6
ДНФ функции r

D^r	k_i^r
$x_1 x_2 x_3 x_4$	
0 0 1 -	k_1^r
0 1 0 0	k_2^r
0 - 0 1	k_3^r
- 1 1 1	k_4^r

Проведем сравнение на равносильность ДНФ D^h (табл. 4) и D^r (табл. 6). В этом случае требуется проверить два равенства: $(k_3^h \rightarrow D^r)=1$ и $(k_3^r \rightarrow D^h)=1$. Для проверки выполнения $(k_3^h \rightarrow D^r)=1$ вычислим $D_3^{h,r} = k_3^h \& D^r = \bar{x}_1 x_3 x_4 (\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4) =$

$= \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 = \bar{x}_1 x_3 x_4 = k_3^h$, т. е. равенство $(k_3^h \rightarrow D^r) = 1$ выполняется. Для проверки выполнения равенства $(k_3^r \rightarrow D^h) = 1$ вычислим $D_3^{r,h} = k_3^r \& D^h = \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 (\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4) = 0 \neq k_3^r$. Очевидно, что равенство $(k_3^r \rightarrow D^h) = 1$ не выполняется, это означает $D^h \neq D^r$.

6. Пример

Проиллюстрируем алгоритм нахождения перестановки переменных на примере векторной функции $f(x)$, состоящей из трех компонентных функций f^1, f^2, f^3 (см. табл. 3). Как будет показано далее, лучшей перестановкой оказывается $\langle x_3, x_4, x_1, x_5, x_2, x_6 \rangle$.

Формулы разложения Шеннона по переменной x_3 записываются в виде

$$f^1(x) = \bar{x}_3 h^1(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6) \vee x_3 h^2(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6),$$

$$f^2(x) = \bar{x}_3 h^6(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6) \vee x_3 h^3(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6),$$

$$f^3(x) = \bar{x}_3 h^2(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6) \vee x_3 h^4(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6).$$

Коэффициенты, входящие в данные формулы, представлены в табл. 7.

Таблица 7

Коэффициенты разложения системы ДНФ по переменной x_3

Коэффициенты	ДНФ					
	x_1	x_2	x_4	x_5	x_6	
$h^1 = h^1(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6) = f^1(x_1, x_2, 0, x_4, x_5, x_6)$	-	0	-	1	1	
	0	1	1	-	-	
$h^2 = h^2(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6) = f^1(x_1, x_2, 1, x_4, x_5, x_6) = f^3(x_1, x_2, 0, x_4, x_5, x_6)$	-	1	1	0	0	
	0	1	1	-	-	
$h^3 = h^3(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6) = f^2(x_1, x_2, 1, x_4, x_5, x_6)$	1	1	1	-	0	
	-	0	0	1	1	
$h^4 = h^4(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6) = f^3(x_1, x_2, 1, x_4, x_5, x_6)$	0	-	0	-	1	
	-	-	0	1	1	
	0	-	-	1	1	
	-	1	0	-	-	
	0	1	1	-	-	
$h^6 = h^6(x_1, x_2, x_5, x_6) = f^2(x_1, x_2, 0, x_4, x_5, x_6)$	-	1	-	0	0	
	0	1	-	-	-	

Очевидно, что коэффициент $h^6 = x_2 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \vee \bar{x}_1 x_2$ не зависит от переменной x_4 . Заметим, что приближенный алгоритм минимизации ДНФ на первом шаге разложения не позволяет уменьшить число элементарных конъюнкций в коэффициентах (табл. 7). На первой итерации алгоритма поиска перестановки (табл. 8) переменная x_3 имеет наименьшее значение $S_3^1 = 5$, поэтому первой переменной для разложения системы функций выбирается x_3 .

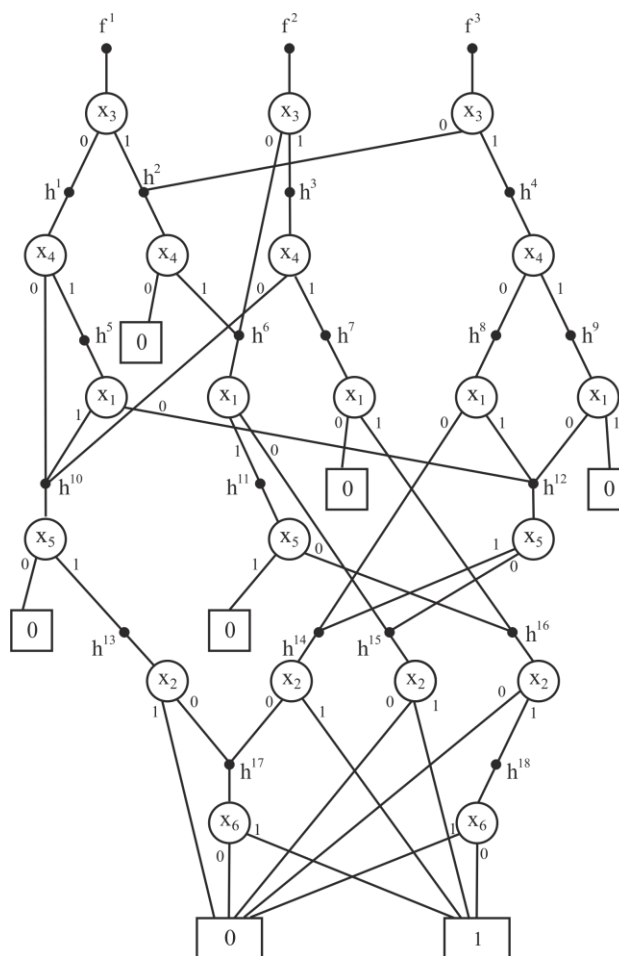
Результаты оценки переменных и их выбор по минимальному значению S_i^j приведены в табл. 8.

Таблица 8

Выбор переменных для разложения Шеннона системы ДНФ функций

i	x_i	Итерация алгоритма нахождения перестановки переменных											
		Первая		Вторая		Третья		Четвертая		Пятая		Шестая	
		S_i^1	x_3	S_i^2	x_4	S_i^3	x_1	S_i^4	x_5	S_i^5	x_2	S_i^6	x_6
1	x_1	6		10		6	min						
2	x_2	6		8		6		4		2	min		
3	x_3	5	min										
4	x_4	6		6	min								
5	x_5	6		9		8		4	min				
6	x_6	6		9		8		4		2		0	min

На четвертой итерации три переменные x_2, x_5, x_6 имеют одинаковые веса $S_2^4 = S_5^4 = S_6^4 = 4$ и для очередного разложения выбрана переменная x_5 для того, чтобы проиллюстрировать возможность дополнительного перебора в таких ситуациях. Как было сказано выше, результирующая перестановка для выполнения последовательных разложений Шеннона системы ДНФ функций (см. табл. 3) имеет вид $\langle x_3, x_4, x_1, x_5, x_2, x_6 \rangle$. Полученный граф BDD (рисунок) содержит 18 функциональных вершин, поэтому $S_{BDD} = 18$.



BDD, задающая многоуровневое представление системы ДНФ

Формулы многоуровневого представления системы функций по полученной перестановке $\langle x_3, x_4, x_1, x_5, x_2, x_6 \rangle$ легко записать по BDD:

$$\begin{aligned} f^1 &= \bar{x}_3 h^1 \vee x_3 h^2, \quad f^2 = \bar{x}_3 h^6 \vee x_3 h^3, \quad f^3 = \bar{x}_3 h^2 \vee x_3 h^4, \\ h^1 &= \bar{x}_4 h^{10} \vee x_4 h^5, \quad h^2 = x_4 h^6, \quad h^3 = \bar{x}_4 h^{10} \vee x_4 h^7, \quad h^4 = \bar{x}_4 h^8 \vee x_4 h^9, \\ h^5 &= \bar{x}_1 h^{12} \vee x_1 h^{10}, \quad h^6 = \bar{x}_1 h^{15} \vee x_1 h^{11}, \quad h^7 = x_1 h^{16}, \quad h^8 = \bar{x}_1 h^{14} \vee x_1 h^{12}, \quad h^9 = \bar{x}_1 h^{12}, \\ h^{10} &= x_5 h^{13}, \quad h^{11} = \bar{x}_5 h^{16}, \quad h^{12} = \bar{x}_5 h^{15} \vee x_5 h^{14}, \\ h^{13} &= \bar{x}_2 h^{17}, \quad h^{14} = \bar{x}_2 h^{17} \vee x_2, \quad h^{15} = x_2; \quad h^{16} = x_2 h^{18}, \\ h^{17} &= x_6, \quad h^{18} = \bar{x}_6. \end{aligned}$$

Каждой из 18 функциональных вершин BDD соответствует полная либо редуцированная формула разложения Шеннона.

7. Результаты эксперимента

Предложенный в данной статье алгоритм поиска лучшей перестановки был программно реализован, разработанная программа *BDD_Builder* сравнивалась с программой *Tie_BDD*, выполняющей алгоритм [11] случайного перебора перестановок. Сравнение проводилось на потоке примеров систем ДНФ векторных функций $f(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), \dots, f^m(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, из библиотеки *Berkeley PLA Test Set* [19] примеров систем ДНФ и трех примеров схем (X3, Frg2, Too_large) многоуровневой логики, преобразованных в системы ДНФ. Пример Sin_16 – это задание в виде таблицы истинности 16-битного приближения тригонометрической функции $y = \sin x$; примеры Syst4, Syst8 взяты из практики промышленного проектирования цифровых схем.

В табл. 9 представлены результаты экспериментального сравнения программ *Tie_BDD* и *BDD_Builder*, лучшие решения выделены жирным шрифтом. Обе программы по матричной форме исходной системы ДНФ, представленной на языке SF [20] в формате SDF, получали минимизированное многоуровневое представление системы функций в формате LOG логических выражений. После получения такого представления осуществлялся его перевод в VHDL-описание [21], использующее операторы назначения сигнала и логические операторы AND (И), OR (ИЛИ), NOT (НЕТ). Описание исходной системы ДНФ также переводилось в VHDL-описание для того, чтобы провести с помощью верификатора Formal Pro [22] формальную верификацию исходного VHDL-описания и полученного многоуровневого VHDL-описания. Затем по каждому из VHDL-описаний выполнялось построение логических схем в библиотеке [2] элементов заказной сверхбольшой интегральной схемы, выполнялся подсчет площадей и задержек схем. В качестве синтезатора логических схем из библиотечных элементов использовался Leonardo-Spectrum [10], исходными данными для которого явились соответствующие VHDL-описания логических выражений. Сложность схемы из библиотечных логических элементов на этапе логического проектирования выражалась суммой площадей элементов, составляющих схему. В экспериментах под сложностью многоуровневого представления понималось число R уравнений (при этом уравнения для разложения по последней переменной x_i не записываются, т. е. из записи многоуровневого представления исключаются уравнения вида $h = x_i$, $h = \bar{x}_i$).

В табл. 9 используются следующие обозначения:

n – число переменных x_1, x_2, \dots, x_n ;

m – число функций;

k – число различных элементарных конъюнкций, входящих в ДНФ компонентных функций f^j , $j = 1, \dots, m$;

P – число случайных перестановок, испробованных программой *Tie_BDD*;

R – число логических уравнений многоуровневого разложения Шеннона;

S_{ASIC} – площадь логической схемы, задаваемая в числе базовых ячеек, из которых состоят элементы;

τ – задержка схемы, нс.

Таблица 9

Сравнение программ оптимизации многоуровневых представлений

Имя схемы	n	m	k	Программа <i>Tie_BDD</i>				Программа <i>BDD_Builder</i>		
				P	R	S_{ASIC}	τ , нс	R	S_{ASIC}	τ , нс
Z5XP1	7	10	128	5000	65	26 499	3,85	65	26 499	3,85
RADD	8	5	120	5000	27	8465	4,44	33	10 697	3,85
ROOT	8	5	256	5000	73	26 717	4,81	73	26 717	4,81
DIST	8	5	256	5000	144	68 601	5,51	144	70 224	5,38
LIFE	9	1	512	5000	24	14 977	4,99	39	14 391	4,54
ADDM4	9	8	512	5000	187	89 269	7,00	189	86 959	6,25
Z9SYM	9	1	420	5000	31	18 018	5,39	31	26 499	3,85
ADD6	12	7	1092	5000	58	20 222	5,50	54	14 419	5,97
TIAL	14	8	640	5000	706	295 952	9,56	718	310 148	8,52
MP2D	14	14	123	5000	69	17 968	4,68	80	17 438	3,56
IN0	15	11	138	5000	301	98 911	7,52	332	96 389	6,70
Sin_16	16	16	65 536	10	17 758	9 822 718	15,86	17 758	9 771 160	15,34
Syst4	17	12	370	500	307	134 121	8,56	363	123 424	7,01
Syst8	25	28	45 548	100	23 821	13 031 482	19,72	17 437	8 183 862	19,39
X9dn_matr	27	7	120	500	204	26 399	5,58	102	23 983	5,55
Vtx1_matr	27	6	110	500	182	28 715	5,28	100	25 545	6,22
Too_large_matr	38	3	1027	500	3519	1 437 218	19,40	1344	488 585	14,96
Soar_matr	83	94	529	500	947	225 934	6,31	527	138 585	5,48
X3_matr	135	99	915	100	1611	338 042	10,69	855	269 151	8,76
Frg2_matr	143	139	3090	100	11 541	2 986 885	17,49	1532	530 785	12,56

Результаты эксперимента позволяют сделать следующие выводы:

1. Оценка сложности системы функций, выражаемая в числе уравнений (либо числе функциональных вершин BDD), является полезной при синтезе схем, так как синтез схемы от представления, в котором меньше уравнений, позволял, как правило, получать схемы меньшей площади. Здесь следует иметь в виду тот факт, что синтезатор LeonardoSpectrum выполняет при синтезе собственные встроенные процедуры технологически независимой оптимизации.

2. Для примеров Z9SYM и ROOT программа *BDD_Builder* нашла BDD минимальной сложности [14]. Результаты решения этих примеров свидетельствуют о том, что локально-оптимальный алгоритм, так же, как и алгоритмы случайного поиска, может найти глобальный оптимум.

3. Предложенный алгоритм выбора перестановки переменных позволяет для практических примеров систем ДНФ (более 25 переменных) получать BDD меньшей сложности, что приводит к логическим схемам меньшей сложности и большего быстродействия. Для систем

ДНФ большой размерности он является более предпочтительным по сравнению с алгоритмом [11] перебора случайных перестановок.

Заключение

Возрастание размерностей задач логического синтеза приводит к необходимости совершенствования методов, алгоритмов и программ технологически независимой оптимизации, выполняемой перед реализацией оптимизированных представлений в требуемый базис логических элементов. Предложенный в данной работе и программно реализованный, экспериментально исследованный алгоритм позволяет эффективно выполнять оптимизацию многоуровневых представлений систем булевых функций с сотнями переменных и функций. Реализующая алгоритм программа может служить эффективным инструментом в системах автоматизированного проектирования для минимизации площади и увеличения быстродействия функциональных блоков заказных цифровых сверхбольших интегральных схем.

Список литературы

1. Шеннон, К. Синтез двухполюсных переключательных схем / К. Шеннон // Работы по теории информации и кибернетике. – М. : ИЛ, 1963. – С. 59–105.
2. Бибило, П.Н. Применение диаграмм двоичного выбора при синтезе логических схем / П.Н. Бибило. – Минск : Беларус. навука, 2014. – 231 с.
3. Akers, S.B. Binary Decision Diagrams / S.B. Akers // IEEE Trans. on Computers. – 1978. – Vol. C–27, no. 6. – P. 509–516.
4. Bryant, R.E. Graph-based algorithms for Boolean function manipulation / R.E. Bryant // IEEE Transactions on Computers. – 1986. – Vol. 35, no. 8. – P. 677–691.
5. Bryant, R.E. Ordered Binary Decision Diagrams / R.E. Bryant, C. Meinel // Logic synthesis and verification. – Boston, Dordrecht, London : Kluwer Academic Publishers, 2002. – P. 285–307.
6. Meinel, C. Algorithms and Data Structures in VLSI Design: OBDD – Foundations and Applications / C. Meinel, T. Theobald. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1998. – 267 p.
7. Кнут, Д.Э. Искусство программирования / Д.Э. Кнут. – М. : Вильямс, 2013. – Т. 4, А : Комбинаторные алгоритмы, ч. 1. – 960 с.
8. Валидация на системном уровне. Высокоуровневое моделирование и управление тестированием / М. Чэнь [и др.]. – М. : Техносфера, 2014. – 296 с.
9. Карпов, Ю.Г. MODEL CHECKING. Верификация параллельных и распределенных программных систем / Ю.Г. Карпов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2010. – 560 с.
10. Бибило, П.Н. Системы проектирования интегральных схем на основе языка VHDL. StateCAD, ModelSim, LeonardoSpectrum / П.Н. Бибило. – М. : СОЛОН-Пресс, 2005. – 384 с.
11. Бибило, П.Н. Алгоритм построения диаграммы двоичного выбора для системы полностью определенных булевых функций / П.Н. Бибило, П.В. Леончик // Управляющие системы и машины. – 2009. – № 6. – С. 42–49.
12. Закревский, А.Д. Логические основы проектирования дискретных устройств / А.Д. Закревский, Ю.В. Поттосин, Л.Д. Черемисинова. – М. : Физматлит, 2007. – 589 с.
13. Закревский, А.Д. Вычисления в многомерном булевом пространстве / А.Д. Закревский. – Минск : ОИПИ НАН Беларуси, 2011. – 106 с.
14. Ishiura, N. Minimization of binary decision diagrams based on exchange of variables / N. Ishiura, H. Sawada, S. Yajima // Computer-Aided Design : proc. 29th IEEE Intern. conf., Santa Clara, 11–14 Nov. 1991 / IEEE Computer Society. – Washington, 1991. – P. 472–475.
15. Jeong, S.-W. An efficient method for optimal BDD ordering computation / S.-W. Jeong, T.-S. Kim, F. Somenzi // VLSI and CAD : proc. of Intern. conf. – Taejon, 1993. – P. 252–256.
16. Friedman, S.J. Finding the optimal variable ordering for binary decision diagrams / S.J. Friedman, K.J. Supowit // IEEE Trans. Computers. – 1990. – Vol. 39, no. 5. – P. 710–713.
17. Fujii, H. Interleaving based variable ordering methods for ordered binary decision diagrams / H. Fujii, G. Ootomo, C. Hori // Computer-aided design : proc. of the 1993 IEEE/ACM Intern. conf., Santa Clara, 7–11 Nov. 1993 / IEEE Computer Society Press. – Los Alamitos, 1993. – P. 38–41.

18. Dynamic variable reordering for BDD minimization / E. Felt [et al.] // Design Automation : proc. EURO-DAC, Hamburg, 20–24 Sep. 1993 / IEEE Computer Society Press. – Los Alamitos, 1993. – P. 130–135.

19. Jeong, C. Computer-Aided Design of Digital Systems / C. Jeong // Department of Computer Science [Electronic resource]. – Mode of access : <http://www1.cs.columbia.edu/~cs6861/sis/espresso-examples/ex>. – Date of access : 20.03.2017.

20. Бибило, П.Н. Логическое проектирование дискретных устройств с использованием производственно-фреймовой модели представления знаний / П.Н. Бибило, В.И. Романов. – Минск : Беларус. навука, 2011. – 279 с.

21. Поляков, А.К. Языки VHDL и VERILOG в проектировании цифровой аппаратуры / А.К. Поляков. – М. : СОЛОН-Пресс, 2003. – 320 с.

22. Лохов, А. Функциональная верификация СБИС в свете решений Mentor Graphics / А. Лохов // Электроника: наука, технология, бизнес. – 2004. – № 1. – С. 58–62.

Поступила 13.03.2017

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: bibilo@newman.bas-net.by,
yurafreedom18@gmail.com*

P.N. Bibilo, Y.Y. Lankevich

MINIMIZING THE MULTILEVEL REPRESENTATIONS OF SYSTEMS OF BOOLEAN FUNCTIONS BASED ON SHANNON DECOMPOSITION

A locally optimal algorithm is proposed to form a permutation of variables, which are used to obtain successive Shannon decompositions of a system of disjunctive normal forms of completely specified Boolean functions. The goal of it is a multilevel representation of functions which is called a reduced ordered Binary Decision Diagram. The results of experimental comparison of the program implementing the proposed algorithm and the program implementing the algorithm for enumeration of random permutations are given. The results show the advantage of the proposed algorithm when it is used for synthesis of logical circuits on the basis of library elements.

УДК 004.33.054

В.Н. Ярмолик¹, И. Мрозек², В.А. Леванцевич¹

ПСЕВДОИСЧЕРПЫВАЮЩЕЕ ТЕСТИРОВАНИЕ ОЗУ

Анализируются методы тестирования современных запоминающих устройств, в том числе оперативных запоминающих устройств (ОЗУ), обосновывается применение псевдоисчерпывающих тестов для обнаружения сложных неисправностей памяти. Формулируется необходимое условие генерирования псевдоисчерпывающего теста для заданного количества запоминающих ячеек ОЗУ. Показывается, что задача генерирования псевдоисчерпывающего теста на базе многократных тестов ОЗУ с изменяемыми адресными последовательностями сводится к комбинаторной задаче собирателя купонов. Приводятся оценки минимальной, максимальной и средней кратности многократного теста для обеспечения исчерпывающего множества комбинаций для заданного числа ячеек ОЗУ, что подтверждает возможность формирования псевдоисчерпывающего теста для заданного числа ячеек ОЗУ.

Введение

Исчерпывающее тестирование (Exhaustive Testing) характеризуется максимальной эффективностью обнаружения неисправностей цифровых устройств и ошибок программного обеспечения [1–4]. Однако в силу большой временной сложности подобных тестов в настоящее время используются их различные аппроксимации и в первую очередь такие, как псевдоисчерпывающие тесты (Pseudoexhaustive Tests) [5–6]. Подобные тесты являются реальной альтернативой исчерпывающим тестам. Они основываются на формировании множества тестовых наборов (векторов), обеспечивающих всевозможные комбинации на заданном подмножестве элементов наборов теста, и называются локально исчерпывающими [1]. Чаще всего рассматриваются двоичные псевдослучайные тестовые наборы, которые формируют 2^k возможные двоичные комбинации для любых k из N разрядов тестовых наборов. Характерной особенностью псевдоисчерпывающих тестов является то, что их сложность, определяемая количеством тестовых наборов, существенно меньше сложности исчерпывающих тестов.

Вероятностное тестирование (Random Testing) и его многочисленные модификации, основанные на принципе черного ящика, также являются эффективной аппроксимацией исчерпывающего тестирования [1, 7]. Существующие модификации классического метода построения вероятностных тестов [1, 4–9] объединяются по принципу управления процедурой формирования очередного тестового набора [1]. Такие виды формирования модифицированных вероятностных тестов, как антивероятностные, быстрые антивероятностные, адаптивные, эффективные, зеркальные, упорядоченные, эволюционные, управляемые и др., основаны на вычислении некоторых характеристик для управляемого формирования очередного случайного тестового набора [1, 7, 9].

Существенным недостатком управляемых вероятностных тестов выступает необходимость перебора потенциальных кандидатов в тестовые наборы и вычисления для них характеристик, являющихся критериями для включения либо невключения их в вероятностный тест, что увеличивает вычислительную сложность формирования подобных тестов [1]. С целью уменьшения такой сложности широко обсуждаются и используются итеративные вероятностные тесты [1, 6], исчерпывающие и почти псевдоисчерпывающие вероятностные тесты [1, 10–11], вероятностные тесты с малым числом наборов [1, 4, 12], квазивероятностные [8, 13], а также многократные тесты для запоминающих устройств [14, 15].

Главным достоинством указанных разновидностей вероятностных тестов является использование некоторой обобщающей характеристики для теста в целом, а не для тестового набора в отдельности. Это позволяет значительно уменьшить вычислительную сложность построения подобных тестов. Кроме того, в ряде случаев при проектировании многократных тестов, в частности многократных маршевых тестов запоминающих устройств, не требуется

вычисление каких-либо характеристик, построение таких тестов основывается на реализации предварительно определенной процедуры [8, 13–15].

Целью настоящей статьи является анализ эффективности псевдоисчерпывающего тестирования современных ОЗУ, основанного на многократном применении классических маршевых тестов с изменяемыми адресными последовательностями. В качестве основной характеристики маршевого теста ОЗУ для k произвольных запоминающих ячеек ОЗУ используется подмножество двоичных комбинаций, названное орбитой, которое формируется одной из фаз маршевого теста. Приводятся основные аналитические соотношения, а также оценки сложности теста для обеспечения всевозможных 2^k двоичных комбинаций в произвольных k из N запоминающих ячеек ОЗУ.

1. Многократные маршевые тесты ОЗУ

Ранее было показано [16], что при однократном применении маршевых тестов полнота покрытия сложных неисправностей ОЗУ, равно как и любых других неисправностей, остается неизменной. Отличием для разных версий конкретного маршевого теста являются только конфигурации неисправностей, в частности кодочувствительных, которые обнаруживаются либо не обнаруживаются при реализации данного теста для измененного содержимого ОЗУ и заданной последовательности адресов [4, 6, 14, 16, 17].

В качестве обобщающих (доминирующих) неисправностей, которые обнаруживаются маршевыми тестами, рассматривается модель кодочувствительных неисправностей PPSF k (Pattern Sensitive Faults) или ее разновидности, определяемые как NPPSF k (Neighborhood Pattern Sensitive Faults) и эффективно покрывающие более простые модели неисправностей ОЗУ [16]. Наиболее адекватной моделью, как показано в ряде источников [14, 16], являются неисправности PNPPSF k , их количество для произвольных k из N ячеек ОЗУ и фиксированной базовой ячейки равняется $2 \times 2^{k-1} = 2^k$, а общее число определяется выражением

$$Q(\text{PNPPSF}k) = 2k2^{k-1} \binom{N}{k} = k2^k \binom{N}{k}. \quad (1)$$

Изменение содержимого ОЗУ, например, при его обновлении в результате вычислений позволяет существенно увеличить полноту покрытия при повторном применении маршевого теста [14, 17]. Для повышения эффективности повторного применения маршевых тестов радикальным подходом может быть изменение последовательности адресов, используемых в каждом последующем маршевом тесте [17].

Для оценки влияния изменения последовательности адресов на обнаруживающую способность многократного маршевого теста были проведены экспериментальные исследования ОЗУ емкостью $N = 64$ бит, состояние которого не изменялось для трех последовательно применяемых тестов. Тесты отличались только используемой адресной последовательностью. В трех последовательных маршевых тестах MATS+ и March C– применялись случайные последовательности адресов ячеек ОЗУ. В результате полнота покрытия при повторном и трехкратном применении маршевых тестов заметно возрастает, что подтверждают данные табл. 1 [14]. Здесь представлены результаты для трех кодочувствительных неисправностей PNPPSF k , для каждой из которых получена суммарная полнота покрытия как результат последовательных процедур маршевого теста ОЗУ.

Таблица 1

Полнота покрытия для случайных последовательностей адресов, %

Тип теста	PPSF3			PPSF4			PPSF5		
	MATS+	24,90	42,74	55,83	12,48	22,61	30,95	6,31	11,87
March C–	49,87	72,74	83,04	24,93	41,42	53,23	12,46	22,14	30,02

Из табл. 1 видно, что с ростом кратности применения маршевого теста растет полнота покрытия кодочувствительных неисправностей ОЗУ за счет увеличения двоичных комбинаций, формируемых маршевым тестом в произвольных k из N ячеек ОЗУ, что достигается за счет изменения последовательностей адресов. Отметим, что 100%-ная полнота покрытия рассмотренных кодочувствительных неисправностей для произвольных k из N ячеек ОЗУ будет обеспечена исчерпывающим тестом для этих ячеек. Генерирование исчерпывающих тестов для любых k из N ячеек ОЗУ достигается применением псевдоисчерпывающего теста ОЗУ для заданного k .

2. Адресные последовательности

Адресные последовательности находят широкое применение в различных приложениях вычислительной техники. В первую очередь это касается алгоритмов цифровой обработки сигналов, где встречаются довольно сложные типы адресации, примером которых может служить двоично-инверсная адресация данных [18]. Адресные последовательности интенсивно применяются и в современных методах тестирования как аппаратных, так и программных средств вычислительной техники [19], различного рода запоминающих устройств [14, 16], а также при реализации методов управляемого вероятностного [4–7] и квазислучайного [8] тестирования современных вычислительных систем.

Многokратное применение маршевых тестов с изменяемыми адресными последовательностями является одним из радикальных методов повышения эффективности тестирования современных ОЗУ [14]. Для этой цели используются различные меры отличия адресных последовательностей (например, расстояние Хэмминга, арифметическое расстояние, манхэттенское расстояние, корреляционные зависимости), а также переключаемая активность адресных последовательностей [4, 8, 12, 14].

Под адресной последовательностью понимают упорядоченную последовательность m -рядных двоичных векторов $A(n) = a_{m-1}a_{m-2}a_{m-3}\dots a_2a_1a_0$, где $a_i \in \{0,1\}$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, принимающих всевозможные значения из множества 2^m двоичных векторов $\{000\dots 00, 000\dots 01, 000\dots 10, \dots, 111\dots 11\}$ [14]. Значения адресов $A(n)$, так же как и их индексов n , принадлежат множеству $\{0, 1, 2, \dots, 2^m-1\}$, т. е. $A(n)$, $n \in \{0, 1, 2, \dots, 2^m-1\}$. В качестве базовой адресной последовательности чаще всего используют счетную последовательность адресов, для которой выполняется свойство $A(n) = n$, т. е. $A(0) = 0$, $A(1) = 1$, $A(2) = 2$, ..., $A(2^m-1) = 2^m-1$. Невыполнение данного свойства и приводит к многообразию различных адресных последовательностей [14]. Общее их количество, равное $2^{m!}$, для заданного значения m и адресного пространства, состоящего из 2^m адресов, принимает астрономические значения. Среди всевозможных адресных последовательностей выделяют четыре основных их подмножества: детерминированные, случайные, псевдослучайные и квазислучайные [8, 14].

Произвольная детерминированная, псевдослучайная или квазислучайная адресные последовательности удовлетворяют следующему основному свойству [14].

Свойство. Адресная последовательность $A(n) = a_{m-1}a_{m-2}\dots a_2a_1a_0$, $n \in \{0, 1, 2, \dots, 2^m-1\}$, состоит из произвольной последовательности всевозможных 2^m адресов (двоичных комбинаций $a_{m-1} a_{m-2} \dots a_2 a_1 a_0$), причем каждый адрес используется в такой последовательности только один раз.

Для случайных адресных последовательностей различают два принципа их формирования, а именно генерирование случайных адресов (выборку с восстановлением) и генерирование неповторяющихся случайных адресов (выборку без восстановления). В первом случае адреса могут повторяться, во втором случае повторение адресов невозможно, что соответствует основному свойству.

3. Адресные последовательности многократных маршевых тестов ОЗУ

В качестве анализируемого ОЗУ будем рассматривать запоминающее устройство, состоящее из $N = 2^m$ однобитных запоминающих ячеек. Для тестирования подобных устройств, как правило, используются только маршевые тесты как единственно возможное решение для

тестирования современных ОЗУ большой емкости [16]. Общая структура маршевых тестов состоит в последовательном обращении ко всем запоминающим ячейкам ОЗУ путем генерирования их адресов. Для каждой ячейки в соответствии с конкретным маршевым тестом выполняются операции чтения (r) логического нуля ($r0$) либо единицы ($r1$), а также операции записи (w) нуля либо единицы ($w0$), ($w1$). Количество операций чтения и записи, их порядок в каждой фазе теста, а также количество фаз, их структура и последовательность определяют вид маршевого теста [16]. Под фазой (элементом) маршевого теста, например $\uparrow(r0, w1)$, понимают последовательное обращение ко всем ячейкам ОЗУ по возрастающим адресам (\uparrow) с выполнением операций чтения и записи либо по убывающим адресам (\downarrow). Возрастание адресов означает произвольную последовательность адресов, а убывание – их обратный порядок.

Отметим, что для современных ОЗУ, емкость которых существенно превышает 2^{30} , рассматриваются PNPFSF k , как правило, для k , равных 3, 5 и 9, и других небольших значений $k \leq 10$ [10, 14, 16]. Необходимым условием обнаружения всего множества подобных неисправностей является обеспечение тестом ОЗУ всевозможных 2^k двоичных комбинаций в любых k из N ячеек ОЗУ. Очевидно, что данное условие может быть обеспечено в рамках исчерпывающих тестов, их сложность определяется величиной 2^N , где $N = 2^m$ – емкость ОЗУ, которая является большой величиной. Поэтому на практике применяются различные подходы, позволяющие аппроксимировать исчерпывающий тест. Другими словами, применяется тест либо тестовая процедура, сложность которых существенно меньше сложности исчерпывающего теста, а их обнаруживающая способность достаточно высокая [16].

Рассмотрим пример формирования двоичных комбинаций для $k = 6$ из N произвольных ячеек ОЗУ. Предположим, что фиксированными $k = 6$ ячейками ОЗУ являются ячейки $b_\alpha, b_\beta, b_\gamma, b_\delta, b_\epsilon, b_\phi$, где $b_\gamma \in \{0, 1\}$ для $\gamma \in \{\alpha, \beta, \chi, \delta, \epsilon, \phi\}$ представляет текущее состояние ячеек, а их адреса $\alpha, \beta, \chi, \delta, \epsilon, \phi$ расположены в возрастающей последовательности ($\alpha < \beta < \chi < \delta < \epsilon < \phi$). Для текущего состояния $b_\alpha b_\beta b_\chi b_\delta b_\epsilon b_\phi = 000000$ в указанных ячейках при реализации первой фазы $\uparrow(r0, w1)$ теста MATS+ получим состояния (табл. 2), которые называются орбитой [14].

Таблица 2

Состояния ячеек ОЗУ

Фаза теста MATS+	Содержимое ячеек					
	b_α	b_β	b_γ	b_δ	b_ϵ	b_ϕ
	0	0	0	0	0	0
$\uparrow(r0, w1)$	1	0	0	0	0	0
	1	1	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0
	1	1	1	1	0	0
	1	1	1	1	1	0
	1	1	1	1	1	1

Приведенный пример реализации одной фазы маршевого теста с возрастающей последовательностью адресов показывает, что в рассматриваемых $b_\alpha, b_\beta, b_\chi, b_\delta, b_\epsilon$ и b_ϕ ячейках ОЗУ были сформированы 7 из $2^6 = 64$ двоичных комбинаций. Здесь учитывалась исходная нулевая комбинация и шесть состояний, полученных в результате применения фазы $\uparrow(r0, w1)$ маршевого теста. Используя фазу $\downarrow(r0, w1)$ с обратной адресной последовательностью (убывающей от ϕ, ϵ, \dots до α) для тех же ячеек ОЗУ при нулевом начальном их состоянии, получим пять новых состояний: 000001, 000011, 000111, 001111, 011111. Выбрав адресную последовательность $\beta, \alpha, \chi, \delta, \epsilon, \phi$ для реализации фазы $\uparrow(r0, w1)$ и применив те же нулевые начальные условия, получим следующее состояние запоминающих ячеек: 010000, 110000, 111000, 111100, 111110, 111111. Видно, что только одно состояние (010000) отличается от ранее полученных (табл. 2).

Рассмотренный пример позволяет сформулировать несколько общих положений для произвольных k из N ячеек ОЗУ. Приведем их для случая нулевого начального состояния ОЗУ

и одного маршевого элемента, который последовательно инвертирует состояние ячеек ОЗУ. Представим указанные положения в виде утверждений.

Утверждение 1. *Однократное применение инвертирующего маршевого элемента позволяет получить $k + 1$ двоичную комбинацию для произвольных k из N ячеек ОЗУ.*

Утверждение 2. *Применение последующего инвертирующего маршевого элемента с другой последовательностью адресов для k из N ячеек ОЗУ позволяет сформировать в них новые двоичные комбинации, минимальное количество которых равняется одной комбинации, а максимальное – $k - 1$.*

3. Анализ сложности псевдоисчерпывающего теста ОЗУ

В качестве адресных последовательностей будем рассматривать только случайные адресные последовательности, каждая из которых формирует одну из неповторяющихся последовательностей адресов ОЗУ. В качестве маршевого теста используем простейший тест $\{\hat{1}(w0); \hat{1}(r0, w1)\}$, выполняющий инвертирование нулевого содержимого ОЗУ. Процедура тестирования ОЗУ будет состоять в многократном применении приведенного теста. При этом возможны два варианта генерирования случайным образом очередного адреса ячейки ОЗУ: с восстановлением либо без восстановления. Для адресов выбранных k ячеек ОЗУ так же, как и для адресной последовательности в целом, возможны выборка без восстановления и выборка с восстановлением. В первом случае повторение адресов невозможно, а во втором – адреса могут повторяться. В качестве примера рассмотрим множество на рис. 1.

	1	2
0	0	0 0
1	0	0 1
1	1	1 1

Рис. 1. Множество орбит для $k = 2$

Видно, что для $k = 2$ существуют только две орбиты. Исчерпывающий тест, т. е. генерирование всевозможных комбинаций (00, 01, 10, 11) из двух бит, обеспечивается двумя орбитами (1–2) в любой их последовательности. С увеличением значения k до трех получим шесть различных орбит (рис. 2).

	1	2	3	4	5	6
0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
1	0 0 0	1 0 0	0 1 0	0 1 0	0 0 1	0 0 1
1	1 0 0	1 0 1	1 1 0	0 1 1	1 0 1	0 1 1
1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1

Рис. 2. Множество орбит для $k = 3$

Исчерпывающий тест для $k = 3$ обеспечивается орбитами 1–4–5 и 2–3–6. Следует отметить, что число орбит три является минимальным для обеспечения исчерпывающего теста, состоящего из восьми двоичных комбинаций (000, 001, 010, ..., 111).

В качестве второго примера можно привести множество, которое состоит из пяти орбит (1–2–3–5–6). Это множество орбит также обеспечивает исчерпывающий тест, причем множество указанных орбит является избыточным.

Общее количество орбит для произвольного значения k определяется как $Q_{\text{tot}} = k!$ [14]. Число Q_{tot} , например, для $k = 4$ будет $4! = 24$ (рис. 3).

	1	2	3	4	5	6
0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
1	0 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0
1	1 0 0 0	1 0 1 0	1 0 0 1	1 1 0 0	1 0 1 0	1 0 0 1
1	1 1 0 0	1 1 1 0	1 1 0 1	1 1 0 1	1 0 1 1	1 0 1 1
1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1
	7	8	9	10	11	12
0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0	1 0 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0
1	1 0 0 0	0 1 1 0	0 1 0 1	1 1 0 0	0 1 1 0	0 1 0 1
1	1 1 0 0	1 1 1 0	1 1 0 1	1 1 0 1	0 1 1 1	0 1 1 1
1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1
	13	14	15	16	17	18
0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0	0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0
1	0 1 0 0	0 1 1 0	0 0 1 1	1 0 1 0	0 1 1 0	0 0 1 1
1	1 1 0 0	1 1 1 0	1 0 1 1	1 0 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1
1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1
	19	20	21	22	23	24
0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1
1	0 0 0 1	0 1 0 1	0 0 1 1	1 0 0 1	0 1 0 1	0 0 1 1
1	1 0 0 1	1 1 0 1	1 0 1 1	1 0 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1
1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1

Рис. 3. Множество орбит для $k = 4$

Для данного случая, используя, например, орбиты 1–6–8–9–16–24, можно обеспечить исчерпывающий тест для четырех ячеек ОЗУ. Такое множество орбит является не единственным множеством, состоящим из шести орбит и обеспечивающим исчерпывающее множество четырехразрядных двоичных векторов. Однако применение меньшего чем шесть количества орбит для $k = 4$ не позволяет получить исчерпывающий тест. Как и для $k = 3$, исчерпывающий тест обеспечивается множеством орбит, состоящим не менее чем из трех орбит. В то же время для $k = 4$ множество орбит 1–2–5–6–8–9–13–14–15–16–17–23 является избыточным и обеспечивает все возможные двоичные комбинации из четырех бит.

Определим предельные значения количества орбит, необходимых для реализации исчерпывающего теста для произвольного значения k . Сразу рассмотрим случай выборки адресов ячеек ОЗУ без восстановления. Это означает, что формирование конкретной орбиты будет осуществляться путем случайного генерирования адресов ячеек, входящих в орбиту с повторением (выборка с восстановлением).

Вначале наложим ограничение на повторяемость орбит, т. е. рассмотрим случай выборки орбит без восстановления. Максимальная оценка Q_{\max} количества орбит, необходимых для формирования исчерпывающего теста, содержит 2^k тестовых наборов. Как следует из утверждения 2, применение одной орбиты независимо от ее вида обеспечивает $k + 1$ двоичных векторов, каждый из которых состоит из k бит. Напомним, что для каждой орбиты используется начальное значение, как правило, нулевое; оно записывается в выбранные k ячейки. В худшем случае каждая последующая орбита будет обеспечивать как минимум один новый двоичный вектор по отношению к множеству векторов, сгенерированных ранее использованными орбитами для случая выборки орбит без восстановления.

Тогда максимальная оценка Q_{\max} будет вычисляться как

$$Q_{\max} = 1 + (2^k - (k + 1)) = 2^k - k. \quad (2)$$

Полученная оценка Q_{\max} является нижней ее границей для случая выборки орбит с восстановлением, т. е. когда орбиты могут повторяться.

Минимальное количество орбит Q_{\min} для формирования исчерпывающего теста определяется соотношением

$$Q_{\min} = \binom{k}{\lceil k/2 \rceil}. \quad (3)$$

Здесь принимается во внимание тот факт, что каждая из орбит формирует только один набор (комбинацию), который состоит из определенного количества единиц и нулей. Так, например, для $k = 4$ вторая орбита (см. рис. 3)

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

формирует один набор (комбинацию), состоящий из одной единицы и трех нулей (1000), один набор из двух единиц и двух нулей (1010) и одну комбинацию из трех единиц и одного нуля (1110). Для случая $k = 4$ число наборов из одной единицы и трех нулей так же, как и число наборов из трех единиц и одного нуля, равняется четырем, а для случая двух единиц и двух нулей – шести.

Отметим, что максимальное количество двоичных комбинаций образуют двоичные векторы из k нулевых и единичных двоичных значений, для которых число единиц и нулей одинаково в случае четных величин k и отличается на единицу для нечетных значений k .

Фактически, чтобы обеспечить исчерпывающий тест для k ячеек ОЗУ, необходимо генерирование всех двоичных векторов из $\lceil k/2 \rceil$ единиц и $\lfloor k/2 \rfloor$ нулей, количество которых максимально по сравнению с другими комбинациями нулей и единиц. Это следует из свойства числа сочетаний из k по r для $k > 1$, $0 < r < k$:

$$\binom{k}{\lceil k/2 \rceil} > \binom{k}{r}.$$

Таким образом, Q_{\min} и будет равняться количеству двоичных векторов из $\lceil k/2 \rceil$ единиц и $\lfloor k/2 \rfloor$ нулей (3). Такое же количество будет и для случая $\lfloor k/2 \rfloor$ единиц и $\lceil k/2 \rceil$ нулей, для которых $\lfloor k/2 \rfloor + \lceil k/2 \rceil = k$, что следует из свойства числа сочетаний

$$\binom{k}{\lceil k/2 \rceil} = \binom{k}{k - \lceil k/2 \rceil}.$$

Оценим среднее число Q_{ave} орбит, которое необходимо для формирования исчерпывающего теста на произвольных k ячейках ОЗУ. Оценку получим для случая выборки орбит с восстановлением. Для этого нужно проанализировать всевозможные сочетания орбит, которые обеспечат 2^k тестовых наборов в k ячейках ОЗУ, что даже для малых значений k является затруднительным в силу большого числа орбит, равного $k!$. Поэтому, используя результаты, полученные при выводе оценки Q_{\min} , сформулируем необходимое условие генерирования исчерпывающего теста на произвольных k ячейках ОЗУ в виде следующего утверждения.

Утверждение 3. *Необходимым условием для формирования исчерпывающего теста в произвольных k из N ячеек ОЗУ является генерирование для этих ячеек множества орбит, в которых все двоичные коды, содержащие $\lfloor k/2 \rfloor$ единиц и $k - \lfloor k/2 \rfloor$ нулей, будут сгенерированы хотя бы по одному разу.*

Количество таких кодов в зависимости от k определяется величиной Q_{\min} . Для небольших величин k их значения приведены в табл. 3.

Таблица 3

Численные значения Q_{tot} , Q_{max} и Q_{min}

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q_{tot}	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3628 800
Q_{min}	2	3	6	10	20	35	70	126	252
Q_{max}	3	5	12	27	58	121	248	503	1014

Например, как следует из табл. 3, для $k = 4$ необходимым является формирование такого подмножества орбит, в которых будут присутствовать все 6 двоичных кодов (0011, 0101, 1001, 0110, 1010, 1100), а для $k = 6$ требуется сгенерировать орбиты, содержащие все 20 двоичных кодов вида (000111, 001011, 010011, ..., 111000). Отметим, что конкретная орбита для произвольного k содержит только один двоичный код, который включает $\lfloor k/2 \rfloor$ единиц и $k - \lfloor k/2 \rfloor$ нулей. Указанные коды присутствуют одинаковое число раз во всевозможных орбитах для заданного значения k (см. рис. 1–3). Таким образом, при равновероятной выборке одной из орбит с вероятностью $1/Q_{\min}$ будет выбран один из Q_{\min} кодов, который включает $\lfloor k/2 \rfloor$ единиц и $k - \lfloor k/2 \rfloor$ нулей.

В подобной интерпретации рассматриваемая задача определения среднего числа количества орбит Q_{ave} , которые необходимы для формирования исчерпывающего теста на произвольных k ячейках ОЗУ, по мнению авторов, сводится к классической задаче собирателя купонов (Coupon Collector’s Problem) [20]. Для случая одной коллекции равновероятных купонов (Q_{\min} орбит) среднее количество Q_{ave} случайной выборки купонов (орбит) для получения всех купонов как минимум по одному разу (обеспечения необходимого условия получения исчерпывающего теста, см. утверждение 3) определяется согласно соотношению [20]

$$Q_{\text{ave}} = 1 + \frac{Q_{\min}}{Q_{\min} - 1} + \frac{Q_{\min}}{Q_{\min} - 2} + \dots + \frac{Q_{\min}}{2} + Q_{\min} = Q_{\min} \sum_{n=1}^{Q_{\min}} \frac{1}{n}. \quad (4)$$

Для больших значений Q_{\min} можно использовать формулу аппроксимации Эйлера гармонической серии (4):

$$Q_{\text{ave}} = Q_{\min} (\log_e Q_{\min} + \gamma). \quad (5)$$

Значение $\gamma \approx 0,577 22$ представляет собой константу Эйлера – Маскерони [20]. Численные значения Q_{ave} приведены в табл. 4.

Таблица 4

Численные значения Q_{ave}

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q_{\min}	2	3	6	10	20	35	70	126	252
Q_{ave}	3	5,50	14,70	29,29	71,95	145,14	338,06	683,52	1538,58

Анализ величин Q_{ave} показывает, что для обеспечения исчерпывающего множества двоичных комбинаций для k из N произвольных ячеек ОЗУ и, соответственно, реализации псевдоисчерпывающего теста ОЗУ для заданного k необходимо использовать многократный тест ОЗУ с изменяемыми адресными последовательностями, среднее значение кратности которого принимает приемлемые значения. Например, для обнаружения всего множества сложных неисправностей PPSF5 среднее значение кратности теста равняется 29,29, что гарантирует их 100%-ное обнаружение. Отметим, что данное утверждение справедливо для случая генерирования адресов без повторений и простейшего теста ОЗУ типа $\{\uparrow(w0); \uparrow(r0, w1)\}$.

4. Экспериментальный анализ псевдоисчерпывающих тестов ОЗУ

В качестве меры эффективности псевдоисчерпывающих тестов ОЗУ была выбрана ее средняя сложность Q_{ave} , определяемая средним количеством тестов в многократных тестах ОЗУ с изменяемыми адресными последовательностями. При оценке данной величины в разд. 3 приведен ряд ограничений и допущений, что позволило аналитически оценить ее значение, а также получить оценки значений Q_{min} и Q_{max} (см. табл. 3 и 4).

Для экспериментального подтверждения полученных аналитических результатов был проведен статистический анализ среднего значения Q_{ave} многократного применения теста $\{\hat{\Pi}(w0); \hat{\Pi}(r0, w1)\}$ с изменяемыми адресными последовательностями. В первом случае адреса ОЗУ генерировались без повторений, что несколько усложняло их формирование, а во втором – с повторениями. В обоих случаях средние оценочные значения Q_{ave} были получены на основании 10 000 экспериментов, а их конкретные величины приведены соответственно в табл. 5 и 6.

Таблица 5

Экспериментальные численные значения Q_{ave} для случая без повторения адресов

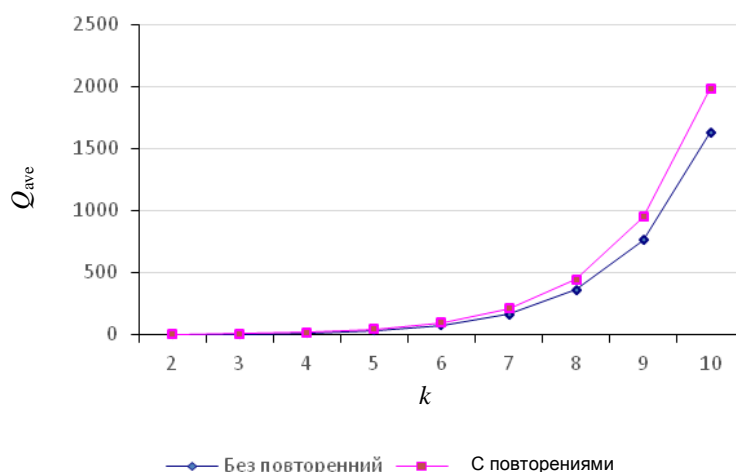
k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q_{min}	2	3	6	14	31	79	197	499	998
Q_{ave}	2,99	6,69	15,53	35,02	77,21	168,06	362,96	762	1634,98
Q_{max}	14	32	66	122	242	499	898	1850	3037

Таблица 6

Экспериментальные численные значения Q_{ave} для случая с повторением адресов

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q_{min}	2	3	6	15	37	98	235	559	1267
Q_{ave}	3,96	9,14	20,50	45,69	98,89	211,60	446,86	950,15	1987,92
Q_{max}	21	44	78	183	300	5669	1364	2466	4135

Графически значения Q_{ave} для двух случаев формирования случайных адресов представлены на рис. 4.

Рис. 4. Экспериментальные значения Q_{ave}

Анализ приведенных результатов показывает, что аналитическая оценка среднего количества маршевых тестов (4) подтверждается данными из табл. 5 и 6, а также рис. 4. Аналитические значения Q_{ave} , по сути, являются нижней оценкой средней сложности многократного применения простейшего маршевого теста вида $\{\hat{\Pi}(w0); \hat{\Pi}(r0, w1)\}$ для реализации псевдоисчерпывающего теста ОЗУ для заданного значения k . Подобный псевдоисчерпывающий тест ОЗУ – это результат многократного применения маршевого теста с изменяемыми адресными

последовательностями. Аналогичный результат будет получен для любого MATS+ подобного теста, который характеризуется формированием орбит, приведенных для частных случаев значений k на рис. 1–4. В табл. 7 представлены экспериментальные результаты для теста MATS+ и адресных последовательностей без восстановления.

Очевидно, что использование классического маршевого теста, такого как March C–, позволит обеспечить псевдоисчерпывающее тестирование за меньшее число итераций. Это подтверждается экспериментальными результатами (табл. 8).

Таблица 7

Численные значения Q_{ave} для теста MATS+ без повторения адресов

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q_{min}	2	3	6	15	37	98	235	559	1267
Q_{ave}	3,96	9,14	20,50	45,69	98,89	211,60	446,86	950,15	1987,92
Q_{max}	21	44	78	183	300	5669	1364	2466	4135

Таблица 8

Численные значения Q_{ave} для теста March C– без повторения адресов

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q_{min}	1	2	3	6	12	33	82	185	469
Q_{ave}	1	2,5	5,88	13,79	31,93	72,3	157	345	730
Q_{max}	1	8	17	49	89	181	361	853	1619

Как отмечалось ранее, все множество маршевых тестов ОЗУ, применяемых для тестирования, основано на использовании последовательной выборки адресов ячеек ОЗУ, в том числе и случайной с повторяющимися адресами и без повторяющихся адресов. Во втором случае активно используются генераторы псевдослучайных последовательностей, которые могут гарантировать процедуру выборки без восстановления. В то же время неповторяющиеся адресные последовательности для всего ОЗУ могут формировать повторяющиеся адресные последовательности и, соответственно, одинаковые орбиты для произвольных k из N ячеек ОЗУ, где значение k существенно меньше емкости ОЗУ. Последнее утверждение и иллюстрируется близостью результатов эксперимента для двух способов формирования случайных адресных последовательностей (см. рис. 4).

Заключение

Проведен анализ способов тестирования современных ОЗУ. Обосновано применение многократных маршевых тестов с изменяемыми адресными последовательностями. Основным результатом данной статьи является оценка сложности реализации псевдоисчерпывающего теста для ОЗУ. Полученные аналитические оценки сложности псевдоисчерпывающих тестов ОЗУ подтверждены экспериментальными результатами. Приведенные численные характеристики позволяют сделать вывод о реальности применения псевдоисчерпывающего теста для современных ОЗУ. Как оказалось, применение не более 100 итераций простейшего маршевого теста $\{\hat{\Pi}(w0); \hat{\Pi}(r0, w1)\}$ делает возможным исчерпывающее тестирование любого подмножества из $k \leq 6$ ячеек ОЗУ как с неповторяющимися, так и с повторяющимися адресными последовательностями. Использование любого другого маршевого теста с большим числом разнообразных фаз позволит достичь лучших результатов. Действительно, исчерпывающий тест ОЗУ для $k \leq 6$ обеспечивается тестом March C– в среднем за 31,93 итераций (см. табл. 8).

Список литературы

1. An Orchestrated Survey on Automated Software Test Case Generation / S. Anand [et al.] ; A. Bertolino, J. Jenny, L. Zhu, H. Zhu (ed.) // Journal of Systems and Software. – 2014. – Vol. C–39, no. 4. – P. 582–586.
2. Barzilai, Z. Exhaustive Generation of Bit Pattern with Application to VLSI Self–Testing / Z. Barzilai, D. Coppersmith, A. Rozenberg // IEEE Transactions on Computers. – 1983. – Vol. C–31, no. 2. – P. 190–194.

3. Malaiya, Y.K. The coverage problem for random testing / Y.K. Malaiya, S. Yang // In Proc. of Intern. Test Conference (ITC 1984). – Philadelphia, PA, USA, 1984. – P. 237–242.
4. Ярмолик, С.В. Управляемые вероятностные тесты / С.В. Ярмолик, В.Н. Ярмолик // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 10. – С. 142–155.
5. Furuya, K. A probabilistic approach to locally exhaustive testing / K. Furuya // IEEE Transactions on IEICE. – 1989. – Vol. E72, no. 5. – P. 656–660.
6. Mrozek, I. Iterative Antirandom Testing / I. Mrozek, V. Yarmolik // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications (JETTA). – 2012. – Vol. 9, no. 3. – P. 251–266.
7. Ярмолик, С.В. Управляемое случайное тестирование / С.В. Ярмолик, В.Н. Ярмолик // Информатика. – 2011. – № 1(29). – С. 79–88.
8. Ярмолик, С.В. Квазислучайное тестирование вычислительных систем / С.В. Ярмолик, В.Н. Ярмолик // Информатика. – 2013. – № 3(39). – С. 92–103.
9. Mrozek, I. Multiple Controlled Random Testing / I. Mrozek, V. Yarmolik // Fundamenta Informaticae. – 2016. – Vol. 144, no. 1. – P. 23–43.
10. Das, D. Exhaustive and Near-Exhaustive Memory Testing Techniques and their BIST Implementations / D. Das, M.G. Karpovsky // Journal of Electronic Testing. – 1997. – Vol. 10. – P. 215–229.
11. Segall, I. Using binary decision diagrams for combinatorial test design / I. Segall, R. Tzoref-Brill, E. Farchi // Proc. of the Intern. Symp. on Software Testing and Analysis (ISSTA'11). – Toronto, Canada, 2011. – P. 254–264.
12. Yarmolik, S.V. The Syntheses of Probability Tests with a Small Number of Kits / S.V. Yarmolik, V.N. Yarmolik // Automatic Control and Computer Science. – 2011. – Vol. 45, no. 3. – P. 133–141.
13. Chen, T.Y. Quasi-Random Testing / T.Y. Chen, R. Merkel // IEEE Trans. on Reliability. – 2007. – Vol. 56, no. 3. – P. 562–568.
14. Ярмолик, С.В. Многократные неразрушающие маршевые тесты с изменяемыми адресными последовательностями / С.В. Ярмолик, В.Н. Ярмолик // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 4. – С. 126–137.
15. Mrozek, I. Method for Generation Multiple Controlled Random Tests / I. Mrozek, V. Yarmolik // Proc. of the Computer Information Systems and Industrial Management (CISIM 2016). – Vilnius : Springer International Publisher, 2016. – P. 429–440.
16. Goor, A.J. Testing Semiconductor Memories, Theory and Practice / A.J. Goor. – Chichester, UK : John Wiley & Sons, 1991. – 536 p.
17. Niggemeyer, D. Integration of Non-classical Faults in Standard March Tests / D. Niggemeyer, M. Redeker, J. Otterstedt // Proc. of the IEEE Intern. Workshop on Memory Technology, Design and Testing (MTDT'98). – Washington, USA, 1998. – P. 91–98.
18. Choinski, T.C. Generation of Digit Reversed Address Sequences for Fast Fourier Transforms / T.C. Choinski, T.T. Tylaska // IEEE Transactions on Computers. – 1991. – Vol. 40, no. 6. – P. 780–784.
19. Wang, W.L. A Complete Memory Address Generator for Scan Based March Algorithms / W.L. Wang, K.J. Lee // Proc. of the IEEE Intern. Workshop on Memory Technology, Design, and Testing (MTDT'05). – Taipei, Taiwan, 2005. – P. 83–88.
20. Flajolet, P. Birthday paradox, coupon collectors, caching algorithms and self-organizing search / P. Flajolet, D. Gardy, L. Thimonier // Discrete Appl. Math. – 1992. – No. 39. – P. 207–229.

Поступила 13.02.2017

¹Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники,
Минск, П. Бровки, 6
e-mail: yarmolik10ru@yahoo.com,
lvn@bsuir.by

²Белостокский технический университет,
Белосток, ул. Вейска, 45А, 15-351
e-mail: i.mrozek@pb.edu.pl

V.N. Yarmolik, I. Mrozek, B.A. Levantsevich

PSEUDOEXHAUSTIVE RAM TESTING

Modern RAM tests and methods for their generation are analyzed and investigated. The wide application of pseudoexhaustive tests as the main test procedure for modern computer systems has been proved. The main estimates and metrics for so kind of tests are obtained. The values of analytical estimates have been validated by the experimental investigations.

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ, ИЗОБРАЖЕНИЙ И РЕЧИ

УДК 004

В.В. Старовойтов

СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ В АНАЛИЗЕ
ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Описываются новые свойства сингулярных чисел, вычисляемых для матриц цифровых изображений. Показано, что перестановка строк или столбцов матрицы и ее поворот на 90° не меняют множества сингулярных чисел, однако изменение значения одного элемента или перестановка местами двух элементов матрицы могут привести к изменению всего множества сингулярных чисел. Приводятся примеры повышения резкости и контраста изображений путем модификации множества сингулярных чисел.

Введение

Сингулярное разложение матриц (SVD, от англ. Singular Value Decomposition) – это аналог спектрального разложения сигналов, который применим к произвольным матрицам, т. е. двумерным сигналам. Впервые это преобразование предложил Е. Бельтрами в 1873 г. Пусть A – вещественная матрица размерности $m \times k$. Сингулярное разложение A будем обозначать через $SVD(A)$ и описывать в виде равенства

$$A = USV^T. \quad (1)$$

Матрица S всегда диагональная, ее коэффициенты – неотрицательные вещественные числа $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, расположенные на главной диагонали матрицы, называются сингулярными числами. Столбцы матрицы V называются правыми сингулярными векторами и всегда ортогональны друг другу. Столбцы матрицы U называются левыми сингулярными векторами и также ортогональны друг другу. Матрицы U и V являются унитарными, т. е. сумма квадратов значений каждого столбца матриц равняется единице. Их можно использовать в качестве нового базиса системы координат для представления данных, записанных в матрице A .

Геометрическим аналогом A является представление m вариантов данных в виде массива из k признаков каждый, т. е. в k -мерном признаковом пространстве, или в виде m векторов размерности k . Сингулярное разложение позволяет представить их в новой ортогональной системе координат (повернутой относительно исходной), а сингулярные числа показывают значимость новых осей.

Сингулярное разложение в общем случае не является единственным [1], однако множество сингулярных чисел σ_j уникально для каждой матрицы A . Если все сингулярные числа различны, то левые и правые сингулярные векторы определены однозначно с точностью до знаков.

Алгоритмы сингулярного разложения матриц имеют вычислительную сложность порядка $O(n^3)$, где $n = m \times k$ – число элементов матрицы [2], и реализованы во многих пакетах. Обычно диагональные элементы матрицы S (после сингулярного разложения A) отсортированы и первые r чисел положительны: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, а остальные равны нулю. Квадраты сингулярных чисел σ_i SVD-разложения матрицы A совпадают с собственными числами λ_i матрицы AA^T [3].

Ряд свойств сингулярных чисел описан в научной литературе, например в книге [5]. Одно из них формулируется следующим образом: множества сингулярных чисел матрицы A и ее транспонированного варианта A^T совпадают. Данное свойство сформулировано в качестве упражнения, но в книге оно не доказано. Приведем краткое доказательство. Поскольку $S = S^T$, то $SVD(A^T) = SVD((USV^T)^T) = SVD(VS^T U^T) = V_2 S U_2^T$.

Целью настоящей работы является установление новых свойств сингулярных чисел, вычисляемых для матриц цифровых изображений, т. е. над полем вещественных чисел.

1. Сингулярное разложение в обработке и анализе изображений

Сингулярное разложение матриц имеет множество различных приложений в цифровой обработке сигналов [4]. На сингулярных числах базируются две популярные нормы: $\|A\|_1$, равная максимальному сингулярному числу σ_1 , и $\|A\|_2$ (она же норма Фробениуса), равная корню квадратному из суммы квадратов расстояний от множества точек в многомерном пространстве до прямой, проходящей через вектор v_1 (первый вектор в SVD-разложении (1)). Проекция данных в виде точек a_{ij} на указанную прямую максимально сохраняет их геометрические свойства в одномерном представлении. Простейший вариант применения этого свойства – преобразование цветного изображения в полутоновое путем проекции трех цветов на ось, описываемую вектором v_1 .

Одним из важных приложений сингулярного разложения матриц является метод главных компонент, использующийся для снижения размерности анализируемых данных в распознавании образов [3].

В работе [6] описана роль сингулярных чисел в снижении аддитивного электронного шума в сенсорных регистрирующих системах. Показано, что снизить уровень шума можно посредством сохранения самых больших сингулярных чисел, обнуления остальных и восстановления исходных данных с урезанной матрицей S . Применительно к цифровым изображениям, если сумма первых k сингулярных чисел составляет примерно 90 % от суммы всех сингулярных чисел, то изображение, восстановленное на базе этих k чисел, визуально мало отличается от исходного.

Еще одно приложение связано с внесением в изображения водяных знаков для защиты авторских прав [7]. SVD-представление используется для кодирования и сжатия изображений с минимизацией потери информации [8].

Сингулярное разложение подобно дискретному преобразованию Фурье : бóльшие сингулярные числа соответствуют низкочастотным компонентам, меньшие – высокочастотным [9]. Значения сингулярных чисел существенно зависят от изменений значений элементов матрицы A . В статье [9] показано, что если взять базис U и V после разложения одного изображения и заменить матрицу сингулярных чисел S на матрицу S^* от другого, более темного (светлого) изображения, то восстановленное изображение $A = US^*V^T$ будет темнее (светлее) исходного A .

Признаки, вычисленные на базе 10 меньших сингулярных чисел, которые получены после сингулярного разложения небольших фрагментов изображения (32×32 пиксела), позволяют классифицировать и сегментировать области с разной текстурой [10]. Периодически появляются публикации об исследованиях по распознаванию людей по их фотографиям с помощью сингулярного разложения матриц (например, [11]). В последнее время часто публикуются результаты исследований об использовании функций оценки качества изображений на базе сингулярных чисел [12, 13].

Несмотря на разнообразие применений сингулярного разложения к цифровым изображениям, свойства этого преобразования и его инвариантность к изменению элементов матрицы яркости ни в одной научной публикации не рассматривались.

2. Свойства сингулярного разложения матриц

Цифровое изображение представимо в виде матрицы вещественных неотрицательных чисел. Рассмотрим более подробно свойства сингулярного разложения подобных матриц. Важно отметить, что разложение такого типа всегда существует, однако оно в общем случае не является единственным [1, 2]. Тем не менее множество сингулярных чисел σ_j уникально для каждой матрицы A . Неединственность матриц U и V означает, что они могут отличаться направлением базисных ортонормированных векторов.

Свойство 1. Множества сингулярных чисел матрицы A и ее повернутого на угол, кратный 90° , варианта A^{90} совпадают.

Докажем, что поворот матрицы A на 90° не изменяет множества сингулярных чисел, а значит, и последующие повороты этой матрицы также не будут их изменять.

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ & & \dots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

тогда

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & \dots & a_{m,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad A^{90} = \begin{bmatrix} a_{m,1} & a_{m-1,1} & \dots & a_{1,1} \\ a_{m,2} & a_{m-1,2} & \dots & a_{1,2} \\ a_{m,3} & a_{m-1,3} & \dots & a_{1,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,n} & a_{m-1,n} & \dots & a_{1,n} \end{bmatrix},$$

$$(A^{90})^T = \begin{bmatrix} a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \end{bmatrix}.$$

Левые сингулярные векторы матрицы A – это множество ортонормированных собственных векторов \bar{V} матрицы AA^T , для которых справедливо

$$AA^T\bar{V} - \lambda\bar{V} = 0, \quad (2)$$

где λ – массив собственных чисел матрицы AA^T ; \bar{V} – собственный вектор. Запишем матрицу

$$AA^T = \begin{bmatrix} \sum_i^n a_{1,i}^2 & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{1,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}^2 & \sum_i^n a_{2,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ & & \dots & & \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 \end{bmatrix}.$$

Подставляем AA^T в уравнение (2). Это матричное уравнение имеет решение относительно λ , если определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sum_i^n a_{1,i}^2 - \lambda & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{1,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}^2 - \lambda & \sum_i^n a_{2,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ & & \dots & & \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Матрицы AA^T и $A^T A$ имеют одинаковые собственные числа. Запишем матрицу

$$(A^{90})^T A^{90} = \begin{bmatrix} \sum_i^n a_{m,i}^2 & \sum_i^n a_{m,i} a_{m-1,i} & \dots & \sum_i^n a_{m,i} a_{1,i} \\ \sum_i^n a_{m-1,i} a_{m,i} & \sum_i^n a_{m-1,i}^2 & \dots & \sum_i^n a_{m-1,i} a_{1,i} \\ & & \dots & \\ \sum_i^n a_{1,i} a_{m,i} & \sum_i^n a_{1,i} a_{m-1,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}^2 \end{bmatrix}.$$

Подставив ее в уравнение (2), получим равенство

$$\begin{vmatrix} \sum_i^n a_{m,i}^2 - \lambda_2 & \sum_i^n a_{m,i} a_{m-1,i} & \dots & \sum_i^n a_{m,i} a_{1,i} \\ \sum_i^n a_{m-1,i} a_{m,i} & \sum_i^n a_{m-1,i}^2 - \lambda_2 & \dots & \sum_i^n a_{m-1,i} a_{1,i} \\ & & \dots & \\ \sum_i^n a_{1,i} a_{m,i} & \sum_i^n a_{1,i} a_{m-1,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}^2 - \lambda_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Два определителя в уравнениях (3) и (4) отличаются только расположением элементов $a_{ij}a_{km}$ в строках. Известно [14], что при транспонировании значение определителя не меняется, а при перестановке строк или столбцов меняется только знак. Поскольку данные определители должны быть равны нулю, знак значения не имеет. Определитель из уравнения (4) полностью совпадет с первым, если выполнить следующие преобразования:

- транспонировать его матрицу;
- переставить строки: первую с последней, вторую с предпоследней и т. д.;
- переставить столбцы: первый с последним, второй с предпоследним и т. д.

Следовательно, массивы собственных значений λ и λ_2 матриц AA^T и $A^{90}(A^{90})^T$ будут равны и вычисленные из них сингулярные числа матриц A и A^{90} также будут равны.

Свойство 2. Увеличение (уменьшение) всех значений матрицы A на константу $k \neq 0$ нелинейно изменяет все сингулярные числа, изменяются также матрицы U и V .

Доказывается методом от противного на примере путем сравнения сингулярных разложений матриц B , $B + 1$, $B + 2$, где B получена с помощью генератора случайных чисел

$$B = \begin{bmatrix} 0,8147 & 0,9134 & 0,2785 \\ 0,9058 & 0,6324 & 0,5469 \\ 0,1270 & 0,0975 & 0,9575 \end{bmatrix}.$$

Приведем для сравнения сингулярные числа разложений указанных матриц: (1,8168; 0,8389; 0,1815), (4,7765; 0,8576; 0,1861), (7,7691; 0,8588; 0,1871). Матрицы U и V изменяются, что отражает поворот ортонормированного базиса вокруг начала координат в результате разложения матриц с новыми значениями. Отметим, что величина энтропии этих матриц не меняется.

Свойство 3. Умножение матрицы на константу $k \neq 0$ изменяет в k раз значения сингулярных чисел, не меняя матрицы U и V .

Данное свойство сформулировано в качестве упражнения в книге [5], но не доказано. Доказательство следует из уравнения (3). Если каждый элемент a_{ij} изменить в k раз, параметр λ

изменится в k^2 раз, соответственно сингулярные числа изменятся в k раз. Отметим, что величина энтропии при этом не меняется.

Пример 1. Умножение описанной выше матрицы B на константу $k = 2$ дает вдвое большие сингулярные числа 3,6336; 1,6778; 0,3630.

Свойство 3 позволяет оценить контраст цифрового изображения по матрице его яркостей, анализируя величины сингулярных чисел. Однако при изменении контраста по формуле $B = k * (A - \text{mean}(A)) + \text{mean}$, где mean – среднее значение матрицы A , свойство 3 не выполняется. При сингулярном разложении матрицы B сингулярные числа изменяются нелинейно. При этом элементы матриц U и V также изменяются.

Свойство 4. Изменение одного элемента матрицы A может нелинейно изменить все сингулярные числа и матрицы U и V .

Доказывается на примере. Изменим один элемент описанной выше матрицы B , например к элементу $b(1, 2) = 0,9134$ добавим 0,0001. В результате разложения измененной матрицы сингулярные числа изменились (табл. 1), матрицы U и V также изменились.

Таблица 1

Сингулярные числа разложения тестовой матрицы B (верхняя строка) и ее же, но с измененным элементом $b(1, 2)$

1,81679421943457	0,838914845947905	0,181515318269179
1,81684222270122	0,838933926645382	0,181571377823723

Следует отметить, что степень изменений зависит от размера матрицы B и диапазона ее значений. При изменении значения яркости одного пикселя реального изображения множество сингулярных чисел изменяется не всегда.

Свойство 5. Перестановка двух элементов матрицы A может изменить все множество сингулярных чисел.

Доказывается на примере. В изображении cameraman (рис. 1) два пиксела с яркостью 255 и 0 (координаты (508, 206) и (113, 194)) поменяли местами. Даже перестановка элементов одной строки изменяет все сингулярные числа.

Энтропия изображения не меняется, и визуально оно практически не изменилось, но изменились все сингулярные числа (табл. 2 и 3).

Суммы всех сингулярных чисел для обоих разложений также не равны: $\text{Sum}_1 = 214982,141612736$ и $\text{Sum}_2 = 215298,827898402$.



Рис. 1. Изображение cameraman с двумя переставленными пикселями

Таблица 2

12 первых сингулярных чисел разложения матрицы исходного изображения cameraman

63868,99960191940	14491,08971443710	10956,15919194170	6199,58836933066
5854,60599135936	4825,14545486589	4590,23130201936	3611,48738094200
3347,31861162271	3143,49896319294	3052,62875129008	2959,22013529848

Таблица 3

12 первых сингулярных чисел разложения матрицы изображения cameraman с двумя переставленными пикселями

63869,06819898620	14491,72848258010	10954,12989064590	6199,80046123229
5854,58171263213	4823,98311756491	4590,74385165487	3611,13206101311
3347,66955071622	3143,36384003399	3051,66029420486	2959,37769718645

Свойство 6. От перестановки строк или столбцов матрицы A массив ее сингулярных чисел не изменяется.

Рассмотрим матрицы A и B , где B равна A , но переставлены местами (без ограничения общности) первая и вторая строки:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ & & \dots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ & & \dots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Транспонируем матрицы A и B :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \dots & a_{m,2} \\ & & \dots & & \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{1,1} & a_{3,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{2,2} & a_{1,2} & a_{3,2} & \dots & a_{m,2} \\ & & \dots & & \\ a_{2,n} & a_{1,n} & a_{3,n} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Запишем матрицы AA^T и BB^T (строки с номерами от 3 до m совпадают):

$$AA^T = \begin{bmatrix} \sum_i^n a_{1,i}^2 & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{1,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}^2 & \sum_i^n a_{2,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ & & \dots & & \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 \end{bmatrix},$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} \sum_i^n a_{2,i}^2 & \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{1,i}^2 & \sum_i^n a_{1,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ & & & \dots & \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления собственных чисел из уравнений $AA^T\bar{V}_1 = \lambda_1\bar{V}_1$, $BB^T\bar{V}_2 = \lambda_2\bar{V}_2$ соответствующие определители приравняются нулю:

$$\begin{vmatrix} \sum_i^n a_{1,i}^2 - \lambda_1 & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{1,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}^2 - \lambda_1 & \sum_i^n a_{2,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ & & & \dots & \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 - \lambda_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{vmatrix} \sum_i^n a_{2,i}^2 - \lambda_2 & \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{1,i}^2 - \lambda_2 & \sum_i^n a_{1,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ & & & \dots & \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 - \lambda_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Предположим, что $\lambda_1 = \lambda_2$. Для наглядности записи заменим элементы первого определителя символами b_{ij} с последовательно изменяющимися индексами i, j :

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,m} \\ & & & \dots & \\ b_{m,1} & b_{m,2} & b_{m,3} & \dots & b_{m,m} \end{vmatrix} = B1.$$

Во втором определителе запишем символы b_{ij} на соответствующие им позиции:

$$\begin{vmatrix} b_{2,2} & b_{2,1} & b_{2,3} & \dots & b_{2,m} \\ b_{1,2} & b_{1,1} & b_{1,3} & \dots & b_{1,m} \\ & & & \dots & \\ b_{m,1} & b_{m,2} & b_{m,3} & \dots & b_{m,m} \end{vmatrix} = B2.$$

Любой определитель равен сумме произведений элементов строки $b_{i,j}$ на их алгебраические дополнения $B_{i,j}$ [15]. Разложим первый определитель по первой строке, второй – по второй:

$$|B1| = b_{1,1}B_{1,j} + b_{1,2}B_{2,j} + b_{1,3}B_{3,j} + \dots + b_{1,m}B_{m,j},$$

$$|B2| = b_{1,2}B_{2,j} + b_{1,1}B_{1,j} + b_{1,3}B_{3,j} + \dots + b_{1,m}B_{m,j}.$$

Данные суммы отличаются только перестановкой двух первых членов. Это означает, что оба определителя равны и уравнения (5) и (6) имеют одинаковые решения. Следовательно, перестановка двух строк в матрице A не изменяет сингулярные числа матрицы A . Как следствие можно переставлять местами любое число строк и столбцов матрицы, при этом множество сингулярных чисел матрицы не изменится.

Согласно свойству 2 можно повернуть матрицу (столбцы становятся строками, что не меняет сингулярные числа матрицы) и повторить перестановку строк, затем повернуть матрицу обратно. В итоге множество сингулярных чисел также не изменится.

Пример 2. В матрице значений яркости изображения самегатап размером 512×512 произвольное число строк менялось местами (рис. 2). При этом множество сингулярных чисел не изменилось (табл. 2 и 4).



Рис. 2. Изображение самегатап после перестановки местами 33 строк

Таблица 4

12 первых сингулярных чисел разложения матрицы изображения самегатап с переставленными строками

63868,99960191940	14491,08971443710	10956,15919194170	6199,58836933066
5854,60599135936	4825,14545486589	4590,23130201936	3611,48738094200
3347,31861162271	3143,49896319294	3052,62875129008	2959,22013529848

Свойство 7. Если все элементы матрицы A имеют равные значения k , ее первое сингулярное число равно $k\sqrt{tn}$, где t – число строк, n – число столбцов матрицы, а остальные сингулярные числа равны нулю.

Пусть матрица A имеет все нулевые значения. Тогда матрица AA^T имеет определитель, состоящий из одних нулей. Соответственно все собственные числа матрицы AA^T равны нулю. Как следствие сингулярные числа матрицы A также равны нулю.

Пусть все элементы матрицы A равны единице и ее размер равен $m \times n$ и $m \leq n$, тогда матрица AA^T имеет размер $m \times m$ и все ее элементы равны n . Если $m > n$, то матрица AA^T имеет размер $n \times n$ и все ее элементы равны m . Для вычисления собственных чисел матрицы AA^T определитель, полученный из уравнения (2), должен быть равен нулю. Рассмотрим определитель размера $m \times m$:

$$\begin{vmatrix} n-\lambda & n & n & \dots & n \\ n & n-\lambda & n & \dots & n \\ & & \dots & & \\ n & n & n & \dots & n-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Разделив все элементы этого определителя на n , получим уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-x \end{vmatrix} = 0,$$

где $x = \lambda/n$. Из каждой строки вычтем последнюю, значение определителя при этом не меняется [15]:

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & -x & 0 & \dots & x \\ & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим данный определитель путем разложения по последней строке:

$$(1-x)x^{m-1} + (m-1)x^{m-1} = 0.$$

Это уравнение имеет корни $x=0$ и $x=m$, что дает два варианта собственных чисел $\lambda=0$ и $\lambda=mn$. Сингулярные числа исходной матрицы равны корню квадратному из этих чисел, т. е. 0 и \sqrt{mn} .

Если все элементы матрицы A равны k , то все сингулярные числа в соответствии со свойством 3 увеличиваются (уменьшаются) в k раз.

Свойство 8. Увеличение размера матрицы изображения в k раз посредством интерполяции методом ближайшего соседа увеличивает все положительные сингулярные числа в k раз, но энтропия при этом не меняется.

Энтропия новой матрицы не меняется, поскольку не меняется гистограмма изображения.

Без ограничения общности приведем доказательство свойства для $k = 2$. Пусть дана матрица A размером $m \times n$ и матрица B – увеличенный в два раза вариант A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & a_{1,n} \\ a_{1,1} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & a_{2,n} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & a_{m,n} \\ a_{m,1} & a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Для вычисления собственных чисел λ матрицы AA^T используем уравнение (3), а для вычисления собственных чисел матрицы BB^T получаем уравнение, в котором размер определителя равен $2m \times 2m$:

$$B = \begin{bmatrix} 2\sum_i^n a_{1,i}^2 - \lambda_2 & 2\sum_i^n a_{1,i}^2 & 2\sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & 2\sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \dots & 2\sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ 2\sum_i^n a_{1,i}^2 & 2\sum_i^n a_{1,i}^2 - \lambda_2 & 2\sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & 2\sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \dots & 2\sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ 2\sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & 2\sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & 2\sum_i^n a_{2,i}^2 - \lambda_2 & 2\sum_i^n a_{2,i}^2 & \dots & 2\sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ 2\sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & 2\sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & 2\sum_i^n a_{2,i}^2 & 2\sum_i^n a_{2,i}^2 - \lambda_2 & \dots & 2\sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & 2\sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & 2\sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & 2\sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \dots & 2\sum_i^n a_{m,i}^2 - \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Сделаем замену $x = \lambda/2$. Вычтем из первой строки вторую, из третьей четвертую и т. д. Затем переставим четные строки в нижнюю половину определителя (при этом меняется только его знак), получим

$$B = \begin{bmatrix} -x & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \\ \sum_i^n a_{1,i}^2 & \sum_i^n a_{1,i}^2 - x & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}^2 & \sum_i^n a_{2,i}^2 - x & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 & \sum_i^n a_{m,i}^2 - x \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Если $x=0$, значит $\lambda=0$ и сингулярные числа также равны нулю. Если $x \neq 0$, все строки верхней половины определителя разделим на x . Вычтем из второго столбца первый, из четвертого третий и т. д.:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \\ \sum_i^n a_{1,i}^2 & -x & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & 0 & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} & 0 \\ \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & 0 & \sum_i^n a_{2,i}^2 & -x & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & 0 & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & 0 & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 & -x \end{bmatrix} = 0. \quad (9)$$

Выполним разложение определителя по первой строке (размер определителей уменьшится на 1):

$$\begin{vmatrix}
 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \\
 -x \sum_i^n a_{1,i} a_{2,i} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \sum_i^n a_{1,i} a_{m,i} & 0 \\
 0 & \sum_i^n a_{1,i}^2 & -x & \dots & \dots & \dots & \sum_i^n a_{2,i} a_{m,i} & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \sum_i^n a_{m,i} a_{2,i} & 0 & \dots & \dots & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 & -x
 \end{vmatrix} + \tag{10}$$

$$+ 2 \cdot \begin{vmatrix}
 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \\
 \sum_i^n a_{1,i}^2 & \sum_i^n a_{1,i} a_{2,i} & 0 & \dots & \sum_i^n a_{1,i} a_{m,i} & 0 \\
 \sum_i^n a_{2,i} a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}^2 & -x & \dots & \sum_i^n a_{2,i} a_{m,i} & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \sum_i^n a_{m,i} a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i} a_{2,i} & 0 & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 & -x
 \end{vmatrix} = 0.$$

Полученные определители отличаются только первыми столбцами. Не нарушая равенство, можно поэлементно сложить их первые столбцы, сохраняя остальные [15]. Полученный определитель имеет размер $(2m-1) \times (2m-1)$:

$$\begin{vmatrix}
 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \\
 \sum_i^n a_{1,i}^2 - \frac{x}{2} & \sum_i^n a_{1,i} a_{2,i} & 0 & \dots & \sum_i^n a_{1,i} a_{m,i} & 0 \\
 \sum_i^n a_{2,i} a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}^2 & -x & \dots & \sum_i^n a_{2,i} a_{m,i} & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \sum_i^n a_{m,i} a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i} a_{2,i} & 0 & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 & -x
 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Повторяем разложение по первой строке и сложение первых столбцов еще $m-1$ раз. В итоге матричное уравнение имеет размер и вид уравнения (3), но вместо λ стоит $x/2$. Таким

образом, множество ненулевых собственных чисел полученного матричного уравнения полностью совпадает с множеством ненулевых собственных чисел уравнения (3), умноженных на четыре, и как следствие ненулевые сингулярные числа матрицы B в два раза больше сингулярных чисел матрицы A .

Пример 3. Рассмотрим матрицы A и B , где B получена путем увеличения A в два раза методом «ближайшего соседа»:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 8 & 10 \\ 7 & 0 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 9 & 9 & 8 & 8 & 10 & 10 \\ 4 & 4 & 9 & 9 & 8 & 8 & 10 & 10 \\ 7 & 7 & 0 & 0 & 8 & 8 & 9 & 9 \\ 7 & 7 & 0 & 0 & 8 & 8 & 9 & 9 \\ 7 & 7 & 8 & 8 & 7 & 7 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 8 & 8 & 7 & 7 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Сингулярные числа матрицы A равны 23,7343; 7,1496; 4,3090, а числа матрицы B в два раза больше: первые три равны 47,4686; 14,2991; 8,6180, остальные – нули.

Если матрица B увеличена другим методом, например бикубической интерполяции, и равна

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 & 10 & 8 & 8 & 10 & 10 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 \\ 6 & 5 & 2 & 2 & 6 & 9 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 2 & 2 & 6 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 6 & 6 & 7 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 7 & 8 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

то сингулярные числа увеличиваются нелинейно. В данном примере они равны 46,9967; 9,9776; 6,6824; 0,8175; 0,5276; 0,3943, а соотношение первых трех чисел с сингулярными числами матрицы A равно 1,9801; 1,3956; 1,5508.

Свойство 9. Увеличение сингулярных чисел матрицы яркостей подчеркивает мелкие детали, повышает резкость и контраст изображения.

Продемонстрируем это свойство на примерах. Уменьшение значений сингулярных чисел на константу и восстановление по формуле (1) делают изображение темнее, увеличение повышает резкость (рис. 3). Нелинейное увеличение чисел повышает контраст (рис. 4). Исходное изображение темнеет после умножения сингулярных чисел на 0,8 (сжимается диапазон, снижается контраст).



Рис. 3. Результат изменения изображения: слева – исходное изображение, справа – оно же после увеличения сингулярных чисел на $c=0,005\sigma_1$, где σ_1 – первое сингулярное число



Рис. 4. Результат линейного и нелинейного изменения яркости изображения: слева – исходное изображение; справа – изображение после экспоненциального увеличения сингулярных чисел (повышен контраст)

Заключение

В работе описаны новые свойства сингулярных чисел, получаемых в результате сингулярного разложения матриц, которое все чаще используется при обработке, анализе, кодировании цифровых изображений и внесении в них водяных знаков. Показано, что, с одной стороны, изменение значения одного элемента или перестановка двух элементов матрицы яркости меняют все компоненты сингулярного разложения, а с другой стороны, перестановка любого количества строк или столбцов не изменяет множества сингулярных чисел. Поворот матрицы на угол, кратный 90° , также не изменяет множества сингулярных чисел, а множества левых и правых сингулярных векторов инвариантны с точностью до знака. Доказано, что значения сингулярных чисел зависят от размера изображения.

Описанные свойства следует учитывать при обработке и анализе цифровых изображений с использованием сингулярного разложения матриц их яркости. Сингулярные векторы матрицы изображения определяют уникальный многомерный базис, а сингулярные числа уточняют детальное представление изображения в этом базисе. Приведены примеры повышения резкости и контраста изображений путем модификации сингулярных чисел.

Работа частично выполнена в рамках проекта БРФФИ Ф16СРБГ-004.

Список литературы

1. Golub, G. Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix / G. Golub, W. Kahan // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. Series B: Numerical Analysis.* – 1965. – Vol 2, no. 2. – P. 205–224.
2. Demmel, J. Accurate singular values of bidiagonal matrices / J. Demmel, W. Kahan // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing.* – 1990. – Vol. 11, no. 5. – P. 873–912.
3. Gerbrands, J.J. On the relationships between SVD, KLT and PCA / J.J. Gerbrands // *Pattern Recognition.* – 1981. – Vol. 14, no. 1–6. – P. 375–381.
4. Moonen, M. SVD and signal processing: algorithms, applications and architectures / M. Moonen, B. De Moor. – Elsevier Science, 1995. – 485 p.
5. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон ; пер. с англ. – М. : Мир, 1989. – 655 с.
6. Jha, S.K. Denoising by singular value decomposition and its application to electronic nose data processing / S.K. Jha, R.D.S. Yadava // *IEEE Sensors Journal.* – 2011. – Vol. 11, no. 1. – P. 35–44.
7. Liu, R. An SVD-based watermarking scheme for protecting rightful ownership / R. Liu, T. Tan // *IEEE transactions on multimedia.* – 2002. – Vol. 4, no. 1. – P. 121–128.

8. Andrews, H. Singular value decomposition (SVD) image coding / H. Andrews, C. Patterson // IEEE transactions on Communications. – 1976. – Vol. 24, no. 4. – P. 425–432.
9. Narwaria, M. SVD-based quality metric for image and video using machine learning / M. Narwaria, W. Lin // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. Part B. – 2012. – Vol. 42, no. 2. – P. 347–364.
10. Targhi, A.T. Clustering of singular value decomposition of image data with applications to texture classification / A.T. Targhi, A. Shademan // Proc. of Intern. Conf. on Visual Communications and Image Processing. – Lugano, Switzerland, 2003. – Vol. 5150. – P. 972–979.
11. Zhang, D. A new face recognition method based on svd perturbation for single example image per person / D. Zhang, S. Chen, Z.-H. Zhou // Applied Mathematics and Computation. – 2005. – Vol. 163, no. 2. – P. 95–907.
12. No-reference image blur index based on singular value curve / Q. Sang [et al.] // Journal of Visual Communication and Image Representation. – 2014. – Vol. 25, no. 7. – P. 1625–1630.
13. Singular value decomposition based sample diversity and adaptive weighted fusion for face recognition / G. Zhang [et al.] // Digital Signal Processing. – 2017. – Vol. 62, no. 3. – P. 150–156.
14. Карчевский, Е.М. Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии / Е.М. Карчевский, М.М. Карчевский. – Казань : Казанский гос. ун-т, 2014. – 352 с.
15. Белоусов, И.В. Матрицы и определители : учеб. пособие по линейной алгебре. – 2-е изд. – Кишинев : Изд-во Ин-та прикладной физики АН Республики Молдова, 2006. – 101 с.

Поступила 18.04.2017

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: valerys@newman.bas-net.by*

V.V. Starovoirov

SINGULAR VALUE DECOMPOSITION IN DIGITAL IMAGE ANALYSIS

The paper describes new properties of the singular matrix decomposition. It is shown that permutation of rows or columns of the matrix or matrix rotation by 90 degrees does not change the set of its singular numbers. However, variation the value of at least one matrix element or permutation of any two matrix elements leads to a modification of the whole set of the singular numbers. Examples of image sharpening and contrast enhancement by modification of the singular numbers are given.

УДК 004.912:003.035

С.І. Лысы, Ю.С. Гецэвіч

ГЕНЕРАЦЫЯ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ ТРАНСКРЫПЦЫІ ТЭКСТАЎ НА БЕЛАРУСКАЙ МОВЕ

Прапануецца алгарытм аўтаматызаванай генерацыі нацыянальнай транскрыпцыі тэкстаў на беларускай мове, заснаваны на метадзе пераўтварэння «графема – фанема» фанетычнага працэсара сістэмы сінтэзу маўлення па тэксце. Апісваецца прататып сістэмы генерацыі транскрыпцыі, распрацаваны на аснове апісанага алгарытму, які дазволіў аўтаматызавана згенераваць масіў адпаведнасцяў «слова – транскрыпцыя» для першага поўнага арфаэпічнага слоўніка беларускай мовы.

Уводзіны

Многія навуковыя і адукацыйныя задачы, тым ці іншым чынам звязаныя з вусным маўленнем, патрабуюць перадачы яго на пісьме пры дапамозе пэўнай знакавай сістэмы. Агульнапрынятым спосабам перадачы мовы ў фанетыцы з'яўляецца транскрыпцыя. Широкае прымяненне транскрыпцыі тлумачыцца тым, што яна не патрабуе ніякіх спецыяльных прыстасаванняў і можа выдавацца друкарскім спосабам, бо нагадвае звычайнае пісьмо, толькі заснаванае не на арфаграфічных правілах, а на адназначнай адпаведнасці літар і гукаў, якой няма пры звычайным пісьме [1].

Для транскрыбавання тэкстаў існуе мноства розных фарматаў і сімвальных сістэм, якія можна аднесці да аднаго з двух тыпаў – міжнароднай ці нацыянальнай транскрыпцыі. У адрозненні ад міжнароднай транскрыпцыі, якая мусіць мець пэўную ўніверсальнасць адносна разнастайнасці моў і звычайна грунтуецца на лацінскім алфавіце, нацыянальная транскрыпцыя альбо цалкам засноўваецца на алфавіце нацыянальнай мовы, альбо спецыяльным чынам адаптуе яго [2]. У беларускім мовазнаўстве традыцыйна выкарыстоўваюць нацыянальную транскрыпцыю, у аснову якой пакладзена кірыліца. Адзін з варыянтаў беларускай нацыянальнай транскрыпцыі прыводзіцца ў кнізе «Фанетыка беларускай літаратурнай мовы» [1].

Трэба адзначыць, што транскрыбаванне аўдыязапісаў з маўленнем і друкаваных або электронных тэкстаў уручную з'яўляецца надзвычай працаёмкай задачай, а ў літаратуры не сустракаецца інфармацыі пра аўтаматызацыю гэтага працэсу ў дачыненні да тэкстаў на беларускай мове, як не існуе і поўнага арфаэпічнага слоўніка беларускай мовы, які мог бы быць пакладзены ў аснову такой сістэмы [3]. Таму задачай, якую паставілі перад сабой аўтары артыкула, з'яўляецца распрацоўка алгарытму аўтаматызаванай генерацыі нацыянальнай транскрыпцыі тэкстаў на беларускай мове.

Дадзены алгарытм і распрацаваны на яго аснове прататып сістэмы генерацыі транскрыпцый мусіць паспрыяць у вырашэнні наступных задач:

– напісання першага поўнага арфаэпічнага слоўніка беларускай мовы – слоўніка, які адлюстроўвае сучасныя нормы літаратурнага вымаўлення слоў і пастаноўкі націскаў у іх;

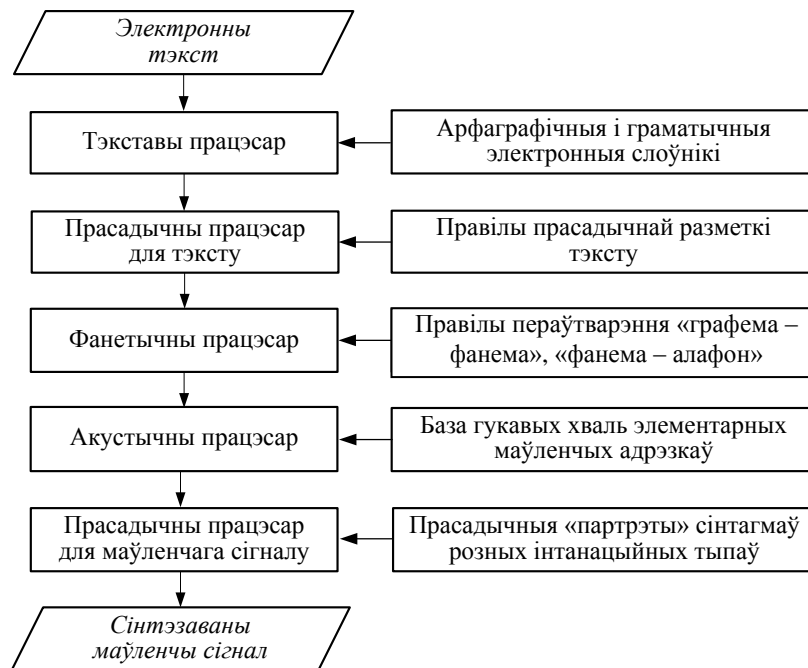
– удасканалення алгарытмаў і рэсурсаў фанетычнага працэсара інтэрнэт-сістэмы сінтэзу маўлення па тэксце, распрацаванай супрацоўнікамі лабараторыі распазнавання і сінтэзу маўлення Аб'яднанага інстытута праблем інфарматыкі НАН Беларусі [4];

– укаранення аўтаматызаванай генерацыі транскрыпцый у адукацыйны працэс як для дапамогі школьнікам і студэнтам у вывучэнні норм беларускага вымаўлення, так і для замяжнікаў, якія вывучаюць беларускую мову.

1. Генерацыя транскрыпцый у сістэмах сінтэзу маўлення па тэксце

Алгарытмы генерацыі транскрыпцый з'яўляюцца неад'емнай часткай сістэм сінтэзу маўлення па тэксце (ССМТ), пад якімі разумеюць сістэмы, здольныя пераўтвараць друкаваны тэкст у адпаведны маўленчы сігнал. Такія сістэмы звычайна складаюцца з шэрагу працэсараў, якія паслядоўна апрацоўваюць электронны тэкст (мал. 1). Паколькі структура ССМТ з'яўляецца

паслядоўнай, то некарэктная праца кожнага з працэсараў істотна ўплывае як на працу наступных працэсараў, так і на канчатковы вынік дзейнасці сістэмы [5].



Мал. 1. Агульная схема працы сістэм сінтэзу маўлення па тэксце

Варта адзначыць, што кожны з працэсараў ССМТ змяшчае ў сабе шэраг алгарытмаў, якія могуць уяўляць самакаштоўнасць і быць укаранёнымі ў іншыя сістэмы. Такім чынам, праца па стварэнні і ўдасканаленні ССМТ разумее пад сабой распрацоўку алгарытмаў шырокага прымянення, якія могуць быць выкарыстаны для вырашэння іншых прыкладных задач, а праца па вырашэнні гэтых задач, у сваю чаргу, можа служыць для ўдасканалення альбо тэставання алгарытмаў ССМТ.

У аснову алгарытму генерацыі транскрыпцый тэкстаў на беларускай мове было вырашана пакласці метады пераўтварэння «графема – фанема», распрацаваны для фанетычнага працэсара ССМТ і апісаны ў артыкулах [6, 7]. Алгарытм пераўтварэння «графема – фанема» (альбо «літара – фанема») служыць для вызначэння паслядоўнасці фанем, якая адпавядае ўваходнаму арфаграфічнаму тэксту. Выдзяляюць наступныя падыходы да распрацоўкі такіх алгарытмаў [8]: выкарыстанне баз дадзеных; падыход, заснаваны на правілах; выкарыстанне метадаў кіруемых дадзеных і статыстычных метадаў.

Першы з пералічаных падыходаў прадугледжвае выкарыстанне адмысловых слоўнікаў, дзе змешчаны адпаведнасці арфаграфічнага запісу слова яго фанетычнаму запісу. Гэты падыход патрабуе вялікіх аб'ёмаў камп'ютарнай памяці, што становіцца асабліва крытычным у выпадку флектыўных моў (да якіх належыць беларуская), бо колькасць словаформаў такіх моў вельмі вялікая. Акрамя таго, ён патрабуе пастаяннай актуалізацыі і папаўнення базы дадзеных.

Сярод астатніх пералічаных падыходаў выбар шмат у чым залежыць ад тыпу арфаграфічнай сістэмы мовы, якая апрацоўваецца. Статыстычныя метады і метады кіруемых дадзеных найбольш шырока прымяняюцца для моў з так званай «глыбокай арфаграфіяй», у якой суадносіны напісання і вымаўлення надзвычай складаныя або непаслядоўныя. У выпадку, калі арфаграфія мовы мае адносна простыя і паслядоўныя суадносіны з вымаўленнем, больш мэтазгодна выкарыстоўваць падыход, заснаваны на правілах.

Так як арфаграфія беларускай мовы грунтуецца на фанетычным прынцыпе і мае даволі паслядоўныя суадносіны з вымаўленнем, у ССМТ для беларускай мовы звычайна выкарыстоў-

ваецца падыход, заснаваны на правілах. Спісы правілаў пераўтварэння «графема – фанема», якія выкарыстоўваюцца ў сінтэзатары маўлення па тэксце [4], з'яўляюцца прыдатнымі для ўбудавання ў сістэму генерацыі транскрыпцый (табл. 1).

Табліца 1

Фрагменты спісаў правілаў пераўтварэння «графема – фанема» для беларускай мовы

Агульныя правілы «графема – фанема»	Выключэнні з агульных правілаў	Змякчальныя графемы	Агульныя правілы змякчэння
Ж-ZH	Д(С)ТВ-С	Е	(Н)[ДЗЦЙ][ЕЁЮЯЬ]
З-Z	(Д)[КСПТФХЦЧШ]-Т	Ё	(Н)[СЛЦЗ]
І-І	(Т)[БГДЗЖ]-D	Ю	(Л)[Л]
Й-Ј'	(З)ДЖ-ZH	Я	(М)[М]
К-К	(З)[КПСТФХЦЧШ]-S	І	([ЗСН])[Д]
...

Аднак фармат выніковых дадзеных алгарытму пераўтварэння «графема – фанема» з'яўляецца недастатковым для адназначнай генерацыі транскрыпцыі, таму было вырашана выкарыстоўваць яшчэ адзін алгарытм фанетычнага працэсара ССМТ, які дае больш дэтальнае фанетычнае апісанне тэксту, пераўтвараючы фанемны тэкст у алафонны.

2. Распрацоўка лінгвістычных рэсурсаў

Як было адзначана вышэй, алгарытмы ССМТ у працэсе працы здзяйсняюць пераўтварэнне арфаграфічнага электроннага тэксту ў транскрыпцыю, але дадзеная транскрыпцыя часта мае даволі спецыфічны, выкарыстоўваемы толькі ў самой сістэме, фармат. Ва ўнутраным прадстаўленні інтэрнэт-сінтэзатара маўлення [4] гэты фармат уяўляе сабой паслядоўнасць абазначэнняў алафонаў і паўз, падзеленых коскамі. Тэкст, прадстаўлены ў такім выглядзе, будзем называць алафонным тэкстам. Ніжэй прыведзены фрагмент арфаграфічнага тэксту і адпаведны яму алафонны тэкст.

Груша цвіла апошні год. Усе галіны яе, усе вялікія расохі, да апошняга пручіка, былі ўсыпаны бурным бела-ружовым цветам.

GH004,R022,U022,SH002,A323,/,C'002,V'002,I241,L002,A012,/,A221,P001,O012,SH002,N'004,I242,/,GH001,O032,T000,/,#P4,U203,S'001,E042,/,GH004,A233,L'002,I042,N004,Y323,/,J'012,A243,J'011,E040,/,#C3,U203,S'001,E043,/,V'012,A243,L'002,I043,K'002,I343,J'012,A342,/,R002,A222,S001,O023,H'002,I340,/,#C3,D004,A322,A221,P001,O012,SH002,N'004,A342,GH004,A231,/,P002,R012,U023,C'002,I342,K004,A330,/,#C3,B004,Y213,L'002,I041,/,W013,S001,Y021,P002,A312,N004,Y221,/,B002,U012,R001,N004,Y221,M001,/,B'002,E141,L004,A312,R002,U222,ZH002,O021,V012,Y211,M003,/,C'002,V'001,E042,T002,A321,M000,/,#P4

Для аўтаматызаванай генерацыі транскрыпцый было неабходна распрацаваць адмысловыя лінгвістычныя рэсурсы для канвертавання алафоннага тэксту ў транскрыпцыю – спісы адпаведнасцяў «алафон – транскрыпцыя». Трэба заўважыць, што кожны алафон у адпаведным тэксце абазначаецца кодам, які складаецца з адной, дзвюх ці трох лацінскіх літар, магчымага знака апострафа і трох арабскіх лічбаў. Гэтае абазначэнне дае інфармацыю пра шэраг характарыстык фанемы ў залежнасці ад кантэксту ў слове і тэксце. Разам алафонная база інтэрнэт-сінтэзатара маўлення налічвае каля 960 розных алафонаў, аднак аналіз адпаведнасці алафонаў і знакаў фанетычнай транскрыпцыі паказаў, што для адназначнага выбару транскрыпцыі дастаткова скарачаных абазначэнняў алафонаў, а менавіта назвы фанемы, знака мяккасці (пры неабходнасці) і першага індэкса. У сувязі з гэтым колькасць неабходных для працы сістэмы адпаведнасцяў «алафон – транскрыпцыя» знізілася да 99. Дадзены спіс быў распрацаваны лінгвістамі на аснове працы А.І. Падлужнага [1]. Фрагмент атрыманага спісу прыведзены ў табл. 2.

Табліца 2

Фрагмент спісу адпаведнасцяў
«алафон – транскрыпцыя»

Скарочаны код алафона	Транскрыпцыя
A0	á
A1	à
A2	a
A3	a
B0	б
B'0	б'
B1	б:
B'1	б':
...	...

3. Алгарытм генерацыі транскрыпцый тэкстаў на беларускай мове

Алгарытм генерацыі транскрыпцый дае магчымасць канвертаваць адвольны тэкст на беларускай мове ў яго фанетычнае прадстаўленне – транскрыпцыю. Гэты алгарытм з'яўляецца пашырэннем алгарытмаў, апублікаваных аўтарамі ў артыкулах [9, 10], і выкарыстоўвае алгарытмы пераўтварэння «графема – фанема» і «фанема – алафон», распрацаваныя для ССМТ і апісаныя ў артыкулах [6, 7, 11].

Уваходныя дадзеныя алгарытму: адвольны арфаграфічны тэкст на беларускай мове T_{bel} , дзе дапускаюцца наступныя пазнакі:

плюс /+/ або акут /' / – асноўнага націску (напрыклад, «чо+рны», «ч'орны»);

роўна /=/ або гравіс /' / – пабочнага націску (напрыклад, «чырво=на-бе+лы», «чырво́на-бе́лы»);

цыркумфлекс /^/ або сімвал /_ / – аб'яднання двух слоў у адно фанетычнае слова (напрыклад, «па^не+бе», «па_не́бе»).

Рэсурсы алгарытму:

– мноства адпаведнасцяў «знак прыпынку – інтанацыйная памета» $P = \langle \langle p_1, int_1 \rangle, \dots, \langle p_k, int_k \rangle \rangle$, дзе p_k – k -ы знак прыпынку, int_k – k -я інтанацыйная памета, k – колькасць адпаведнасцяў;

– база дадзеных, якая змяшчае правілы пераўтварэння «графема – фанема»;

– база дадзеных, якая змяшчае правілы пераўтварэння «фанема – алафон»;

– база дадзеных, якая змяшчае адпаведнасці «алафон – транскрыпцыя».

Уваход.

1. *Вылучэнне слоў.* Для вылучэння слоў з уваходнага тэксту T_{bel} выкарыстоўваецца шаблон слова Pt_w . Ужываючы сінтаксіс рэгулярных выразаў PCRE [12], дадзены шаблон можна прадставіць наступным чынам:

$$Pt_w = (^/[set1][set1set2]*)([^set1]*),$$

дзе $set1$ – мноства сімвалаў, з якіх можа пачынацца слова, $set2$ – мноства сімвалаў, з якіх можа складацца, але не можа пачынацца слова, $set1set2 = set1 \cup set2$. У склад мноства $set1$ уваходзяць літары беларускага алфавіту, у склад мноства $set2$ – злучок, апостраф, сімвалы націскаў і інш. Пры дапамозе шаблона Pt_w тэкст разбіваецца на фрагменты двух тыпаў: словы і сімвалы паміж словамі, альбо раздзяляльнікі. Атрыманыя фрагменты збіраюцца ў спіс $L = \langle \langle W_1, D_1 \rangle, \dots, \langle W_n, D_n \rangle \rangle$, дзе W_i – i -е слова, D_i – i -я паслядоўнасць сімвалаў паміж словамі, $i = 1 \dots n$, n – колькасць вылучаных слоў. Спіс L перадаецца на інтанацыйную апрацоўку.

2. *Інтанацыйная апрацоўка.* У кожнай паслядоўнасці сімвалаў D_i са спісу L здзяйсняецца пошук знакаў прыпынку паводле спісу P . Калі ў паслядоўнасці сімвалаў D_i знойдзены знак

прыпынку, то адбываецца замена D_i на адпаведную знойдзенаму знаку прыпынку p_k інтанацыйную памету int_k . Калі ў паслядоўнасці сімвалаў D_i знакі прыпынку адсутнічаюць, то D_i замяняецца на памету адсутнасці знакаў прыпынку. Атрыманы спіс $L_{int} = \langle \langle W_1, int_1 \rangle, \dots, \langle W_n, int_n \rangle \rangle$ перадаецца ў блок фанетычнай апрацоўкі.

3. *Фанетычная апрацоўка.* Кожнае слова W_i са спісу L_{int} канвертуецца ў алафонны запіс W_{ai} пры дапамозе функцый пераўтварэння «графема – фанема» і «фанема – алафон» сінтэзатара маўлення па тэксце. Такім чынам,

$$W_{ai} = \text{phoneme_to_allophone}(\text{grapheme_to_phoneme}(W_i)),$$

дзе $\text{grapheme_to_phoneme}()$ – функцыя пераўтварэння «графема – фанема», якая прымае ў якасці аргумента арфаграфічны тэкст і вяртае фанемны тэкст; $\text{phoneme_to_allophone}()$ – функцыя пераўтварэння «фанема – алафон», якая прымае ў якасці аргумента фанемны тэкст і вяртае алафонны тэкст.

Вынікам дадзенай канверсіі з'яўляецца спіс $L_a = \langle \langle W_{a1}, int_1 \rangle, \dots, \langle W_{an}, int_n \rangle \rangle$, дзе W_{ai} – i -е слова ў алафонным запісе, int_i – i -я інтанацыйная памета.

4. *Фарміраванне правілаў «алафон – транскрыпцыя».* Адбываецца зварот да базы дадзеных, якая змяшчае адпаведнасці «алафон – транскрыпцыя». Фарміруецца мноства адпаведнасцяў «алафон – транскрыпцыя» $C = \langle C_1, \dots, C_m \rangle$, дзе $C_m = \langle a_m, tr_m \rangle$, a_m – m -ны алафон, tr_m – адпаведны алафону a_m сімвал транскрыпцыі, m – колькасць алафонаў у базе.

5. *Генерацыя транскрыпцый.* Для кожнага алафоннага слова W_{ai} са спісу L_a выконваюцца крокі 5.1–5.4.

5.1. *Вылучэнне алафонаў.* У алафонным слове W_{ai} вылучаюцца сімвальныя паслядоўнасці, якія адпавядаюць шаблону Pt_a . Выкарыстоўваючы сінтаксіс рэгулярных выразаў PCRE [12], дадзены шаблон можна прадставіць наступным чынам:

$$Pt_a = [A-Z]\{1,3\}'?[0-9]\{3\}|>,$$

што адпавядае форме запісу алафонаў і знакаў складападзелу ва ўнутраным прадстаўленні сінтэзатара маўлення па тэксце. Вылучаныя сімвальныя паслядоўнасці захоўваюцца ў спіс A .

5.2. *Канверсія «алафон – транскрыпцыя».* Для кожнага алафона a са спісу A знаходзіцца адпаведнік паводле спісу C . У выніку паслядоўнай апрацоўкі спісу A атрымліваем спіс $Tr = \langle Tr_1 \dots Tr_p \rangle$, дзе Tr_p – транскрыпцыя p -га алафона слова W_{ai} , p – колькасць алафонаў у слове.

5.3. *Атрыманне транскрыпцый слова.* Адбываецца канкатэнацыя транскрыпцый асобных алафонаў слова W_{ai} у транскрыпцыю W_{tri} .

5.4. *Збор выніковых транскрыпцый у спіс.* Алафоннае слова W_{ai} у спісе L_a замяняецца на транскрыпцыю W_{tri} .

Такім чынам, пасля апрацоўкі ўсіх слоў W_{ai} са спісу L_a атрымоўваецца спіс $L_{tr} = \langle \langle W_{tr1}, int_1 \rangle, \dots, \langle W_{trm}, int_n \rangle \rangle$.

6. *Генерацыя выніковых тэстаў.* Для кожнага элемента спісу L_{tr} адбываецца канкатэнацыя транскрыпцый і інтанацыйнай паметы, затым адбываецца канкатэнацыя атрыманых фрагментаў у выніковы транскрыбаваны тэкст T_{tr} , які выдаецца карыстальніку.

У выпадку рэалізацыі дадзенага алгарытму для інтэрнэт-асяроддзя немалаважнымі з'яўляюцца крокі 7 і 8.

7. *Захаванне дадзеных у архіве.* Здзяйсняецца збор інфармацыі аб уведзеных карыстальнікам уваходных дадзеных (зыходны тэкст T_{bel}), атрыманых карыстальнікам выніковых дадзеных (выніковых транскрыпцый T_{tr}), інфармацыі аб адсутнасці тых ці іншых элементаў у базе «алафон – транскрыпцыя», а таксама аналітычнай інфармацыі (памераў тэксту, IP-адрас, даты і часу запыту і інш.). Адбываецца захаванне гэтых дадзеных на серверы.

8. *Расылка апавяшчэнняў распрацоўшчыкам.* На падставе пералічанай вышэй інфармацыі фарміруецца электронны ліст, які накіроўваецца распрацоўшчыкам для статыстычнага і аналітычнага аналізу, а таксама для вызначэння праблемных сітуацый пры працы з праграмай (памылкі ў лінгвістычных рэсурсах, алгарытмах і праграмных кодах, інш.) і аператыўнага пошуку шляхоў іх вырашэння.

Канец алгарытму.

У выніку апісанага вышэй алгарытму з адвольнага арфаграфічнага тэксту на беларускай мове можа быць згенеравана транскрыпцыя ў традыцыйным для беларускай мовы фармаце. Варта адзначыць, што прапанаваны алгарытм з'яўляецца прыдатным для пашырэння на іншыя фарматы транскрыпцый, бо алафонны запіс, распрацаваны для сінтэзатара маўлення на тэксце, прадстаўляе дастаткова інфармацыі для канверсіі яго ў розныя фарматы транскрыпцыі.

4. Прататып сістэмы генерацыі транскрыпцый

Для апрабавання, тэставання і нагляднасці працаздольнасці апісанага вышэй алгарытму быў распрацаваны прататып сістэмы генерацыі транскрыпцый у форме вэб-сэрвісу «Генератар транскрыпцый», які даступны для вольнага выкарыстання ў Інтэрнэце [13]. Дадзены сэрвіс дае магчымасць канвертаваць адвольны тэкст на беларускай мове ў нацыянальную транскрыпцыю (мал. 2).

Генератар транскрыпцый EN BE ?

Калі ласка, увядзіце тэкст з націскамі
(напрыклад, *пад[^]ве+чар падзьму+ў[^]бы паўно=чна-захо+дні ве+цер*)

Натуральны тэкст ▾
☺
☹
☹
↺
✕

Гру+ша цвіла+ апо+шні го+д. Усе= галі+ны яе=, усе= вялі+кія расо+хі, да^апо+шняга пру+цка, былі+ ўсы+паны бу+рным бе=ла-ружо+вым цве+там. Яна= кіпе+ла, мле+ла і= раскашава+лася ў^пчалі+ным зво+не, цягну+ла да^со+нца ста+лья ла+пы і= распасціра+ла ў^яго= ззя +нні мале+нкія, квот+лыя па+льцы но+вых па+расткаў. І= была+ яна= така=я магу+тная і= све+жая, та=к утрапё+на спрача+ліся ў^яе= ружо+вым раі+ пчо+лы, што= здава+лася, не^бу+дзе ё=й зво+ду і= не^бу+дзе канца+.

- Кірылічная транскрыпцыя [\[Book\]](#)
- Міжнародны фанетычны алфавіт (МФА) [\[Official website, Wikipedia\]](#)
- Спрошчаны Міжнародны фанетычны алфавіт [\[Book\]](#)
- Пашыраны фанетычны алфавіт метадаў ацэнкі маўлення (X-SAMPA) [\[Wikipedia\]](#)

- Узяць словы ў квадратныя дужкі
- Раздзяліць гукі коскамі
- Паказаць інтанацыйныя пазнакі

Беларуская мова ▾

Паказаць сінтагмы ў слупок ▾

Атрымаць транскрыпцыі!

Мал. 2. Графічны карыстальніцкі інтэрфейс вэб-сэрвісу «Генератар транскрыпцый»

На ўваход сэрвіс можа прымаць як адвольны арфаграфічны тэкст, размечаны націскамі, так і тэкст у алафонным фармаце. Для зручнасці працэсу разметкі тэксту маюцца кнопкі ўстаўкі сімвалаў асноўнага націску, пабочнага націску і сімвала аб'яднання некалькіх слоў у адно фанетычнае слова. Сэрвіс дае магчымасць карыстальніку канвертаваць уведзены ім тэкст на беларускай мове ў фанетычную транскрыпцыю, дазваляючы здзяйсняць наладку фармату выніковых дадзеных. Адзначыўшы адпаведныя пункты ў наладках, карыстальнік можа атрымаць транскрыпцыю кожнага слова ў квадратных дужках або без іх; у транскрыпцыі кожнага слова фанемы могуць быць выведзены разам або падзелены коскамі. Калі адзначыць пункт «Паказаць інтанацыйныя пазнакі», выніковы тэкст будзе разбіты на інтанацыйныя фрагменты – сінтагмы. Для гэтага будуць выкарыстаны адмысловыя пазнакі (вертыкальная рыса ‘|’ ў выпадку коскі і падвоеная вертыкальная рыса ‘||’ ў канцы сказа ці абзаца). Пасля ўводу тэксту і адпаведных наладак патрэбна націснуць кнопку «Атрымаць транскрыпцыі!».

Прыклад працы прататыпа сістэмы генерацыі транскрыпцый тэкстаў на беларускай мове, які дэманструе працаздольнасць і карэктнасць распрацаваных алгарытмаў, прыведзены ў табл. 3.

Табліца 3

Прыклад выніковых транскрыпцый, атрыманых пры дапамозе вэб-сэрвісу «Генератар транскрыпцый»

Размечаны тэкст на беларускай мове	Гру+ша цвіла+ апо+шні го+д. Усе+ галі+ны яе+, усе+ вялі+кія расо+хі, да^апо+шняга пру+ціка, былі+ ўсы+паны бу+рным бе=ла-ружо+вым цве+там.
Транскрыпцыя	[гүрүша] [ц'в'іла] [апошн'і] [гүт] [ус'э] [үал'іны] [йайэ] [ус'э] [в'ал'ік'іа] [расох'і] [даапошн'аүа] [пруціка] [былі] [ўсыпаны] [бүрным] [б'эларужовым] [ц'в'этам]

5. Тэставанне алгарытму генерацыі транскрыпцый і ўдасканаленне лінгвістычных рэсурсаў

Для тэставання алгарытму генерацыі транскрыпцый быў распрацаваны іншы прататып – «Генератар арфаэпічнага слоўніка», задачай якога з'яўляецца канвертаванне спісу слоў альбо слоўнікавых артыкулаў у фармат арфаэпічнага слоўніка [14]. Пры дапамозе дадзенага інтэрнэт-сэрвісу быў апрацаваны масіў электронных слоў, складзены паводле «Слоўніка беларускай мовы» [15], які налічвае звыш 117 тысяч слоўнікавых артыкулаў. У табл. 4 прыведзены фрагменты спісаў уваходных і выніковых слоўнікавых артыкулаў.

Табліца 4

Фрагменты «Слоўніка беларускай мовы» і артыкулаў арфаэпічнага слоўніка, згенераваных на яго аснове пры дапамозе вэб-сэрвісу «Генератар арфаэпічнага слоўніка»

Фрагмент «Слоўніка беларускай мовы»	Фрагмент арфаэпічнага слоўніка
... сакаляня і сакаляне, РДМ -няці, <i>Т</i> –нём; <i>мн.</i> -няты, <i>РВ</i> -нят, -нятам, -нятамі, -нятах сакалянятка , -тку, -так сакалятнік , -ка, -ку, -каў сáкас , -са, -се сакатáнне , -нні сакатáць , <i>незак.</i> сакачу́, сако́чаш, -ча, -чам, -чаце, -чуць сакатлівы сакатýн , -на́, -не́, -но́ў сакатýха , -ўсе, -ўх сáква , -ве, -ваў саква́ж , -жа, -жы, -жаў саква́жны сакé , <i>н.</i> , <i>нескл.</i> сакаляня [сакал'ан'а́] і сакаляне [сакал'ан'о́] сакалянятка [сакал'ан'атка] сакалятнік [сакал'атн'ік] сáкас [сáкас] сакатáнне [сакатáн'э] сакатáць [сакатáц'] сакатлівы [сакатл'івы] сакатýн [сакатýн] сакатýха [сакатýха] сáква [сáква] саква́ж [саквайáш] саква́жны [саквайáжны] сакé [сак'э] ...

Атрыманы шляхам аўтаматызаваанай генерацыі масіў электронных слоў і адпаведных ім фанетычных транскрыпцый прайшоў дэталюную праверку экспертамі-лінгвістамі і быў пакладзены ў аснову першага поўнага арфаэпічнага слоўніка беларускай мовы, які на дадзены момант гатуецца да выдання. Вынікі экспертнай праверкі паказалі, што з 117 100 слоўнікавых артыкулаў толькі ў 2109 алгарытм дапусціў памылкі. Такім чынам, дакладнасць працы алгарытму можна ацаніць у 98,2 %.

Здзейсненае экспертамі-лінгвістамі тэставанне не толькі паказала высокі ўзровень карэктнасці працы алгарытму генерацыі транскрыпцый, але і дазволіла атрымаць спіс слоў, якія канвертуюцца некарэктна. Варта адзначыць, што вызначаныя экспертамі памылкі (табл. 5) у большасці сваёй з'яўляюцца сістэматычнымі і могуць быць умоўна падзелены на дзве групы:

- памылкі, выкліканыя некарэктнасцю правілаў пераўтварэння «графема – фанема» фанетычнага працэсара сінтэзатара маўлення па тэксце;
- памылкі ў словах, якія з'яўляюцца выключэннямі і не падпадаюць пад правілы.

Табліца 5

Фрагмент спісу памылак, знойдзеных пры тэставанні алгарытму генерацыі транскрыпцый экспертамі

Слова	Згенераваная транскрыпцыя	Карэктная транскрыпцыя	Апісанне памылкі
гўзік	[гўз'ік]	[gўз'ік]	Выключэнні на «г-выбухное»
экзáмен	[эгзám'эн]	[эгзám'эн]	
аджа́ць	[ажа́ц]	[аджа́ц]	Фанетычныя з'явы на сутыку прыстаўкі і кораня
адна́ка	[аз'на́ка]	[адна́ка]	
з'іне́лы	[з'ійн'элы]	[з'ійн'элы]	Фанетычныя з'явы пры наяўнасці апострафа пасля прыстаўкі
уз'ядна́нне	[уз'йадна́н':э]	[уз'йадна́н':э]	
звы́шсветлавы́	[звыс'в'этлавы́]	[звышс'в'этлавы́]	Фанетычныя з'явы на сутыку частак складанага слова
ма́с-спэ́ктр	[ма́с':п'э́ктр]	[ма́сс'п'э́ктр]	
òст-індскі́	[òстінцк'і́]	[òстынцк'і́]	
...

На падставе прадстаўленых экспертамі дадзеных была праведзена дадатковая карэктыроўка правілаў пераўтварэння «графема – фанема», па выніках якой колькасць памылак зменшылася да 340. Дакладнасць працы алгарытму на масіве электронных слоў «Слоўніка беларускай мовы» адпаведна узрасла да 99,7%. Далейшыя планы працы прадугледжваюць як працяг карэктыроўкі правілаў, так і ўбудаванне спісу выключэнняў.

Скарэктаваныя правілы пераўтварэння «графема – фанема» былі ўбудаваны ў інтэрнэт-версію сінтэзатара маўлення па тэксце [4], што паспрыяла павышэнню якасці сінтэзаванага маўлення. У будучым плануецца ўкараніць дадзеныя карэктыроўкі ў мабільную і стацыянарную версіі сінтэзатараў беларускага маўлення.

Заклучэнне

У артыкуле прапанавана ідэя выкарыстання алгарытмаў ССМТ для вырашэння розных камп'ютарна-лінгвістычных задач, што ўяўляе каштоўнасць як для той сферы, да якой адносіцца абраная задача, так і для самой ССМТ. Гэтая ідэя праілюстравана распрацаваным і апісаным у артыкуле алгарытмам генерацыі транскрыпцый адвольнага тэксту на беларускай мове, у аснову якога былі пакладзены алгарытмы пераўтварэння «графема – фанема» і «фанема – алафон» інтэрнэт-сінтэзатара маўлення па тэксце. На аснове дадзеных алгарытмаў быў распрацаваны прататып сістэмы генерацыі транскрыпцый, карэктнасць яго працы была пратэставана экспертамі-лінгвістамі. Вынікі тэставання сведчаць пра высокі ўзровень дакладнасці працы прататыпа (99,7% карэктна транскрыбаваных слоў). Распрацаваны прататып сістэмы генерацыі транскрыпцый знайшоў непасрэднае прымяненне ў падрыхтоўцы масіву электронных слоў першага поўнага арфаэпічнага слоўніка беларускай мовы, і ў той жа час экспертная вычытка атрыманага масіву электронных слоў і транскрыпцый дала магчымасць удасканаліць алгарытмы і лінгвістычныя рэсурсы ССМТ.

Спіс літаратуры

1. Фанетыка беларускай літаратурнай мовы / рэд. А.І. Падлужны. – Мінск : Навука і тэхніка, 1989. – 335 с.
2. Тошович, Б. Корреляционная грамматика сербского, хорватского и бошняцкого языков. Часть 1: Фонетика – Фонология – Просодия / Б. Тошович. – М. : Языки славянской культуры, 2011. – 640 с.
3. Стварэнне сэрвіса арфаэпічнага генератара слоўнікаў / Ю.С. Гецэвіч [і інш.] // Тезі доповідей Міжнар. конф. «Діалекты в синхроніі та дыяхраніі: загальнаслов'янський контекст»

(Київ, 2–4 квітня 2014 року) / за ред. П.Ю. Гриценка ; Ін-т укр. мови НАН України. – Київ : КММ, 2014 . – С. 101–106.

4. Text-to-Speech Synthesizer [Electronic resource]. – 2012. – Mode of access : <http://corpus.by/TextToSpeechSynthesizer/>. – Date of access : 20.01.2017.

5. Лобанов, Б.М. Компьютерный синтез и клонирование речи / Б.М. Лобанов, Л.И. Цирульник. – Минск : Беларус. навука, 2008. – 342 с.

6. Гецевіч, Ю.С. Фанетычная і алафонная апрацоўка тэксту ў сінтэзатары беларускага і рускага маўлення для мабільных платформаў / Ю.С. Гецевіч, Б.М. Лабанаў, Д.А. Пакладок // Інфарматыка. – 2014. – № 2(42). – С. 25–35.

7. Гецевич, Ю.С. Алгоритмы преобразования «Буква – Фонема» двуязычного синтезатора речи / Ю.С. Гецевич, Б.М. Лобанов, Д.А. Покладок // Речевые технологии. – 2013. – № 3–4. – С. 95–108.

8. Taylor, P. Text-to-Speech Synthesis / P. Taylor. – N. Y. : Cambridge University Press, 2009. – 626 p.

9. The system of generation of phonetic transcriptions for input electronic texts in belarusian / Yu. Hetsevich [et al.] // Pattern Recognition and Information Processing : Proc. of the 12th Intern. Conf. (28–30 May, Minsk, Belarus). – Minsk : UPII NASB, 2014. – С. 81–85.

10. Using text-to-speech synthesis algorithms for solving a task of automatic generation of orthoepic dictionary of Belarusian language / Yu. Hetsevich [et al.] // Тези доповідей Міжнар. конф. «Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів» (Київ, 3–7 листопада 2014 року). – Київ : УкрОБРАЗ, 2014 . – С. 99–101.

11. Гецевич, Ю.С. Алгоритмы преобразования «Фонема – Аллофон» двуязычного синтезатора речи / Ю.С. Гецевич, Б.М. Лобанов, Д.А. Покладок // Речевые технологии. – 2013. – № 3–4. – С. 109–126.

12. Perl-compatible Regular Expressions (PCRE) [Electronic resource]. – 1997–2016. – Mode of access : <http://www.pcre.org/original/doc/html/pcrepattern.html>. – Date of access : 20.01.2017.

13. Transcription Generator [Electronic resource]. – 2014. – Mode of access : <http://corpus.by/TranscriptionGenerator>. – Date of access : 20.01.2017.

14. Orthoepic Dictionary Generator [Electronic resource]. – 2014. – Mode of access : <http://corpus.by/OrthoepicDictionaryGenerator>. – Date of access : 20.01.2017.

15. Слоўнік беларускай мовы / Нац. акад. навук Беларусі, Ін-т мовы і літ. імя Я. Коласа і Я. Купалы ; уклад. Н.П. Еўсіевіч [і інш.] ; навук. рэд. А.А. Лукашанец, В.П. Русак. – Мінск : Беларус. навука, 2012. – 916 с.

Паступіла 23.03.2017

*Аб'яднаны інстытут праблем
інфарматыкі НАН Беларусі,
Мінск, Сурганава, 6
e-mail: stanislau.lysy@gmail.com,
yuras.hetsevich@newman.bas-net.by*

S.I. Lysy, Yu.S. Hetsevich

GENERATING THE NATIONAL TRANSCRIPTION OF TEXTS IN BELARUSIAN

The paper proposes an algorithm for automatic national transcription generation of texts in Belarusian, which is based on «grapheme-to-phoneme» conversion method of phonetic processor in text-to-speech synthesis system. The paper describes a prototype of transcription generation system, which is developed on the basis of presented algorithm. This algorithm made it possible to generate automatically an array of correspondences «word – transcription» for the first full pronouncing dictionary of the Belarusian language.

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 621.382.3

В.Э. Маркевич

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ МЕТОДА НАВЕДЕНИЯ СВЕРХЗВУКОВОГО БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА ОСНОВЕ МНОГОМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассматривается аналитический синтез метода наведения для терминальной задачи управления сверхзвуковыми беспилотными летательными аппаратами на основе синергетического подхода к проектированию систем управления нелинейными многомерными динамическими объектами. Метод основан на введении в пространстве состояний синтезируемых систем оптимальных инвариантных многообразий – аттракторов, на которых наилучшим образом согласуются общие естественные (энергетические, механические, баллистические и др.) свойства объекта и частные требования конкретной технологической задачи. При этом обеспечиваются желаемые динамические характеристики и гарантируется асимптотическая устойчивость движения системы оптимальный регулятор – объект управления.

Приводятся аналитические выражения, описывающие алгоритм управления положением вектора скорости сверхзвукового беспилотного летательного аппарата, результаты математического моделирования и сравнительного анализа предлагаемого алгоритма управления с модифицированным методом пропорциональной навигации.

Введение

В настоящее время существуют методы аналитического конструирования систем при их оптимизации по одному постулируемому критерию качества в методе Летова – Калмана [1] или корректируемому критерию в методе А.А. Красовского [2]. Эти методы весьма эффективны при синтезе линейных систем управления. Вместе с тем при использовании нелинейных векторных моделей объекта высокой размерности процедура отыскания закона оптимального управления усложняется настолько, что в ряде важных для практики случаев делает крайне затруднительными или практически невозможными как выполнение самой процедуры синтеза, так и получение в замкнутой аналитической форме закона управления (приемлемого для практического использования и реализации алгоритма). Как правило, закон управления получается чрезмерно сложным, громоздким и затратным по ресурсам при практической (программной или аппаратной) реализации, а также при последующем статистическом анализе для различных условий функционирования [3–6]. В указанных и подобных этому практически важных случаях нормой является использование следующих эвристических приемов [7–12], позволяющих в некоторой весьма ограниченной степени решить упомянутые проблемы, что сопровождается безусловным ухудшением качества работы регулятора:

- феноменологического подхода к описанию динамики движения объекта, или динамического процесса, т. е. описания внешних экспериментально наблюдаемых свойств (признаков) процесса или явления без учета внутренней динамики и функциональных связей;
- существенного упрощения полной модели состояний исследуемого объекта за счет исключения из рассмотрения отдельных функциональных связей;
- линеаризации изначально нелинейной модели, исследования режима «малых» отклонений и исключения из рассмотрения режимов «больших» отклонений;
- принудительного разделения каналов управления, понижения порядка динамической системы за счет исключения взаимных перекрестных связей и т. д.

Все это приводит к прогнозируемому уже на этапе разработки ухудшению качества функционирования проектируемой системы управления при попадании в области работы (траектории движения), не предусмотренные линеаризованной редуцированной моделью объекта с искусственно разделенными каналами отработки управляющих воздействий.

Противоречие между степенью адекватности модели исследуемого объекта (процесса) и сложностью процедуры аналитического синтеза (формализации алгоритма функционирования) до недавнего времени являлось одним из основных факторов, сдерживающих получение

универсальных (в рамках рассматриваемой нелинейной многомерной модели) законов управления. Это касается как задач со свободными граничными условиями в конце траектории (неопределенным временем управления), так и задач терминального управления (с фиксированными граничными условиями в конце траектории).

Научным коллективом одной из кафедр Таганрогского радиотехнического университета, возглавляемого профессором А.А. Колесниковым, в 1989–2011 гг. был разработан новый подход к аналитическому конструированию оптимальных регуляторов для нелинейных многомерных многосвязных систем высокой размерности. Данный подход отличается тем, что для аналитического конструирования используется не совокупность частных критериев качества, по каждому из которых синтезируемая система оптимальна в строго ограниченной области пространства состояний, а единый обобщенный оптимизирующий функционал [7–12], который может быть в той или иной мере только сходен с частным критерием качества в соответствующей нечетко определенной области пространства состояний. Указанный функционал может постепенно и без скачков (асимптотически) приближаться к конкретному критерию качества, обеспечивая заданные характеристики переходных процессов в замкнутой системе, что позволяет синтезировать в замкнутой аналитической форме законы управления (регуляторы) объектов, описываемых нелинейными системами уравнений высокой размерности с учетом функциональных связей. Рассматриваемый подход, обладая значительной эвристической силой, имеет высокую степень адаптации к практическим инженерным задачам, позволяя разработчику на стадии проектирования системы осуществлять выбор оптимизирующего функционала с последующей коррекцией его структуры или параметров для получения желаемых динамических свойств (например, по результатам моделирования) замкнутой системы. Это связано с тем, что проблема многокритериальной оптимизации, как правило, не может быть решена полностью формальными методами векторной оптимизации [7–9].

Особенно сильно преимущества указанного подхода проявляются при синтезе систем управления объектами, работающими в режимах с большими отклонениями при наличии функциональных ограничений, когда их движение описывается нелинейными математическими моделями. Здесь структура оптимального управления заранее вообще неизвестна, однако путем выбора указанного выше функционала эта задача оказывается разрешимой для большинства распространенных классов нелинейных объектов.

Перейдем к краткому изложению основ рассматриваемого метода конструирования унифицированных обобщенных оптимизирующих функционалов. Так как данные функционалы выступают в роли вспомогательного средства для получения конкретных частных критериев качества во всем диапазоне условий работы объекта, будем называть эти функциональные зависимости сопровождающими оптимизирующими функционалами (СОФ).

1. Краткие сведения о выборе СОФ в задаче аналитического конструирования нелинейных регуляторов

Для полного отражения требований к показателям качества системы в режиме малых и больших отклонений желательно, чтобы СОФ имел переменную в пространстве состояний структуру. В работах [7–12] предлагается использовать сопровождающий функционал вида

$$J_{\Sigma} = \int_0^{\infty} F(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \dot{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x})) dt, \quad (1)$$

где $F(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \dot{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}))$ – непрерывно дифференцируемая по своим аргументам положительно определенная функция; $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ – агрегированная макропеременная, представляющая собой некоторую произвольную (скалярную или векторную) дифференцируемую или кусочно-непрерывную функцию вектора фазовых координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$, $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = 0$ при $\mathbf{x} = (0, 0, \dots, 0)^T$.

Выберем подынтегральную функцию $F(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \dot{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}))$ в (1) в виде следующей квадратичной формы:

$$F(\boldsymbol{\psi}, \dot{\boldsymbol{\psi}}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\psi})^T \mathbf{M}(t) \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\psi}) + \dot{\boldsymbol{\psi}}(t)^T \mathbf{C}(t) \dot{\boldsymbol{\psi}}(t), \quad (2)$$

где $\mathbf{M}(t), \mathbf{C}(t)$ – некоторые известные квадратные матрицы (переменные в общем случае коэффициенты дифференциальных уравнений), размерность которых совпадает с размерностью вектор-функций $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\psi})$ и $\dot{\boldsymbol{\psi}}(t)$.

В скалярной форме функция (2) примет вид

$$F(\boldsymbol{\psi}, \dot{\boldsymbol{\psi}}) = m^2(t) \varphi^2(\boldsymbol{\psi}) + c^2(t) \dot{\boldsymbol{\psi}}^2(t), \quad (3)$$

где m, c – некоторые известные постоянные коэффициенты.

Тогда функционал (1) можно записать как

$$J_{\Sigma} = \int_0^{\infty} (m^2(t) \varphi^2(\boldsymbol{\psi}) + c^2(t) \dot{\boldsymbol{\psi}}^2(t)) dt. \quad (4)$$

В подынтегральном выражении функции $\varphi(\boldsymbol{\psi})$ и $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ должны удовлетворять следующим условиям: однозначности, непрерывности и дифференцируемости при всех значениях макропеременной $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$, равенству нулю функции в начале координат $\varphi(0) = 0$, а также условию $\varphi(\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{\psi} > 0$ для $\forall \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) \neq 0$. Иначе говоря, должно выполняться условие $\text{sign}(\varphi(\boldsymbol{\psi})) = \text{sign}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}))$ при равенстве нулю функции $\varphi(\boldsymbol{\psi})$ на многообразии $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = 0$.

Определим полную производную функции $\boldsymbol{\psi}(t)$ как

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_k} \dot{x}_k(t) \quad (5)$$

и, подставив вместо $\dot{x}_k(t)$ правые части исходной системы дифференциальных уравнений объекта

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i \in (1, N-1), \quad \dot{x}_N(t) = f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) + u(t), \quad (6)$$

получим

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_k} f_k(x_1, x_2, \dots, x_N) + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_N} u(t). \quad (7)$$

В дальнейшем без снижения общности будем полагать, что параметры функциональных уравнений являются постоянными величинами: $m(t) = \text{const}$ и $c(t) = \text{const}$.

На основе известного в вариационном исчислении свойства инвариантности к замене переменных функционал (4) может быть записан в форме

$$J_{\Sigma} = \int_0^{\infty} \left(m^2 \varphi^2(\boldsymbol{\psi}) + c^2 \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}) + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})}{\partial x_N} u(t) \right)^2 \right) dt. \quad (8)$$

Очевидно, что обобщенный функционал (8) характеризует некоторые свойства как исходного объекта (6), так и его системы управления. Это означает, что в рассматриваемом методе оптимизирующий функционал не строго постулируется заранее, как это предполагается в стандартных линейных квадратично-гауссовских задачах аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) [1–6], а формируется динамически путем выбора соответствующих функций $\varphi(\boldsymbol{\psi})$ и $\boldsymbol{\psi}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ с привлечением уравнений объекта (6). Такой подход позволяет в определенной степени учесть свойства объекта управления, так как внешнее «навязывание» постулируемого критерия и игнорирование свойств объекта на этапе выбора критерия качества может привести к неприемлемому для нелинейного объекта протеканию переходных процессов.

Следующее отличие предлагаемого в [7–12] подхода заключается в использовании при формировании функционала (4) обобщенных макропеременных $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$, являющихся некоторыми агрегатами (функциями) координат состояния. В этой связи задача синтеза регуляторов на основе сопровождающего функционала (8) с применением агрегированных макропеременных называется (по аналогии с АКОР) задачей аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР). Агрегированные макропеременные $\psi(\mathbf{x})$ могут выбираться из разных соображений, связанных с желаемыми переходными и установившимися режимами движения объекта управления.

Используя скалярную функцию $\psi(\mathbf{x})$, сформулируем задачу АКАР: требуется найти закон управления $u(\psi) = u(\mathbf{x})$, который обеспечивал бы перевод изображающей точки из произвольного начального состояния \mathbf{x}_0 (для некоторой допустимой области) в окрестность многообразия $\psi(\mathbf{x}) = 0$ пространства фазовых координат (x_1, x_2, \dots, x_N) и дальнейшее ее движение вдоль этого многообразия к началу координат пространства состояний.

Уравнение экстремалей, доставляющих минимум функционалу (4), включает разновидности устойчивых и неустойчивых траекторий и имеет вид

$$m^2 \varphi^2(\psi) = c^2 \dot{\psi}^2(t). \quad (9)$$

Часть устойчивых экстремалей, удовлетворяющих (9), можно записать как дифференциальное уравнение

$$T \dot{\psi}(t) + \varphi(\psi) = 0, T = \frac{c}{m}. \quad (10)$$

Из полученного уравнения с учетом (7) в силу исходных уравнений объекта (6) получаем основное функциональное уравнение в методе АКАР:

$$T \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_N} u(\mathbf{x}) + T \sum_{k=1}^N \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}) + \varphi(\psi) = 0. \quad (11)$$

Запишем выражение (11) следующим образом:

$$u(\mathbf{x}) = - \left(\frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_N} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}) + \frac{\varphi(\psi)}{T} \right). \quad (12)$$

Здесь определяется множество допустимых законов управления $u(\mathbf{x})$, обеспечивающих перевод изображающей точки (ИТ) из произвольного начального состояния в окрестность многообразия $\psi(\mathbf{x}) = 0$. Законы управления (12) будут удерживать ИТ в этой окрестности при ее дальнейшем движении вдоль $\psi(\mathbf{x}) = 0$. Такое движение будет уже описываться системой дифференциальных уравнений (СДУ) размерности $N - 1$:

$$\dot{x}_{i\psi}(t) = f_i(x_{1\psi}, x_{2\psi}, \dots, x_{N-1\psi}), \quad i \in (1, N-1). \quad (13)$$

Для получения уравнений (13) следует из конечного уравнения $\psi(\mathbf{x}) = 0$ найти координату $x_N(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ и подставить ее в первые $N - 1$ уравнений (6).

Для нелинейных объектов высокой размерности используется совокупность последовательно вводимых инвариантных притягивающих многообразий (аттракторов). Вводя в рассмотрение промежуточные (фиктивные) управления на основе исходных многообразий, можно обеспечить последовательное понижение размерности (редукцию) исходной системы уравнений до заданного вида, обеспечивающего требуемую динамику регулирования. Оценим пара-

метры переходных процессов из общего решения функционального уравнения (10) при $\psi = \varphi(\Psi)$, являющегося в данном случае однородным дифференциальным уравнением с постоянным коэффициентом:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \psi(0, \mathbf{x}_0) \exp\left(-\int_0^t \frac{dt}{T}\right) = \psi(0, \mathbf{x}_0) \exp\left(-\frac{t}{T}\right). \quad (14)$$

Время сходимости функции от начального $\psi(0, \mathbf{x}_0)$ к конечному значению $\psi(t_k, \mathbf{x}_k) = 0,05\psi(0, \mathbf{x}_0)$ составит

$$t_\psi = T \ln\left(\frac{\psi_0(\mathbf{x}_0)}{\psi_k(\mathbf{x}_k)}\right) \approx 3T. \quad (15)$$

Оценка (15) приближенно определяет время попадания ИТ в окрестность многообразия $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$. Время движения ИТ к началу координат пространства состояний определяется решением уравнений (13). При нелинейных функциональных связях вида (10) (в том числе для векторных функциональных уравнений) оценка динамических характеристик выполняется методами математического (статистического) моделирования.

Данный подход к синтезу многокритериальных систем можно интерпретировать как построение такого управления, которое сначала переводит ИТ из произвольного начального состояния на некоторое, заранее выбранное, единственное многообразие $\psi(\mathbf{x}) = 0$, являющееся аттрактором, а затем обеспечивает устойчивое движение с соответствующей динамикой вдоль этого многообразия к началу координат пространства состояний. Иначе говоря, выполняется двухэтапная процедура движения ИТ: сначала происходит движение к выбранному многообразию, а затем к началу координат пространства состояний.

Указанный подход можно обобщить путем введения последовательной или параллельной совокупности притягивающих многообразий $\psi_j(\mathbf{x}) = 0, j \in (1, J), j < N$, понижающейся размерности в фазовом пространстве синтезируемых систем.

При этом для системы уравнений объекта

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i \in (1, p), \\ \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, x_2, \dots, x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, \quad j \in (p+1, N-1), \\ \dot{x}_N(t) &= f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) + u(t) \end{aligned} \quad (16)$$

агрегированные макропеременные первого этапа управления могут быть выбраны в виде

$$\psi_1(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \beta_{1k} x_k + \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) = 0. \quad (17)$$

Согласно (12) управление первого этапа, оптимальное по критерию

$$J_\Sigma = \int_0^\infty (m^2 \varphi_1^2(\psi_1) + c^2 \dot{\psi}_1^2(t)) dt, \quad (18)$$

будет иметь вид

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{\beta_N} \sum_{i=1}^p \left(\beta_{1i} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \right) f_i(\mathbf{x}) - \\ &- \frac{1}{\beta_{1N}} \sum_{i=p+1}^{N-1} \left(\beta_{1i} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \right) (f_j(\mathbf{x}) + a_{j+1}x_{j+1}) - \frac{1}{\beta_{1N}T} \varphi(\psi_1(\mathbf{x})) - f_N(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (19)$$

Управление (19) переводит ИТ на многообразиие $\psi_1(\mathbf{x}) = 0$, движение вдоль которого описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= f_i(x_1, \dots, x_N), \quad i \in (1, p), \\ \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, \quad j \in (p+1, N-2), \\ \dot{x}_{N-1}(t) &= f_{N-1}(x_1, \dots, x_{N-1}) - \frac{a_N}{\beta_{1N}} \sum_{k=1}^{N-1} \beta_{1k} x_k - \frac{a_n}{\beta_{1N}} \varphi_1(x_1, \dots, x_{N-1}).\end{aligned}\quad (20)$$

Обозначив $\beta_{1N}u_2(t) = a_N\varphi_1(x_1, \dots, x_{N-1})$, назовем $u_2(t)$ промежуточным (фиктивным) управлением, которое переводит ИТ на второе притягивающее многообразие:

$$\psi_2(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N-1} \beta_{2k} x_k + \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_{N-2}) = 0. \quad (21)$$

Выполняя последовательное введение многообразий меньшей размерности $\psi_j(\mathbf{x})$, $j \in (1, N-1)$, можно понизить порядок системы до заданной величины.

Процедура синтеза в соответствии с предложенным методом состоит в формировании закона управления $u_1(\mathbf{x})$ (19). При этом основной задачей является определение функции $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ и ее $N-1$ производных $\partial\varphi_1/\partial x_j$. Функция $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ может быть найдена в результате последовательного определения вспомогательных функций $\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_{N-m})$, входящих в соответствующие промежуточные управления $u_l(x_1, x_2, \dots, x_{N-l+1})$. Конкретно эта задача решается в обратной последовательности: сначала выбирается функция $\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_{N-m})$ исходя из условий асимптотической устойчивости и требования к качеству движения на заключительном m -м этапе, затем находится функция $\varphi_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_{N-m+1})$ и т. д. вплоть до функции, позволяющей завершить процедуру синтеза закона управления $u_l(x_1, x_2, \dots, x_{N-l+1})$.

Более подробно с теоретическими и прикладными аспектами синтеза оптимальных регуляторов многомерных нелинейных динамических систем методом АКАР можно ознакомиться в литературе [7–12].

2. Математическая модель исследуемого динамического объекта

Взаимное положение беспилотного летательного аппарата (БПЛА) и цели в некоторой неподвижной системе координат (СК) $OXYZ$ может быть задано тремя координатами: дальностью и двумя углами θ_2, φ_2 , определяющими наклон линии визирования (ЛВ) «ракета – цель». Изменение этих координат может быть описано с помощью кинематических уравнений относительно пространственного движения. Обычно кинематические уравнения составляются в измерительной СК $OX_2Y_2Z_2$, в которой осуществляется слежение бортового измерителя радиолокационной головки самонаведения (РГС) за целью. Возможно также измерение координат в неподвижной СК $OXYZ$ с последующим пересчетом в измерительную СК (ИСК). При отсутствии ошибок сопровождения цели или их малых значений ось OX_2 совпадает с ЛВ «БПЛА – цель». При движении БПЛА с ускорением \mathbf{W}_p и цели с ускорением \mathbf{W}_y происходит изменение вектора дальнос-

ти \mathbf{D} и вращение ИСК с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$. В векторной форме относительное движение БПЛА (материальной точки) и цели определяется уравнением

$$\ddot{\mathbf{D}} = \mathbf{W}_y - \mathbf{W}_p, \quad (22)$$

где $\mathbf{W}_y = (W_{xy} \ W_{yy} \ W_{zy})^T$, $\mathbf{W}_p = (W_{xp} \ W_{yp} \ W_{zp})^T$ – вектор линейных ускорений цели и БПЛА в СК, связанной с ЛВ «БПЛА – цель».

Применяя правила дифференцирования векторов, запишем скалярные кинематические уравнения относительного движения БПЛА и цели:

$$\begin{aligned} \ddot{D} - D(\omega_{y2}^2 + \omega_{z2}^2) &= W_{xy} - W_{xp}, \quad D\dot{\omega}_{z2} + \dot{D}\omega_{z2} + D\omega_{x2}\omega_{y2} = W_{yy} - W_{yp}, \\ -D\dot{\omega}_{y2} - \dot{D}\omega_{y2} + D\omega_{x2}\omega_{z2} &= W_{zy} - W_{zp}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\boldsymbol{\omega}_2 = (\omega_{x2} \ \omega_{y2} \ \omega_{z2})^T$ – компоненты вектора угловой скорости вращения (УСВ) ЛВ «БПЛА – цель» в системе координат, связанной с ЛВ.

В случае использования информации от бортового измерителя БПЛА полученные уравнения можно дополнить кинематическими соотношениями, связывающими относительные угловые координаты и угловые скорости вращения цели в ИСК и скоростной СК (ССК).

Кинематические соотношения, определяющие связь между углами и проекциями УСВ произвольной СК на оси данной СК, имеют в общем случае вид

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= \omega_{y2} \sin(\gamma_2) + \omega_{z2} \cos(\gamma_2), \\ \dot{\phi}_2 &= \frac{1}{\cos(\theta_2)} (\omega_{y2} \cos(\gamma_2) - \omega_{z2} \sin(\gamma_2)), \\ \dot{\gamma}_2 &= \omega_{x2} - \operatorname{tg}(\theta_2) (\omega_{y2} \cos(\gamma_2) - \omega_{z2} \sin(\gamma_2)), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\Theta_2 = (\theta_2, \phi_2, \gamma_2)$ – углы ориентации ЛВ «БПЛА – цель» в декартовой СК, связанной с точкой расположения радиолокационной станции наведения (РЛСН) БПЛА.

При отсутствии управления положением бортового измерителя по крену и равенстве $\gamma_2 = 0$ компоненту вектора УСВ ω_{x2} удобно выразить через составляющие вектора ω_{y2} и ω_{z2} с использованием упрощенных кинематических соотношений:

$$\omega_{x2} = \dot{\phi}_2 \sin \theta_2, \quad \omega_{y2} = \dot{\phi}_2 \cos \theta_2, \quad \omega_{z2} = \dot{\theta}_2. \quad (25)$$

Отсюда следует, что

$$\omega_{x2} = \omega_{y2} \operatorname{tg} \theta_2. \quad (26)$$

Подставляя выражения (25) и (26) в (23), а также формализуя динамические свойства объекта управления путем введения дифференциального уравнения первого порядка, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих возмущенное движение цели относительно БПЛА:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= \omega_{z2}, \quad \dot{\phi}_2 = \frac{\omega_{y2}}{\cos(\theta_2)}, \quad \dot{D} = V, \\ \dot{V} &= (W_{xy} - W_{xp}) + D(\omega_{y2}^2 + \omega_{z2}^2), \\ \dot{\omega}_{z2} &= \frac{(W_{yy} - W_{yp}) - 2V\omega_{z2}}{D} - \omega_{y2}^2 \operatorname{tg}(\theta_2), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{y2} &= \frac{-(W_{zц} - W_{zp}) - 2V\omega_{y2}}{D} + \omega_{y2}\omega_{z2} \operatorname{tg}(\theta_2), \\ \dot{W}_{y2} &= \alpha_p (U_y - W_{y2}), \quad \dot{W}_{z2} = \alpha_p (U_z - W_{z2}),\end{aligned}\quad (27)$$

где $\alpha_p = \frac{1}{T_p}$ – коэффициент, определяющий инерционные свойства неизменной части объекта управления; T_p – постоянная времени звена, аппроксимирующего динамические свойства БПЛА; U_y, U_z – сигналы управления на выходе оптимального регулятора.

Влияние силы тяжести на величину УСВ ЛВ учитывать не будем, полагая, что ее влияние полностью компенсировано системой стабилизации БПЛА с использованием известных алгоритмов [1–6].

В целях упрощения процедуры синтеза исключим из выражения (27) соотношения для относительной дальности D и скорости сближения V :

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_2 &= \omega_{z2}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\omega_{y2}}{\cos(\theta_2)}, \quad \dot{\omega}_{z2} = \frac{W_{yp}^* - 2V\omega_{z2}}{D} - \omega_{y2}^2 \operatorname{tg}(\theta_2), \\ \dot{\omega}_{y2} &= \frac{-W_{zp}^* - 2V\omega_{y2}}{D} + \omega_{y2}\omega_{z2} \operatorname{tg}(\theta_2), \quad \dot{W}_{y2} = \alpha_p (U_y - W_{y2}), \quad \dot{W}_{z2} = \alpha_p (U_z - W_{z2}),\end{aligned}\quad (28)$$

где $W_{yp}^* = (\hat{W}_{yц} - W_{yp})$, $W_{zp}^* = (\hat{W}_{zц} - W_{zp})$ – относительные управляющие ускорения БПЛА; $\hat{W}_{yц}$, $\hat{W}_{zц}$ – оценки нормальных ускорений цели, полученные в фильтре оценивания параметров движения цели. Полученные уравнения являются исходными для синтеза оптимального регулятора методом АКАР. Дальнейший учет оценок абсолютных нормальных ускорений БПЛА можно выполнить через указанную выше подстановку.

При управлении положением антенны бортового измерительного устройства, например антенны бортовой РГС, по крену систему уравнений (27) следует дополнить кинематическими соотношениями для относительных угловых координат (УК) цели в СК бортовой РГС.

Задача синтеза оптимального регулятора для системы (28) заключается в том, чтобы найти аналитические выражения (законы управления) $U_y = f_y(\theta_2, \varphi_2, \omega_{y2}, \omega_{z2}, W_{y2}, W_{z2})$ и $U_z = f_z(\theta_2, \varphi_2, \omega_{y2}, \omega_{z2}, W_{y2}, W_{z2})$, обеспечивающие минимальную величину УСВ «БПЛА – цель» ω_{y2}, ω_{z2} в процессе наведения, а также равенство их нулю в точке встречи БПЛА и цели.

Минимизация абсолютной величины УСВ «БПЛА – цель» эквивалентна минимизации мгновенного промаха и нормальных ускорений БПЛА в точке встречи. Это следует из соотношения для оценки мгновенного промаха в ССК:

$$\mathbf{h} = (h_x \ h_y \ h_z)^T = \frac{D}{|\dot{\mathbf{D}}|} [\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{D}], \quad \boldsymbol{\omega}_2 = M_e(\Theta_2) \frac{[\mathbf{D} \times \dot{\mathbf{D}}]}{\mathbf{D}^T \mathbf{D}}, \quad \mathbf{D} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|, \quad \dot{\mathbf{D}} = |\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_0|, \quad (29)$$

где $\mathbf{h} = (h_x \ h_y \ h_z)^T$ – компоненты вектора мгновенного промаха \mathbf{h} ; \mathbf{r}_0 – радиус-вектор цели относительно точки наблюдения (РЛСН); \mathbf{r}_1 – радиус-вектор БПЛА относительно точки наблюдения (РЛСН); $M_e(\Theta)$ – матрица полного поворота Эйлера – Крылова текущей СК относительно базовой СК на углы $\Theta = (\theta, \varphi, \gamma)^T$ (матрица направляющих косинусов).

Выражение для оценки нормальных ускорений БПЛА в проекциях на оси ИСК имеет вид

$$\mathbf{W}_0 = \dot{\mathbf{V}} + [\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{V}], \quad \mathbf{W}_2 = M_e(\boldsymbol{\Theta}_2) M_e(\boldsymbol{\Theta}_0)^T \mathbf{W}_0, \quad (30)$$

где $\mathbf{V} = (V \ 0 \ 0)^T$ – вектор скорости БПЛА в ССК; V – модуль вектора скорости БПЛА; $\boldsymbol{\omega}_0 = (\omega_{x0} \ \omega_{y0} \ \omega_{z0})^T$ – вектор УСВ ССК; $\boldsymbol{\Theta}_0 = (\theta_0, \varphi_0, \gamma_0)$ – углы ориентации вектора скорости БПЛА в декартовой СК; $\mathbf{W}_0 = (W_{x0} \ W_{y0} \ W_{z0})^T$ – вектор нормальных ускорений БПЛА в ССК; $\mathbf{W}_2 = (W_{x2} \ W_{y2} \ W_{z2})^T$ – вектор нормальных ускорений БПЛА в СК ЛВ «БПЛА – цель».

Будем полагать, что нормальные ускорения объекта управления ограничены величиной располагаемых нормальных ускорений, которые в общем случае зависят от реализуемой траектории наведения, времени полета БПЛА, ошибок измерения координат цели, тяги двигателя БПЛА и поэтому могут иметь нестационарный и случайный характер.

Закон ограничения нормальных ускорений БПЛА запишем следующим образом:

$$\bar{W}_{yp} = k_w W_{\max}(t) \operatorname{th} \left(\frac{W_{yp}}{W_{\max}(t)} \right), \quad \bar{W}_{zp} = k_w W_{\max}(t) \operatorname{th} \left(\frac{W_{zp}}{W_{\max}(t)} \right), \quad k_w = (1,05 \dots 1,15), \quad (31)$$

где $W_{\max}(t)$ – известные располагаемые ускорения БПЛА в процессе наведения на цель; $\bar{W}_{yp}, \bar{W}_{zp}$ – ограниченные нормальные ускорения БПЛА. Ограничения на угловое положение БПЛА относительно линии визирования цели (углы упреждения) в данной задаче не накладываются.

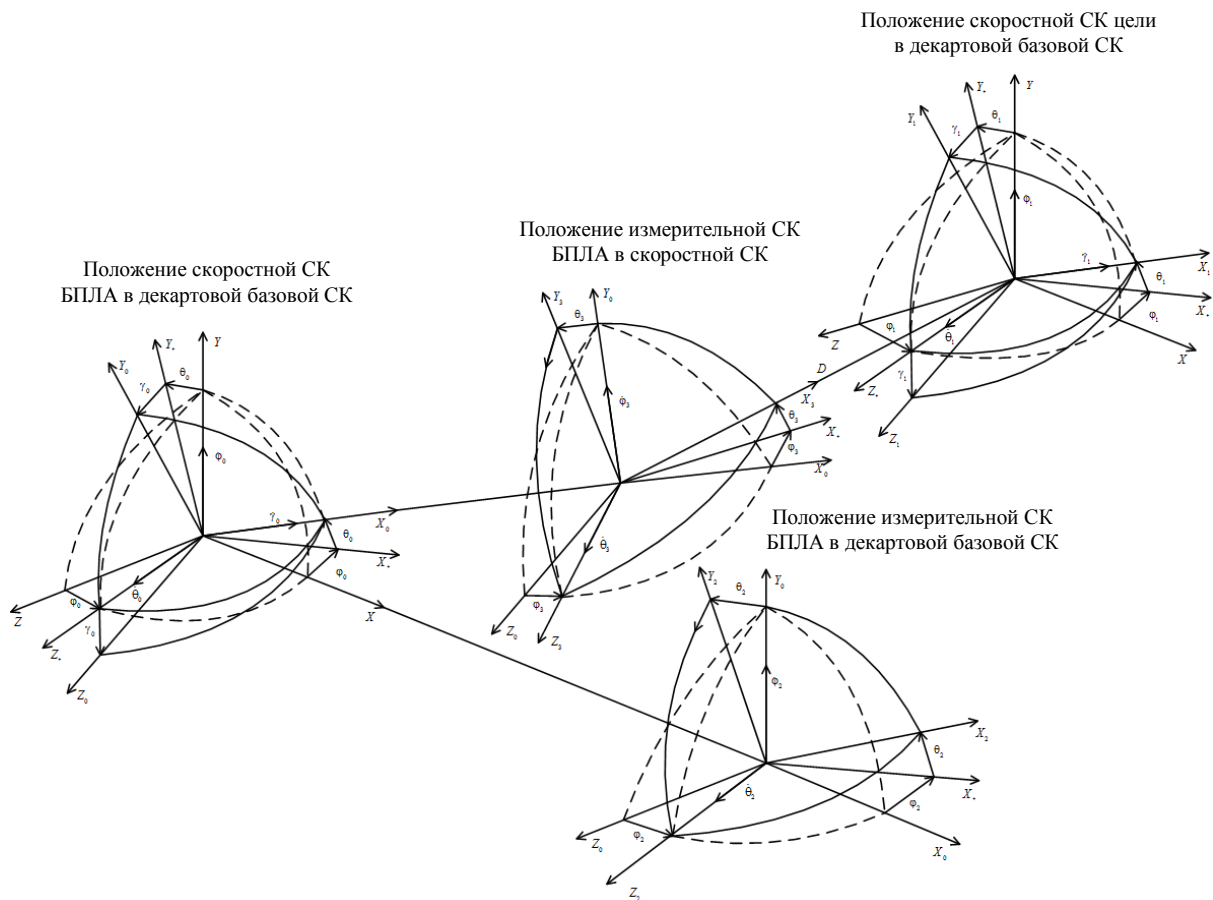


Рис. 1. Взаимосвязь СК, используемых для синтеза закона управления и моделирования процесса наведения БПЛА на маневрирующую цель

На рис. 1 показано взаимное расположение СК, используемых при моделировании абсолютного и относительного движения БПЛА и цели, а также при аналитическом синтезе закона управления:

– ССК БПЛА повернута на скоростные углы тангажа, рыскания и крена $\Theta_0 = (\theta_0, \varphi_0, \gamma_0)^T$ относительно базовой декартовой (неподвижной земной) СК;

– ССК цели повернута на скоростные углы тангажа, рыскания и крена $\Theta_1 = (\theta_1, \varphi_1, \gamma_1)^T$ относительно базовой декартовой (неподвижной земной) СК;

– абсолютная ИСК БПЛА повернута на углы $\Theta_2 = (\theta_2, \varphi_2, 0)^T$ относительно базовой декартовой (неподвижной земной) СК;

– относительная ИСК БПЛА связана с координатными осями бортовой РГС, ориентированной при отсутствии ошибок сопровождения в направлении на цель и характеризуемой углами поворота ЛВ «БПЛА – цель» $\Theta_3 = (\theta_3, \varphi_3, 0)^T$ в ССК (для аналитического конструирования не используется).

Рассмотрим процедуру аналитического синтеза оптимального регулятора для терминальной задачи наведения БПЛА на движущуюся цель и прикладные аспекты применения СОФ для построения частных критериев качества функционирования нелинейных многомерных объектов управления, отражающих заданные инженерные требования к динамическим свойствам синтезируемой системы управления в различных режимах работы.

3. Аналитический синтез оптимального регулятора в задаче наведения сверхзвукового БПЛА на маневрирующую цель

В уравнения возмущенного движения объекта (БПЛА) (28) входят независимые сигналы управления U_y, U_z , число которых меньше числа переменных состояний динамической системы. Ставится задача перевода объекта из произвольного состояния $\mathbf{x}_0(t_0) = (\theta_2 \ \varphi_2 \ \omega_{z2} \ \omega_{y2} \ W_{y2} \ W_{z2})^T$ в момент времени $t = t_0$ в некоторой допустимой области пространства $\mathbf{x} \in X$ в конечное состояние $\mathbf{x}_k(t_k) = (\theta_2(t_k) \ \varphi_2(t_k) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ фазового пространства за время $t_k < T_f(t)$ при выполнении условия $\tau(t) = \frac{D(t)}{\dot{D}(t)} = 0$, где $T_f(t)$ – максимально допустимое (нефиксированное в общем случае) время перевода объекта в конечное состояние.

При этом необходимо обеспечить минимум оптимизирующего функционала

$$J_0 = \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^1 (\dot{\psi}_k^2(t) T_k^2(t) + \psi_k^2(t)) \right) dt, \quad (32)$$

а также асимптотическую устойчивость движения БПЛА на траектории. Будем полагать каналы управления идентичными: $T_0(t) = T_1(t) = T_\psi(t)$. Тогда уравнения экстремалей, доставляющих минимум функционалу (32), будут следующими:

$$T_\psi(t) \dot{\psi}_0(t) + \psi_0(t) = 0, \quad T_\psi(t) \dot{\psi}_1(t) + \psi_1(t) = 0, \quad (33)$$

где $T_\psi(t)$ – время, определяющее попадание ИГ на пространственную линию пересечения инвариантных многообразий $\psi_0(t) \cap \psi_1(t)$ или $\psi_0(t) + \psi_1(t) = 0$.

Введем кинематические инварианты, которые наиболее полно соответствуют терминальной задаче с неопределенным временем – задаче минимизации нормальных ускорений в процессе наведения и в точке встречи БПЛА с целью:

$$\omega_{y2} = 0, \omega_{z2} = 0. \quad (34)$$

На первом этапе синтеза введем полуопределенные макропеременные вида

$$\Psi_1(t) = W_{zp} + f_y(\omega_{y2}, \omega_{z2}, \theta_2, \varphi_2), \quad \Psi_2(t) = W_{zp} + f_z(\omega_{y2}, \omega_{z2}, \theta_2, \varphi_2) \quad (35)$$

и подставим их в функциональные уравнения (33). В результате получим

$$\begin{pmatrix} \alpha_p (U_z - W_{zp}) + \left(\frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \omega_{y2}} + \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \omega_{z2}} + \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \theta_2} + \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \varphi_2} \right) \\ \alpha_p (U_y - W_{yp}) + \left(\frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \omega_{y2}} + \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \omega_{z2}} + \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \theta_2} + \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \varphi_2} \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_p (W_{zp} + f_z(\mathbf{x})) \\ \alpha_p (W_{yp} + f_y(\mathbf{x})) \end{pmatrix} = 0. \quad (36)$$

Выражая соответствующие сигналы управления, имеем

$$\begin{pmatrix} U_z \\ U_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{zp} \left(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_p} \right) - \frac{h_z(\mathbf{x})}{\alpha_p} + \frac{\alpha_0}{\alpha_p} (W_{yp}^* + f_z(\mathbf{x})) \\ W_{yp} \left(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_p} \right) + \frac{h_y(\mathbf{x})}{\alpha_p} + \frac{\alpha_0}{\alpha_p} (W_{zp}^* + f_y(\mathbf{x})) \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$h_z(\mathbf{x}) = \dot{\omega}_{y2} \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \omega_{y2}} + \dot{\omega}_{z2} \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \omega_{z2}} + \dot{\theta}_2 \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \theta_2} + \dot{\varphi}_2 \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \varphi_2},$$

$$h_y(\mathbf{x}) = \dot{\omega}_{y2} \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \omega_{y2}} + \dot{\omega}_{z2} \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \omega_{z2}} + \dot{\theta}_2 \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \theta_2} + \dot{\varphi}_2 \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \varphi_2} + \alpha_0 (W_{zp}^* + f_y(\mathbf{x})).$$

Запишем редуцированную систему уравнений, подставив вместо W_{yp}^* , W_{zp}^* значения, полученные из условия $\Psi_1(\mathbf{x}) = 0, \Psi_2(\mathbf{x}) = 0$:

$$W_{yp}^* = -f_z(\mathbf{x}), W_{zp}^* = -f_y(\mathbf{x}). \quad (38)$$

В результате

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= \omega_{z2}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\omega_{y2}}{\cos(\theta_2)}, \\ \dot{\omega}_{z2} &= \frac{-2V\omega_{z2} - f_z(\omega_{y2}, \omega_{z2}, \theta_2, \varphi_2)}{D} - \omega_{y2}^2 \operatorname{tg}(\theta_2), \\ \dot{\omega}_{y2} &= \frac{-2V\omega_{y2} + f_y(\omega_{y2}, \omega_{z2}, \theta_2, \varphi_2)}{D} + \omega_{y2}\omega_{z2} \operatorname{tg}(\theta_2). \end{aligned} \quad (39)$$

Выбирая должным образом функции $f_y(\mathbf{x}), f_z(\mathbf{x})$, которые для редуцированной системы имеют смысл эквивалентных внутренних управлений, можно задать требуемые динамические свойства синтезированной системы исходя из первоначально заданных кинематических инвариантов и критериев качества. Продолжим процедуру синтеза и выберем в качестве опорной (эталонной) системы уравнений соотношения вида

$$\dot{\theta}_{\psi 2} = \omega_{z\psi 2}, \quad \dot{\phi}_{\psi 2} = \frac{\omega_{y\psi 2}}{\cos(\theta_{\psi 2})},$$

$$\dot{\omega}_{z\psi 2} = -\mu_z(t)(\omega_{z\psi 2} + \alpha_z \omega_{z\psi 2}^3), \quad (40)$$

$$\dot{\omega}_{y\psi 2} = -\mu_y(t)(\omega_{y\psi 2} + \alpha_y \omega_{y\psi 2}^3),$$

$$\mu_y(t) = \frac{k_{\alpha y}}{\tau(t)}, \quad \mu_z(t) = \frac{k_{\alpha z}}{\tau(t)}, \quad \tau(t) = \frac{\dot{D}(t)}{D(t)} = \frac{V(t)}{D(t)},$$

где α_y, α_z – переменные в общем случае коэффициенты при кубических слагаемых по соответствующей координате; $\mu_y(t), \mu_z(t)$ – коэффициенты сходимости уравнений для $\omega_{y\psi 2}(t), \omega_{z\psi 2}(t)$. При известных оценках $W(t) = \ddot{D}(t)$ уравнения для $\tau(t)$ можно уточнить, представив

$$\mu(t) = \mu_0(t) + \tau(t)\dot{\mu}_0(t) = k_\alpha \left(\frac{1}{\tau(t)} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tau(t)} \right) \right). \quad (41)$$

Тогда общее выражение для каждого из коэффициентов сходимости примет вид

$$\mu_z(t) = k_\alpha \left(\frac{V(t)}{D(t)} + \frac{D(t)}{V(t)} \left(\frac{W(t)V(t) - V^2(t)}{D^2(t)} \right) \right). \quad (42)$$

Замкнутая система (40) асимптотически устойчива при выполнении условий $(\alpha_y, \alpha_z) > 0$, $(\mu_y(t), \mu_z(t)) > 0$ и будет иметь аperiодический характер переходных процессов при малых отклонениях от притягивающих многообразий Ψ_1 и Ψ_2 .

Выбор приведенного типа уравнений обусловлен необходимостью снижения времени перехода ИТ на устойчивые траектории (инвариантные многообразия) при больших значениях УСВ ЛВ.

Приравнивая правые части уравнений (39) и (40), получим выражения для неопределенных функций $f_y(\mathbf{x}), f_z(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} f_y(\mathbf{x}) &= D(\mu_z(\omega_{z2} + \alpha_z \omega_{z2}^2) - \omega_{y2}^2 \operatorname{tg}(\theta_2)) - 2V\omega_{z2}, \\ f_z(\mathbf{x}) &= -D(\mu_y(\omega_{y2} + \alpha_y \omega_{y2}^2) - \omega_{y2}^2 \omega_{z2} \operatorname{tg}(\theta_2)) + 2V\omega_{y2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Подставляя (43) в (37), получим выражения для двухканального управления:

$$U(\mathbf{x}) = \left(1 - \frac{\alpha_\psi}{\alpha_\rho} \right) (W_{yp} \quad W_{zp})^T - \frac{\Gamma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{v} + \alpha_\psi \Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha})}{\alpha_\rho},$$

$$\Gamma_{11} = D\omega_{y2}^2 (\operatorname{tg}^2(\theta_2) + 1),$$

$$\Gamma_{13} = D\mu_z (3\alpha_z \omega_{z2}^2 + 1) - 2V,$$

$$\Gamma_{14} = -2D\omega_{y2} \operatorname{tg}(\theta_2),$$

$$\Gamma_{21} = D\omega_{y2} \omega_{z2} (\operatorname{tg}^2(\theta_2) + 1), \quad (44)$$

$$\Gamma_{23} = -2D\omega_{y2} \operatorname{tg}(\theta_2),$$

$$\Gamma_{24} = 2V - D(\mu_y (3\alpha_y \omega_{y2}^2 + 1) + \omega_{z2} \operatorname{tg}(\theta_2)),$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{22} = 0,$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} D(\mu_z (\omega_{z2} + \alpha_z \omega_{z2}^2) - \omega_{y2}^2 \operatorname{tg}(\theta_2)) - 2V\omega_{z2} \\ D(\mu_y (\omega_{y2} + \alpha_y \omega_{y2}^2) - \omega_{y2} \omega_{z2} \operatorname{tg}(\theta_2)) + 2V\omega_{y2} \end{pmatrix},$$

где $\Gamma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha})$ – матричная функция векторного аргумента размером 2×3 ; $\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha})$ – векторная функция векторного аргумента размерностью 2×1 ; $\alpha_\psi = T_\psi(t)$ – коэффициент сходимости для функциональных уравнений; $\mathbf{x} = (D \dot{\theta}_2 \ \varphi_2 \ \omega_{z2} \ \omega_{y2})^T$, $\mathbf{v} = (\dot{D} \ \ddot{D} \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\varphi}_2 \ \dot{\omega}_{z2} \ \dot{\omega}_{y2})^T$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_y \ \mu_z)^T$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_y \ \alpha_z)^T$ – вектор фазовых координат, вектор первых производных фазовых координат, а также векторы переменных коэффициентов для функциональных уравнений соответственно.

Полученный метод наведения учитывает взаимные перекрестные связи между каналами управления, нелинейный и многомерный характер изменения координат, а также динамические свойства объекта управления (запаздывание в контуре наведения). Желаемая динамика переходных процессов в рамках применяемых инвариантных многообразий задается выбором векторных коэффициентов $\alpha_\psi(t)$, $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\mu}(t)$. В случае, когда время переходных процессов значительно меньше интервала монотонно изменяющихся параметров, нестационарным характером коэффициентов функционального уравнения в первом приближении (на этапе предварительной оценки характеристик) можно пренебречь.

Переменные, входящие в векторы $\mathbf{x} = (D \dot{\theta}_2 \ \varphi_2 \ \omega_{z2} \ \omega_{y2})^T$ и $\mathbf{v} = (\dot{D} \ \ddot{D} \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\varphi}_2 \ \dot{\omega}_{z2} \ \dot{\omega}_{y2})^T$, оцениваются с использованием линейного или расширенного фильтра Калмана – Бьюси, реализованного на основе кинематических уравнений (уравнений динамики) вида (27) или аналогичных уравнений, позволяющих оценить необходимые переменные состояния (фазовые координаты).

4. Математическое моделирование процесса наведения БПЛА на маневрирующую аэродинамическую цель

Математическое моделирование выполнялось в среде инженерного и научного моделирования MATHCAD 15, представляющего собой систему компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированных на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением. Для моделирования использова-

лись три системы кинематических уравнений: уравнения динамики относительного перемещения БПЛА и цели (27), а также уравнения абсолютного перемещения относительно РЛСН:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_j &= \omega_{zj}, \quad \dot{\beta}_j = \frac{\omega_{yj}}{\cos(\varepsilon_j)}, \quad \dot{\rho}_j = V_j, \\ \dot{v}_j &= W_{yj} + \rho_j (\omega_{yj}^2 + \omega_{zj}^2), \\ \dot{\omega}_{zj} &= \frac{W_{yj} - 2V_j \omega_{zj}}{\rho_j} - \omega_{yj}^2 \operatorname{tg}(\varepsilon_j), \quad \dot{\omega}_{yj} = \frac{-W_{zj} - 2V_j \omega_{yj}}{\rho_j} + \omega_{yj} \omega_{zj} \operatorname{tg}(\varepsilon_j), \\ \dot{W}_{yj} &= \alpha_{yj} (w_{yj} - W_{yj}), \quad \dot{W}_{zj} = \alpha_{zj} (w_{zj} - W_{zj}),\end{aligned}\tag{45}$$

где $\varepsilon_j, \beta_j, \rho_j$ – угол места, азимут и радиальная дальность БПЛА (цели) относительно наземной радиолокационной станции (РЛС); V_j – радиальная скорость БПЛА (цели); ω_{yj}, ω_{zj} – УСВ вращения ЛВ «РЛС – БПЛА» («РЛС – цель») в проекциях на оси измерительной СК, продольная ось которой связана с соответствующей ЛВ; W_{yj}, W_{zj} – нормальные ускорения БПЛА (цели) в проекциях на оси измерительной СК; w_{yj}, w_{zj} – нормальные ускорения БПЛА (цели) на входе фильтра, моделирующего запаздывание в контуре управления БПЛА (динамику маневра цели); $j \in (0, 1)$ – подстрочный индекс переменных состояний: 0 – БПЛА, 1 – цель.

Для моделирования задавались следующие параметры движения цели:

- начальные декартовы координаты цели и пусковой установки БПЛА относительно наземной РЛС;
- начальные производные декартовых координат цели относительно наземной РЛС и закон изменения продольного ускорения БПЛА;
- величина и время действия нормальных ускорений цели при совершении маневра уклонения от БПЛА;
- переменные и постоянные коэффициенты, определяющие характеристики закона управления БПЛА.

Для сравнительного анализа и предварительной оценки эффективности разработанных алгоритмов использовался модифицированный метод пропорциональной навигации, синтезированный по комбинированному линейному критерию минимума среднеквадратического отклонения (СКО) угловой скорости вращения ω_{y2}, ω_{z2} и нормальных ускорений [3–5]:

$$I = M \left\{ \mathbf{y}(t_k)^T \mathbf{S}(t_k) \mathbf{y}(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} U_y^2(t) dt \right\},\tag{46}$$

где $\mathbf{y} = (\omega_{z2} \ W_{y2})^T$ – вектор переменных состояний, используемый в одномерной задаче синтеза оптимального управления; $\mathbf{S}(t_k)$ – матрица весовых (штрафных) коэффициентов для фазовых координат в конечный момент времени; $M(x)$ – операция вычисления математического ожидания величины x .

Для описания динамики использовалась линеаризованная система кинематических уравнений относительного движения БПЛА без учета перекрестных связей между каналами управления:

$$\dot{\omega}_{z2} = \frac{(W_{yч} - U_y) - 2V\omega_{z2}}{D}, \quad \dot{W}_{yч} = \alpha_u (\xi_y - W_{yч}), \quad (47)$$

где α_u – величина, пропорциональная полосе пропускания формирующего фильтра нормальных ускорений цели; ξ_y – отсчеты нормального белого шума с нулевым средним и известной дисперсией на входе формирующего фильтра нормальных ускорений цели.

Результатом аналитического синтеза является соотношение для расчета нормальных ускорений БПЛА при наведении на маневрирующую цель согласно системе уравнений (47), удовлетворяющих критерию (46):

$$U_y = K_N \left(\omega_{z2} |V| + \frac{\exp(-\alpha_u \tau(t)) + \alpha_u (\tau(t) - 1) W_{yч}}{\alpha_u^2 \tau(t)} \right), \quad (48)$$

где $\tau(t)$ – текущая оценка времени, оставшегося до встречи БПЛА с целью; $K_N = 3$ – постоянный навигационный коэффициент.

При использовании разложения экспоненциальной функции в степенной ряд из трех слагаемых выражение (48) упрощается. В этом случае точность вычислений требуемого ускорения БПЛА будет увеличиваться по мере сближения с целью:

$$U_y = (K_N \omega_{z2} |V| + 0,5 (K_N - \alpha_u \tau(t)) W_{yч}). \quad (49)$$

Как показывают результаты моделирования, дополнительное повышение точности наведения БПЛА на цель можно получить, используя вместо фиксированного навигационного коэффициента переменный коэффициент вида

$$K_N(t) = k_0 + k_1 \left(1 - \frac{\tau(t)}{\tau_0} \right), \quad (50)$$

где τ_0 – время, оставшееся до встречи с целью, зафиксированное в момент старта БПЛА; $k_0 = (2...3)$, $k_1 = (3...4)$. Статистический характер переменных при сравнительном анализе методов наведения учитывался путем введения аддитивного узкополосного нормального шума для дальности, радиальной скорости, углов визирования цели и угловых скоростей вращения ЛВ. Сигналы компенсации продольного ускорения БПЛА не вводились. Весовая компонента нормального ускорения при моделировании не учитывалась. Использовался переменный навигационный коэффициент $K_N(t)$ в уравнении (49). Для моделирования в качестве исходных данных использовались:

– радиус-вектор начальных координат БПЛА $\mathbf{r}_0 = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T$ (точка старта относительно наземной РЛС);

– радиус-вектор начальных координат цели $\mathbf{r}_1 = (x_1 \ y_1 \ z_1)^T$ и его первых производных $\mathbf{v}_1 = (\dot{x}_1 \ \dot{y}_1 \ \dot{z}_1)^T$;

– нормальные ускорения маневрирующей цели $\mathbf{W}_1 = (W_{x1} \ W_{y1} \ W_{z1})^T$ в ИСК;

– вектор СКО флуктуаций аддитивного узкополосного шума измеренных относительных координат цели (дальности, скорости, углов и угловых скоростей),

$$\sigma_v = (\sigma_{D_2} \ \sigma_{V_2} \ \sigma_{\theta_2} \ \sigma_{\varphi_2} \ \sigma_{\omega_z} \ \sigma_{\omega_y})^T ;$$

– шаг интегрирования $\delta t = 0,01$ с и время моделирования $t_{\phi} = 30$ с.

На рис. 2 и 3 представлены результаты математического моделирования процесса наведения БПЛА на маневрирующую цель с использованием классического модифицированного метода пропорциональной навигации (МПН) и вновь разработанного метода наведения.

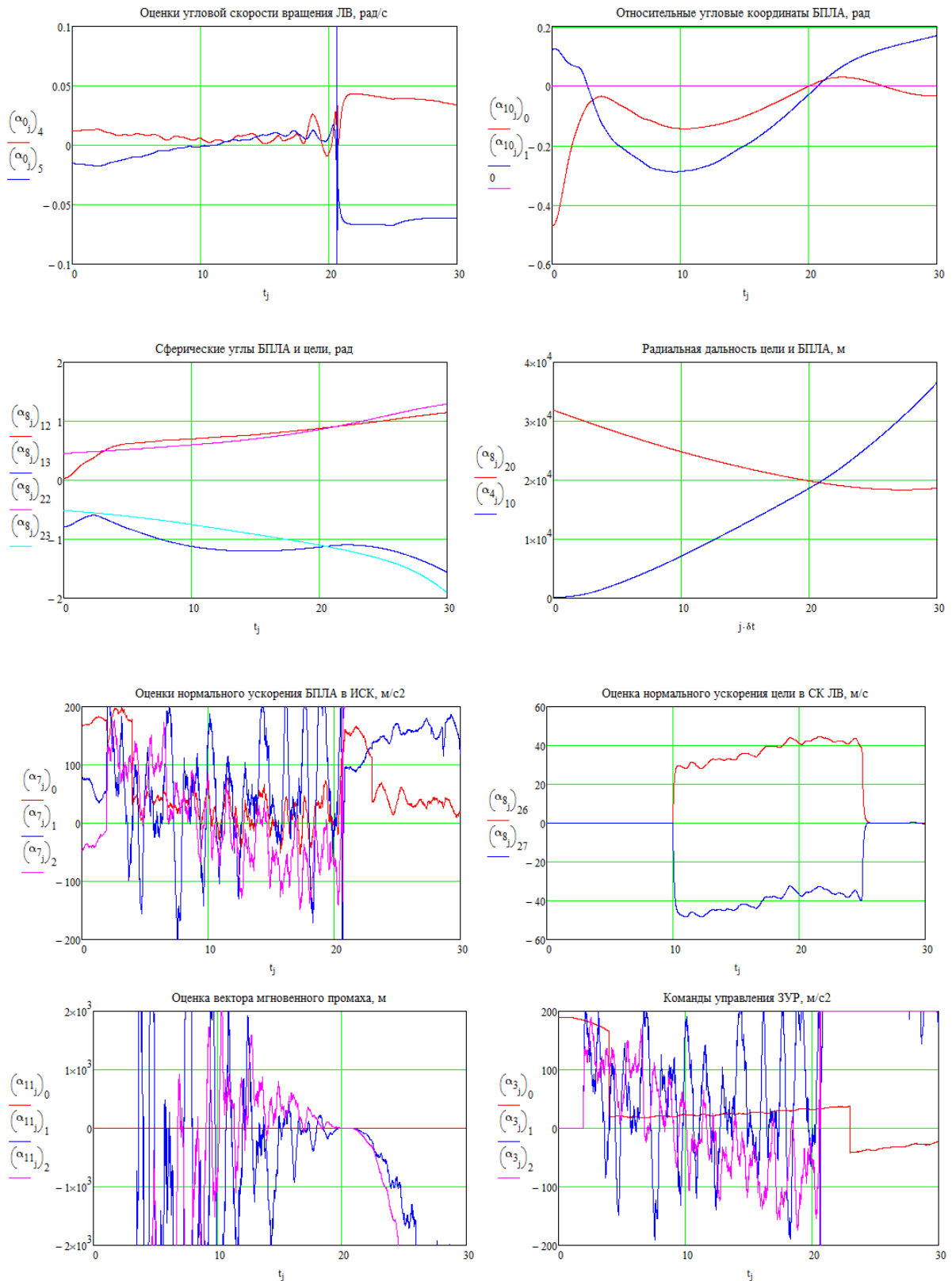


Рис. 2. Зависимости параметров, характеризующих количественные показатели процесса наведения БПЛА для классического модифицированного МПН

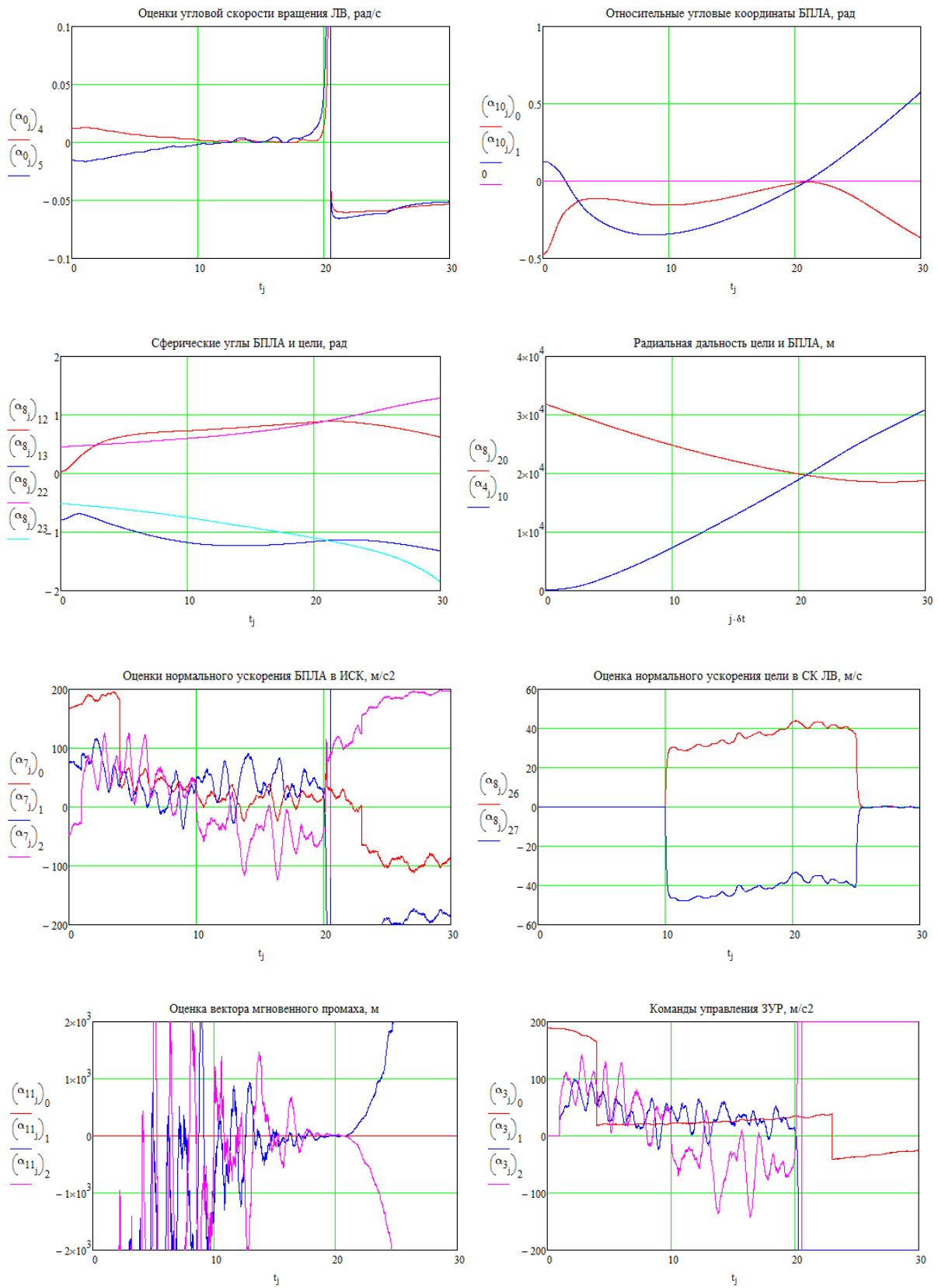


Рис. 3. Зависимости параметров, характеризующих количественные показатели процесса наведения БПЛА для вновь разработанного метода наведения

Для моделирования были выбраны значения $\mathbf{r}_1 = (25000 \ 14000 \ 14000)^T$, $\mathbf{v}_1 = (1000 \ 0 \ 0)^T$, $\mathbf{W}_1 = (0 \ \pm 50 \ \pm 25)^T$, $\mathbf{r}_0 = (100 \ 5 \ 100)^T$, $\sigma_v = (5,0 \ 2,0 \ 0,05 \ 0,05 \ 0,005 \ 0,005)^T$.

Анализ результатов моделирования позволяет сделать следующие выводы:

– величины мгновенных промахов БПЛА в точке встречи с целью для сравниваемых методов наведения заметно отличаются друг от друга (мгновенный промах для вновь разработанного метода наведения на 30–50 % меньше, чем для модифицированного МПН);

– для вновь разработанного МПН среднее значение и СКО промаха составляют $m_1 = (m_{hy} \ m_{hz})^T = (2,1 \ 3,9)^T$, $\sigma_1 = (\sigma_{hy} \ \sigma_{hz})^T = (4,5 \ 2,6)^T$ соответственно;

– для модифицированного МПН оценки точности наведения (среднее значение и СКО промаха) составляют $m_2 = (4,7 \ 5,2)^T$, $\sigma_2 = (5,8 \ 7,4)^T$ соответственно;

– величина флукуационных перегрузок в процессе наведения для классического МПН существенно выше и достигает уровня ограничения 200 м/с² (для вновь разработанного метода наведения – не более 100–120 м/с²), что влечет за собой снижение контурного коэффициента усиления и, как следствие, увеличение флукуационной ошибки наведения, переход в нелинейный режим работы и рост мгновенного промаха;

– в классическом модифицированном МПН за 3–5 с до точки встречи наблюдается рост низкочастотных квазигармонических колебаний УСВ ЛВ, что свидетельствует о снижении запасов устойчивости по фазе контура наведения и обусловлено отсутствием учета запаздывания (экстраполяции) координат и параметров относительного движения в регуляторе объекта управления при больших угловых перемещениях цели относительно БПЛА на малых дальностях (непосредственно перед точкой встречи).

Заключение

Выполнен аналитический синтез оптимального метода управления применительно к терминальной задаче наведения нелинейного многомерного многосвязного объекта (сверхзвукового БПЛА) на скоростную маневрирующую цель.

Основываясь на результатах статистического моделирования, показаны преимущества метода синтеза АКАР применительно к задаче выбора оптимального закона наведения управляемого объекта на движущуюся цель при наличии узкополосных шумов оценивания. Данный метод синтеза можно рекомендовать для выбора структуры оптимальных регуляторов применительно к нелинейным многомерным и многосвязным нестационарным объектам управления (технологическим процессам) различной природы.

Направлениями дальнейших исследований в области проектирования систем управления с использованием метода АКАР можно считать:

– учет технических ограничений, накладываемых на углы упреждения БПЛА относительно цели в процессе наведения и связанных с конечными размерами сектора сопровождения;

– проектирование систем стабилизации БПЛА, позволяющих в ряде случаев расширить диапазон располагаемых нормальных ускорений без изменения конструкции за счет управления по крену;

– разработку систем стабилизации статически неустойчивых БПЛА с нестационарным и случайным характером смены режимов устойчивости на различных этапах наведения;

– учет в сигналах управления стохастического характера пеленгационных характеристик радиопрозрачных обтекателей бортовых РГС в интересах компенсации паразитных обратных связей, приводящих к снижению точности наведения;

– разработку комбинированных систем управления с комплексированием наземных и бортовых радиолокационных и инерциальных измерительных систем;

- разработку комбинированных систем управления БПЛА с использованием информации от пространственно разнесенных активных, пассивных и полуактивных РЛС;
- разработку оптимальных пространственно распределенных (сетевых, роевых) самоорганизующихся систем координированного управления множественными однотипными БПЛА, в том числе миниатюрными, с использованием принципов построения и алгоритмов функционирования нейрокompьютерных сетевых структур [13–15].

Список литературы

1. Механика полета. Инженерный справочник / С.А. Горбатенко [и др.]. – М. : Машиностроение, 1969. – 420 с.
2. Летов, А.М. Динамика полета и управление / А.М. Летов. – М. : Наука, 1969. – 478 с.
3. Красовский, А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование / А.А. Красовский. – М. : Наука, 1973. – 587 с.
4. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. – М. : Наука, 1987. – 639 с.
5. Максимов, М.В. Авиационные системы радиоуправления / М.В. Максимов, Г.И. Горгонов, В.С. Чернов. – М. : ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1984. – 364 с.
6. Кун, А.А. Основы построения систем управления ракетами / А.А. Кун, В.Ф. Лукьянов, С.А. Шабан. – Минск : ВА РБ, 2001. – 427 с.
7. Palumbo, Neil F. Modern homing missile guidance theory and techniques / Neil F. Palumbo, Ross A. Blauwkamp, Justin M. Lloyd // Johns Hopkins APL Technical digest ; USA. – 2010. – Vol. 29, no. 1.
8. Колесников, А.А. Проектирование многокритериальных систем управления промышленными объектами / А.А. Колесников, А.Г. Гельфгат. – М. : Энергоатомиздат, 1993. – 304 с.
9. Колесников, А.А. Синергетическая теория управления. Инварианты, оптимизация, синтез / А.А. Колесников. – М. : Энергоатомиздат ; Таганрог : Изд-во ТРТУ, 1994. – 344 с.
10. Современная прикладная теория управления. Оптимизационный подход в теории управления. Ч. 1 / под ред. А.А. Колесникова. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2000. – 400 с.
11. Современная прикладная теория управления. Синергетический подход в теории управления. Ч. 2 / под ред. А.А. Колесникова. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2000. – 559 с.
12. Современная прикладная теория управления. Новые классы регуляторов технических систем. Ч. 3 / под ред. А.А. Колесникова. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2000. – 656 с.
13. Heppner, F. A. Stochastic nonlinear model for coordinated bird flocks / F. Heppner, U. Grenander. – The Ubiquity of Chaos, 1990. – P. 233–238.
14. Clerc, M. The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space / M. Clerc, J. Kennedy // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. – 2002. – No. 6(1). – P. 58–73.
15. Mendes, R. The fully informed particle swarm: Simpler, maybe better / R. Mendes, J. Kennedy, J. Neves // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. – 2004. – No. 8(3). – P. 204–210.

Поступила 09.03.2017

V.E. Markevich

**ANALYTICAL SYNTHESIS OF THE METHOD OF TARGETING
A SUPERSONIC UNMANNED AERIAL VEHICLE BASED
ON MULTI-DIMENSIONAL NONLINEAR DYNAMIC MODEL**

A method of analytical synthesis of an optimal controller for the terminal control task of supersonic unmanned aerial vehicles based on synergetic approach to the design of control systems for nonlinear multidimensional dynamic objects is considered.

The article provides analytical expressions describing the algorithm for control the velocity vector position of a supersonic UAV, the simulation results and the comparative analysis of the proposed control algorithm with the modified method of proportional navigation.

УДК 629.07

К.В. Козадаев, А.Е. Макаренко

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ИНЕРЦИАЛЬНО-СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ В РЕЖИМЕ НЕПОДВИЖНОСТИ

Предлагается метод повышения точности навигационных решений в интервалах неподвижности между последовательными фазами движения для слабосвязанной инерциально-спутниковой системы, включающей в себя микроэлектромеханические чувствительные элементы. Метод основывается на учете неизменности вектора состояния динамической системы во время стоянки. Результаты испытаний показывают уменьшение разброса значений оценок географических координат и скоростей и увеличение точности определения углов крена и тангажа для динамических систем, а также отсутствие нарастания курсовой ошибки.

Введение

Широкое распространение навигационных систем в повседневной жизни человека обусловлено возможностью получения точных данных о параметрах, описывающих положение и перемещение различных объектов в системе географических координат. В случаях, когда помимо значений координат и скоростей объекта необходима информация о его ориентации в трехмерном пространстве, используют инерциально-спутниковые навигационные системы (ИСНС). Зачастую применяются бесплатформенные инерциальные навигационные системы (БИНС) на основе микроэлектромеханических (МЭМС) чувствительных элементов, что обусловлено их относительной дешевизной, низким энергопотреблением, малыми габаритами и массой.

Измерения, формируемые такими инерциальными датчиками, характеризуются случайной шумовой составляющей и подвержены эффекту дрейфа нуля. Это приводит к росту погрешности показаний БИНС, особенно при работе в течение длительного промежутка времени в автономном режиме без внешней коррекции. Совместная обработка показаний инерциального блока и данных глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) позволяет учитывать зашумленность каждой из составляющих и увеличивает точность оценки навигационных параметров ИСНС. Дополнительно ИСНС преодолевают ограничения, связанные с низкой частотой обновления и кратковременным (единицы секунд) отсутствием навигационного решения при неуверенном приеме сигналов ГНСС.

Когда ИСНС находится в режиме, близком к прямолинейному равномерному движению, либо в неподвижном состоянии, погрешность определения угла курса идентифицировать затруднительно. При перемещении между целевыми точками с постоянной заданной скоростью для коррекции курса в автоматической системе управления возможно вычисление путевого угла на основе вектора путевого скорости, разумеется, с некоторыми допущениями (совпадение направления вектора скорости и продольной оси конструкции объекта, т. е. равенство нулю угла скольжения). Во время стоянок возможность такой коррекции угла курса отсутствует.

В работе предлагается метод уменьшения разброса результатов навигационного решения и ликвидации эффекта увеличения курсовой ошибки в фазах неподвижности ИСНС без применения дополнительных источников данных об угловом положении. Используется только информация об отсутствии движения системы относительно поверхности Земли, а также неизменном угле курса, т. е.

$$\vec{v}^n = [0 \quad 0 \quad 0]^T; \quad (1)$$

$$\Psi_k = \Psi_{\text{fix}} = \text{const}, \quad (2)$$

где \vec{v}^n – вектор скорости в навигационной (сопровождающей) системе координат;

Ψ_k – значение угла курса ИСНС на k -й итерации алгоритма;

Ψ_{fix} – значение угла курса ИСНС на момент входа в неподвижное состояние.

Результативность предлагаемого метода коррекции демонстрируется на примере обработки навигационных данных, полученных с помощью как модельных систем, так и реального МЭМС-блока совместно с показаниями приемника ГНСС.

1. Альтернативные методы коррекции курсового угла

Основным методом решения проблемы уменьшения ненаблюдаемой и нарастающей ошибки определения угла курса ИСНС при проведении измерений с помощью МЭМС-датчиков во время стоянки между фазами движения является применение дополнительных источников информации об угловом положении системы.

При использовании магнитометрического сенсора или компаса курсовую ошибку можно скорректировать как во время движения, так и во время неподвижности объекта [1]. Однако такая коррекция требует качественного выполнения процедур калибровки с учетом окружающих сенсор ферромагнитных материалов и других внутренних источников магнитного поля, а также адекватной математической модели магнитного поля Земли. Не менее важно устранить влияние внешних переменных магнитных полей на чувствительные элементы в процессе работы системы, что в полевых условиях весьма затруднительно. В результате невыполнения этих условий может иметь место смещенная оценка вектора магнитного поля Земли и, как следствие, ошибочная оценка вектора состояния системы в целом. Поэтому данные магнитометра обычно используются, когда модуль показаний незначительно отличается от значений, задаваемых моделью геомагнитного поля Земли. Таким образом, даже при наличии в системе магнитометрических сенсоров не всегда имеется возможность коррекции параметров углового положения.

У спутниковых угломерных систем также есть ряд ограничений и недостатков. Для функционирования этих систем необходимо, чтобы расстояние между фазовыми центрами спутниковых антенн было не менее определенного значения (обычно порядка нескольких метров), что накладывает на них ряд конструктивных ограничений. Необходим также качественный и стабильный прием сигналов большого числа спутников, что в условиях плотной городской застройки либо сложного рельефа местности не всегда возможно. Еще одним недостатком является большая стоимость этой системы по сравнению с МЭМС-блоками средней точности.

Известный метод под названием ZIHR [2] (Zero Integrated Heading Rate) заключается в использовании нулевой скорости изменения угла курса при стоянке в дополнение к информации об отсутствии движения системы относительно поверхности Земли. Это замедляет накопление ошибки угла курса при учете остаточных дрейфов гироскопа, однако не устраняет погрешность полностью.

2. Метод коррекции курсового угла

В предлагаемом методе коррекции использован алгоритм ИСНС, построенный по схеме компенсации ошибок алгоритма БИНС с обратной связью [2, 3, 4]. Ошибки оцениваются с помощью расширенного дискретного фильтра Калмана (ФК), работа которого состоит из двух повторяющихся этапов – экстраполяции и коррекции. Первый этап выполняется в моменты получения информации от алгоритма БИНС, второй – при поступлении спутникового навигационного решения. В вектор состояния ФК входят ошибки определения координат, скоростей и углового положения с помощью БИНС, а также остаточные дрейфы инерциальных датчиков:

$$\bar{\mathbf{x}} = \left[\left(\delta \bar{\mathbf{r}}^n \right)^T \quad \left(\delta \bar{\mathbf{v}}^n \right)^T \quad \left(\bar{\varphi} \right)^T \quad \left(\delta \bar{\mathbf{f}}^b \right)^T \quad \left(\delta \bar{\mathbf{w}}_{ib}^b \right)^T \right]^T, \quad (3)$$

где $\bar{\mathbf{x}}$ – вектор состояния ФК;

$\delta \bar{\mathbf{r}}^n$ – вектор-столбец ошибок определения координат с помощью БИНС;

$\delta \bar{\mathbf{v}}^n$ – вектор-столбец ошибок определения скорости с помощью БИНС;

$\bar{\varphi}$ – вектор поворота [2], описывающий ошибку определения углового положения БИНС;

$\delta \bar{\mathbf{f}}^b$ и $\delta \bar{\mathbf{w}}_{ib}^b$ – вектор-столбцы дрейфов акселерометра и гироскопа соответственно.

Вектор измерений ФК имеет следующий вид:

$$\bar{\mathbf{z}} = \left[\left(\Delta \bar{\mathbf{r}}^n \right)^T \quad \left(\Delta \bar{\mathbf{v}}^n \right)^T \right]^T, \quad (4)$$

где $\Delta\vec{\Gamma}^n$ и $\Delta\vec{v}^n$ – вектор-столбцы разностных значений координат и скоростей соответственно, вычисленные с использованием данных приемника ГНСС и алгоритма БИНС.

Матрица наблюдения строится на основании вычисления якобиана после линеаризации уравнений измерений [2, 3]:

$$H = \frac{\partial h(\vec{x}, \vec{z}, \vec{p})}{\partial \vec{z}}, \quad (5)$$

где $h(\vec{x}, \vec{z}, \vec{p})$ – уравнения измерений, которые описывают связь компонент вектора измерений с компонентами вектора состояния ФК;

\vec{p} – вектор-столбец параметров (текущее значение навигационных параметров и т. д.).

В простейшем случае, если расстояние между антенной спутникового приемника и центром измерительных осей инерциальных чувствительных элементов незначительно, вектор z формируется из разницы между координатами и скоростями инерциальной и спутниковой подсистем. В противном случае необходимо учитывать «плечевой» эффект [2, 5], т. е. смещение координат и возникновение разности скоростей, связанной с вращением антенны относительно измерительного инерциального центра при сложном движении объекта.

Матрицы возмущения и динамики системы (под системой в контексте ФК подразумевается совокупность ошибок, составляющих вектор состояния) находятся с помощью линеаризации уравнений состояния и вычисления следующих якобианов [2, 3]:

$$F = \frac{\partial f(\vec{x}, \vec{w}, \vec{p})}{\partial \vec{x}}; \quad (6)$$

$$G = \frac{\partial f(\vec{x}, \vec{w}, \vec{p})}{\partial \vec{w}}, \quad (7)$$

где F – матрица динамики системы;

G – матрица возмущения;

\vec{w} – вектор-столбец возмущения ФК, включающий случайные шумовые составляющие в показаниях инерциальных датчиков и в математических моделях, описывающих остаточные дрейфы нуля инерциальных датчиков;

$f(\vec{x}, \vec{w}, \vec{p})$ – система дифференциальных уравнений, описывающая зависимость скорости изменения вектора состояния ФК от вектора возмущения, компонент самого вектора состояния и других параметров.

В качестве уравнений состояния ФК использована ϕ -модель ошибок алгоритма БИНС [2, 6, 7]. Эта система дифференциальных уравнений описывает поведение ошибок определения навигационных параметров алгоритмом БИНС с учетом их текущих значений и неточности инерциальных элементов, что позволяет по разностным сигналам координат и скоростей оценивать не только координатные и скоростные ошибки БИНС, но еще и дрейфы инерциальных датчиков, а также угловую ошибку. Поведение дрейфов нулей акселерометра и гироскопа описывается в рамках экспоненциально-коррелированных моделей случайного процесса [2, 4].

Под неподвижным состоянием навигационной системы понимается отсутствие движения системы относительно поверхности Земли и изменений углов пространственной ориентации системы. В рассматриваемом режиме оценить погрешность определения курса ИСНС на основе МЭМС среднего и нижнего ценовых диапазонов затруднительно из-за шумовых характеристик датчиков и их неспособности измерять угловые скорости, сравнимые со скоростью суточного вращения Земли. Как упоминалось ранее, без использования дополнительной информации эта ошибка увеличивается.

Разработанный метод повышения точности навигационного решения ИСНС в режиме стоянки включает две дополнительные коррекции. Первая носит название ZUPT (zero velocity update) [2], в ней применяется информация о равенстве нулю скорости движения относительно Земли. Когда формируется вектор измерений ФК, вместо скоростных показаний приемника

ГНСС используется нулевое значение скорости. Эта коррекция выполняется после обновления информации БИНС на каждой итерации ФК. Спутниковое координатное решение при поступлении также применяется для вычисления вектора измерений ФК. Описанная коррекция уменьшает среднеквадратичную ошибку определения географических координат и скоростей. Дополнительно уменьшаются ошибки определения углов крена и тангажа, точность нахождения которых зависит от проекций на горизонтальную плоскость остаточных составляющих дрейфов акселерометра.

Вторая коррекция заключается в использовании информации о неизменности угла курса во время стоянки. При входе в неподвижный режим сохраняется текущее значение угла курса, которое во время неподвижности системы используется для формирования вектора измерений ФК в процессе реализации алгоритма БИНС. Соответствующая компонента вектора измерений ФК имеет вид

$$z_{\Psi} = \Psi_{\text{БИНС}} - \Psi_{\text{фик}}, \quad (8)$$

где $\Psi_{\text{БИНС}}$ – текущее значение угла курса, вычисленное алгоритмом БИНС.

Поскольку сохраненное в момент входа в неподвижный режим значение угла курса может содержать неточность, формируемое разностное измерение может быть смещенной оценкой курсовой ошибки. При его использовании для коррекции ложно уменьшаются значения элементов ковариационной матрицы ФК. Для учета возможного смещения используемой оценки ошибку определения углового положения представляют в виде комбинации двух частей. Первая описывает ненаблюдаемую постоянную курсовую ошибку, которая присутствует при входе в неподвижный режим, вторая – оставшуюся наблюдаемую часть ошибки углового положения. Тогда уравнение возмущения [2, 4, 5], используемое при выводе уравнений ошибок алгоритма БИНС, для углового положения с учетом малости угловых ошибок примет вид

$$\hat{C}_b^n = [I - (\vec{\varphi} \times)] [I - (\vec{\Psi}_{\text{err}} \times)] C_b^n; \quad (9)$$

$$\vec{\Psi}_{\text{err}} = [0 \quad 0 \quad \Psi_{\text{err}}]^T, \quad (10)$$

где I – единичная матрица;

C_b^n – матрица направляющих косинусов [4, 7], преобразующая векторы из связанной с измерительными осями инерциальных датчиков системы координат в навигационную;

\hat{C}_b^n – оценка матрицы C_b^n ;

$\vec{\Psi}_{\text{err}}$ – вектор поворота, описывающий ненаблюдаемую постоянную курсовую ошибку, которая присутствует при входе в неподвижный режим;

$(\vec{\Psi}_{\text{err}} \times)$ и $(\vec{\varphi} \times)$ – кососимметрические матрицы, составленные из соответствующих векторов поворота.

Использование данного уравнения возмущения оценки углового положения позволяет получить модифицированную систему уравнений ошибок алгоритма БИНС. После сокращения величин второго и меньших порядков малости полученная модель ошибок эквивалентна φ -модели, если в ней заменить вектор $\vec{\varphi}$, входящий в уравнения, на вектор

$$\vec{\varphi}_{\text{stat}} = \vec{\varphi} + \vec{\Psi}_{\text{err}}. \quad (11)$$

Поскольку вектор $\vec{\Psi}_{\text{err}}$ неизменен во время стоянки, соответствующее уравнение состояния имеет вид

$$d\Psi_{\text{err}}/dt = 0. \quad (12)$$

Во время стоянки используется расширенный вектор состояния ФК, дополнительно включающий элемент Ψ_{err} . Матрицы ФК также вычисляются на основе модифицированной модели ошибок БИНС. При входе в режим стоянки ковариация ненаблюдаемой постоянной

курсовой ошибки Ψ_{err} принимается равной ковариации третьей компоненты вектора $\vec{\phi}$. После этого ковариация соответствующей компоненты вектора $\vec{\phi}$ обнуляется. Для момента возобновления движения из вектора состояния ФК исключается элемент Ψ_{err} , при этом его ковариация добавляется к ковариации третьей компоненты вектора $\vec{\phi}$. Режиму движения соответствуют матрицы ФК, эквивалентные описанным ранее матрицам базовой ИСНС. Данная коррекция обеспечивает наблюдаемость всех составляющих дрейфов гироскопа и предотвращает нарастающие ошибки курсового угла.

Уравнение измерения ошибки угла курса, необходимое для вычисления строки матрицы измерений ФК, имеет вид [2]

$$h_{\psi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \phi_x} & \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \phi_y} & \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \phi_z} \end{bmatrix}^T \cdot \vec{\phi} + e_{\psi}; \quad (13)$$

$$\vec{\phi} = [\phi_x \quad \phi_y \quad \phi_z]^T; \quad (14)$$

$$\hat{\Psi} = \arctg(\hat{C}_{b,(21)}^n / \hat{C}_{b,(11)}^n), \quad (15)$$

где $\hat{C}_{b,(ij)}^n$ – элемент матрицы \hat{C}_b^n , находящийся в i -й строке и j -м столбце матрицы; e_{ψ} – ошибка измерения угла курса; $\hat{\Psi}$ – оценка угла курса; символ точки соответствует скалярному произведению векторов.

Применение метода повышения точности в алгоритме ИСНС возможно при ручной активации неподвижного режима и при автоматическом детектировании перехода в это состояние. При отсутствии равномерных прямолинейных участков в движении объекта для детектирования неподвижного режима можно воспользоваться калиброванными показаниями инерциальных датчиков [8]. В противном случае необходима дополнительная информация для детектирования остановки, например показания датчика скорости или измерения датчика пройденного пути.

3. Испытания метода коррекции курсового угла

Для проверки алгоритма ИСНС на основе предложенного метода повышения точности функционирования и эффективности навигационного решения при неподвижном состоянии объектов выполнена серия экспериментов. С помощью математического пакета MatLab реализовано несколько моделей ИСНС: базовая, с совместной коррекцией по методам ZUPT и ZINR, а также с описанной в данной работе коррекцией (ZUPT и применение разностных измерений курсового угла). При моделировании поведения систем в режиме стоянки использовались как математические модели источников навигационной информации, так и данные реального инерциального МЭМС-блока и ГНСС. В их качестве выступали МЭМС-блок потребительского класса точности [2] MPU-9150 и модуль ГНСС u-blox NEO-M8N. Частота поступления измерений инерциального блока настроена на 100 Гц, частота обновления спутникового навигационного решения имеет стандартное значение 1 Гц. Данные инерциальной и спутниковой подсистем получены в процессе нахождения системы в точке с известными координатами и угловым положением, длительность одного эксперимента составила 300 с.

Математические модели источников навигационной информации определены в виде суммы идеальных измерений и аддитивных ошибок. Ошибки инерциальных датчиков состоят из остаточной систематической части (для акселерометра – $0,08 \text{ м/с}^2$, для гироскопа – $0,01 \text{ }^\circ/\text{с}$) и случайной составляющей: совокупности экспоненциально коррелированного шума (время корреляции – 1 ч, СКО для акселерометра – $0,025 \text{ м/с}^2$, для гироскопа – $0,04 \text{ }^\circ/\text{с}$) и гауссова белого шума (СКО для акселерометра – $0,08 \text{ м/с}^2$, для гироскопа – $0,5 \text{ }^\circ/\text{с}$). Используемые численные значения характерны для применяемого МЭМС-блока после проведения предварительной калибровки. Для СКО измерений наблюдаемой части курсовой ошибки применено значение $0,1^\circ$. Ошибки спутникового приемника представлены случайной составляющей – суммой экспоненциально коррелированного шума и гауссова белого шума [5]. Среднеквадратичные ошибки за рассматриваемый временной интервал составили: для координат $3,1 \text{ м}$ в горизонтальной плоскости

и 4,2 м в вертикальной, для скоростей 0,1 м/с. Точность навигационного решения эквивалентна точности, полученной с помощью используемого приемника ГНСС.

С целью получения численных характеристик эффективности разработанного метода выполнена серия запусков реализованных моделей. Точность задания начальных значений координат и скоростей соответствует точности приемника ГНСС: для начальных значений углов крена и тангажа – $0,1^\circ$, угла курса – $0,5^\circ$. Для всех тестируемых алгоритмов начальные значения параметров и величин идентичны.

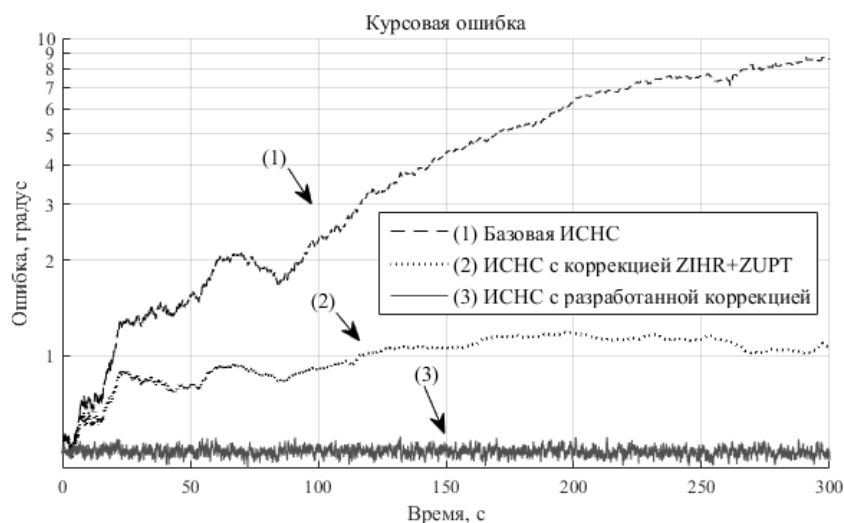
4. Результаты экспериментов

В таблице представлены усредненные результаты серии экспериментов, во время проведения которых системы находились в режиме стоянки. Для базовой ИСНС и для ИСНС с совместной коррекцией ZIHR и ZUPT имеет место накопление ошибки угла курса. Поэтому приведено значение, усредненное для серии экспериментов в конечные моменты времени.

Результаты экспериментальной проверки

Величина	Среднеквадратичное значение ошибки определения величины		
	Базовая ИСНС	ZIHR и ZUPT	Разработанный метод
<i>Данные реальных подсистем</i>			
Координаты в плоскости, м	1,79	1,42	1,42
Высота, м	2,56	1,93	1,93
Скорость, м/с	0,08	0,012	0,012
Углы крена и тангажа, град.	0,23	0,13	0,13
Угол курса, град.	8,31	1,37	0,51
<i>Модельные данные</i>			
Координаты в плоскости, м	1,65	1,3	1,3
Высота, м	2,37	1,71	1,71
Скорость, м/с	0,07	0,01	0,01
Углы крена и тангажа, град.	0,19	0,11	0,11
Угол курса, град.	7,2	1,23	0,51

Для демонстрации различий в поведении ошибки угла курса для протестированных алгоритмов на рисунке изображен график соответствующих величин одного из экспериментов.



Ошибки определения угла курса в неподвижном состоянии с помощью различных алгоритмов ИСНС

Полученные экспериментальные результаты позволяют сделать вывод об эффективности предложенного метода повышения точности ИСНС в режиме стоянки между фазами движения. Коррекция, реализующая описанный метод, увеличила точность нахождения навигационных параметров по сравнению с базовой ИСНС. Для используемых в эксперименте источников навигационной информации и численных значений параметров точность нахождения координат в горизонтальной плоскости возросла на 21 %, высоты – на 25 %, скоростей – на 75 %, углов крена и тангажа – на 43 %. В сравнении с другими упомянутыми системами (базовой и ИСНС с коррекцией ZUPT и ZIHR) решена проблема нарастания ошибки угла курса. Отличие полученных значений при использовании данных реальных блоков и математических моделей не превышает 20 %.

Заключение

В работе предложено решение задачи повышения точности навигационных решений ИСНС в моменты неподвижности без значительного увеличения ее сложности. При практическом использовании ИСНС на подвижных объектах данный режим работы возникает довольно часто, в то время как не всегда имеется возможность добавления новых источников навигационной информации. Предлагаемый метод позволяет решить серьезную проблему устранения накопления курсовой ошибки без использования дополнительных источников данных об угловом положении.

Список литературы

1. Макаренко, А.Е. Алгоритм гибридной системы определения навигационных параметров беспилотных летательных аппаратов / А.Е. Макаренко // Сб. материалов конф. «CSIST'2016». – Минск, 2016. – С. 35–39.
2. Shin, E.-H. Estimation Techniques for Low-Cost Inertial Navigation / E.-H. Shin. – Alberta : Department of Geomatics Engineering Calgary, 2005. – 206 p.
3. Козадаев, К.В. Алгоритм повышения точности слабосвязанной инерциально-спутниковой навигационной системы на основе фильтра Калмана для ошибок БИНС / К.В. Козадаев, А.Е. Макаренко // Электроника инфо. – 2015. – № 9(123). – С. 45–48.
4. Матвеев, В.В. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем / В.В. Матвеев, В.Я. Распопов ; под общ. ред. В.Я. Распопова. – СПб. : Электроприбор, 2009. – 280 с.
5. Sveinsson, A. INS/GPS Error Analysis and Integration / A. Sveinsson. – Reykjavík, Iceland : School of Science and Engineering at Reykjavik University, 2012. – 114 p.
6. Savage, P.G. Strapdown analytics. Part 1 / P.G. Savage. – Minnesota : Inc. Maple Plain, 2000. – 1619 p.
7. Titterton, D.H. Strapdown Inertial Navigation Technology / D.H. Titterton, J.L. Weston. – 2nd edition. – Stevenage : The Institution of Electrical Engineers, 2004. – 581p.
8. Zero-Velocity Detection – An Algorithm Evaluation / I. Skog [et al.] // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. – Stockholm, 2010. – Vol. 57, iss. 11. – P. 2657–2666.

Поступила 29.03.2017

*Белорусский государственный университет,
Минск, ул. Курчатова, 5
e-mail: kozadaeff@mail.ru,
makaran@tut.by*

K.V. Kozadaev, A.E. Makarenko

**IMPROVING THE ACCURACY OF INERTIAL-SATELLITE
NAVIGATION SYSTEM IN IMMOBILITY MODE**

A method of improving the accuracy of navigation solutions in immobility mode between motion phases for loosely coupled inertial-satellite system with MEMS sensors is proposed. The method is based on invariance of the dynamic system state while stationary. The test results show the decrease of variation in estimation of geographical coordinates and velocities, and the increase of accuracy of determining the pitch and roll angles for dynamic systems, as well as the lack of increase of the course error.

**XVI МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«РАЗВИТИЕ ИНФОРМАТИЗАЦИИ И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ» (РИНТИ–2017)**

16 ноября 2017 г., Минск, Беларусь



ЦЕЛИ КОНФЕРЕНЦИИ

Анализ состояния и проблем развития информатизации и государственной системы научно-технической информации в Республике Беларусь и за рубежом.

Разработка новых подходов к научно-методическому обеспечению развития информатизации и информационного общества, создание информационных технологий и информационной инфраструктуры Беларуси, реализация Стратегии развития информатизации в Республике Беларусь на 2016–2022 годы и Государственной программы развития цифровой экономики и информационного общества на 2016–2020 годы.

Создание и сопровождение автоматизированных систем научно-технической информации, корпоративных библиотечно-информационных систем и технологий.

В соответствии с постановлением Совета Министров Республики Беларусь от 14.02.2017 г. № 125 конференция РИНТИ–2017 включена в Республиканский план мероприятий по проведению в 2017 г. Года науки (п. 24).

ТЕМАТИКА КОНФЕРЕНЦИИ

Анализ состояния и проблем развития единого информационного пространства, методы и средства обеспечения его формирования, использования и развития в интересах граждан, общества и государства.

Технологии электронного государства: электронное правительство; электронное обучение; электронная медицина; электронные библиотеки, оцифровка культурного наследия и формирование национального электронного контента.

Формирование нормативно-правовой базы, интегрированной системы стандартизации (унификации), сертификации, экспертизы, оценки эффективности реализации программ и проектов в области информатизации и системы научно-технической информации.

Исследования и разработки, проводимые в рамках Межведомственного исследовательского центра искусственного интеллекта, Научно-технического центра технологий электронного государства Объединенного института проблем информатики НАН Беларуси.

Разработка и внедрение корпоративных систем научно-технической информации, библиотечно-информационных систем и технологий для автоматизации информационного обеспечения научной, научно-технической и инновационной деятельности.

Научно-информационные компьютерные сети, технологии высокоскоростного информационного обмена между организациями с доступом в международные научно-образовательные сети.

Корпоративная сеть библиотек Беларуси и ее информационные ресурсы, генерация собственных информационных ресурсов, обеспечение доступа к национальным и зарубежным информационным ресурсам.

Региональная информатизация и информационная инфраструктура.

РАБОЧИЕ ЯЗЫКИ КОНФЕРЕНЦИИ

В качестве рабочих языков устанавливаются белорусский, русский и английский.

ПОРЯДОК ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ДОКЛАДОВ

Представление докладов – до 15 августа 2017 г.

Доклады представляются в электронном виде на белорусском, русском или английском языках по электронной почте vengerov@basnet.by или griganec@bas-net.by. Белорусские авторы предоставляют также *в обязательном порядке* акт экспертизы (экспертное заключение) о возможности опубликования доклада в открытой печати.

Доклады публикуются в сборнике докладов конференции. Участие в конференции бесплатное.

Авторам докладов необходимо зарегистрироваться на сайте конференции и указать полностью фамилию, имя и отчество, организацию, должность, ученую степень и ученое звание, e-mail, телефоны (мобильный, служебный или домашний). Эта информация (кроме телефонов) будет размещена в сборнике докладов конференции.

Объем предоставляемых докладов – не более шести нумерованных страниц формата А4.

Доклад должен включать: УДК (в левом верхнем углу), название; И.О.Ф. авторов; полное название организации, города, страны; аннотацию (не более 100 слов); текст доклада (с обязательными ссылками на литературу и рисунки); список литературы (если имеется), оформленный согласно приложению 2 к инструкции ВАК по оформлению диссертации (<http://www.vak.org.by>).

Поля: верхнее – 2,5 см, нижнее – 3,2 см, левое – 2,5 см, правое – 2,5 см; абзацный отступ – 1,0 см. Интервал между строками и абзацами одинарный. Текст доклада набирается с переносами.

При подготовке текста доклада необходимо использовать шрифты семейства Times New Roman Сур следующих размеров и типов:

УДК – прописные 12 пт, в левом верхнем углу страницы.

НАЗВАНИЕ ДОКЛАДА – прописные полужирные 12 пт.

И.О. Фамилия(и) – строчные 12 пт.

Организация – строчные 12 пт; город, страна – строчные 12 пт.

Аннотация – курсив 10 пт (отступ слева и справа – 1 см).

Заголовки разделов – строчные полужирные 12 пт с абзацным отступом.

Заголовки подразделов – строчные полужирные курсив 12 пт, с абзацным отступом (все заголовки должны быть выровнены по левому краю).

Основной текст – 12 пт без нумерации страниц.

В тексте доклада в возрастающем порядке должны быть указаны ссылки на литературу, а также на рисунки и таблицы (черно-белый формат, четко читаемый текст), если такие имеются.

Образцы оформления докладов представлены на сайте конференции.

Тексты докладов проходят научную и редакторскую обработку.

АДРЕС КОНФЕРЕНЦИИ

220012, Республика Беларусь, Минск, ул. Сурганова, 6, ОИПИ НАН Беларуси
(<http://www.uiip.basnet.by>, <http://opac.bas-net.by/opacpage/rinti>, тел. +375 17 284-25-26).

Председатель программного комитета:

Тузиков Александр Васильевич +375 17 284-21-75 tuzikov@newman.bas-net.by

Заместители председателя программного комитета:

Кругликов Сергей Владимирович +375 17 284-09-85 kruglikov_s@newman.bas-net.by

Григянец Ромуальд Брониславович +375 17 284-25-26 griganec@bas-net.by

Ответственные секретари:

Венгеров Виктор Николаевич +375 17 284-12-08 vengerov@basnet.by

Мисякова Галина Тихоновна +375 17 217-74-06 gsnti@basnet.by

E-mail: griganec@bas-net.by, vengerov@basnet.by, gsnti@basnet.by

Правила для авторов

В журнале «Информатика» публикуются оригинальные и обзорные статьи, описывающие результаты фундаментальных и прикладных исследований в области информационных технологий, по следующим разделам: математическое моделирование; автоматизация проектирования; обработка сигналов, изображений и речи; информационная безопасность; распознавание образов; системы, приборы и устройства; параллельные вычисления; космические информационные технологии и геоинформатика; интеллектуальные системы; прикладные информационные технологии. К публикации приглашаются отечественные и зарубежные ученые, специалисты в области информационных технологий и информатики, докторанты и аспиранты.

1. Статьи принимаются в редакцию через [электронную систему подачи](http://jinfo.basnet.by) по адресу <http://jinfo.basnet.by> в формате файлов текстовых редакторов Microsoft Word. Объем полной статьи (стандартный формат для завершенных научных статей) – 8–17 стр., включая рисунки и достаточное количество наиболее актуальных ссылок; обзорной статьи (критическое обобщение какой-то исследовательской темы) – обычно от 10 стр., включая все основные ссылки. Текст статьи набирается с переносами шрифтом Times New Roman 11 пт, интервал между строками – одинарный, абзацный отступ 1 см, поля по 2,5 см со всех сторон.

Изложенный в статье материал должен быть четко структурированным: введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение (выводы).

2. Статьи о результатах работ, проведенных в научных учреждениях, должны иметь разрешение на публикацию (сопроводительное письмо за подписью руководителя или выписку из заседания ученого совета, отдела или кафедры, акт экспертизы).

3. Статья в обязательном порядке должна иметь индекс универсальной десятичной классификации (УДК). Инициалы и фамилии всех авторов, полное название учреждения, где работают авторы, с указанием города и страны, адрес электронной почты каждого автора и номер телефона, аннотация (150–250 слов), ключевые слова (7–10) приводятся на русском и английском языках.

4. Аннотация (авторское резюме) должна кратко представлять результаты работы и быть информативной, содержательной. Приветствуется структура аннотации, повторяющая структуру статьи и включающая введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение.

5. Формулы, рисунки, таблицы в статье должны быть пронумерованы в соответствии с порядком их упоминания в тексте. Ссылки на рисунки и таблицы в тексте обязательны. Рисунки должны быть выполнены с хорошим разрешением в масштабе, позволяющем четко различать надписи и обозначения. Подрисовочные подписи с расшифровкой всех позиций, представленных на рисунке, набираются шрифтом гарнитуры основного текста, размер символов 9 пт. Цветные иллюстрации печатаются только в том случае, когда это необходимо для понимания излагаемого материала.

6. Набор формул выполняется в формульных редакторах Microsoft Equation или Math Type. Прямо набираются греческие и русские буквы; математические символы (\sin , \lg , ∞); символы химических элементов (С, Cl, CHCl_3); цифры (римские и арабские); векторы; индексы (верхние и нижние), являющиеся сокращениями слов. Курсивом набираются латинские буквы, символы физических величин (в том числе и в индексе).

7. Сокращения в тексте статьи (за исключением единиц измерения) могут быть использованы только после упоминания полного термина. Единицы измерения физических величин следует приводить в Международной системе СИ.

8. Цитируемые в статье фамилии авторов теорем, теорий, законов и т. д. следует приводить в скобках на языке оригинала после русского написания. Например, теорема Эйлера (Euler).

9. Список использованной литературы должен содержать ссылки на источники, получившие международное признание и соответствовать требованиям ГОСТ 7.1–2003 или его более поздней версии 7.5–2008. Номер литературной ссылки в тексте дается порядковым номером в квадратных скобках. Ссылаться на неопубликованные работы не допускается.

10. Отдельно приводится список цитированных источников в *романском* (латинском) алфавите со следующей структурой: авторы (транслитерация), название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация) [перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)], выходные данные с обозначениями на английском языке.

Примеры подготовлены по материалам методических рекомендаций «Редакционная подготовка научных журналов для включения в зарубежные индексы цитирования» О.В. Кирилловой

(http://elsevierscience.ru/files/kirilova_editorial.pdf):

Статьи из журналов:

Zagurenko A.G., Korotovskikh V.A., Kolesnikov A.A., Timonov A.V., Kardymon D.V. Tekhniko-ekonomicheskaya optimizatsiya dizaina gidrorazryva plasta [*Techno-economic optimization of the design of hydraulic fracturing*]. Neftyanoe khozyaistvo = Oil Industry, 2008, no.11, pp. 54–57.

Описание статьи из электронного источника:

Swaminathan V., Lepkoswka-White E., Rao B.P. *Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange*. Journal of Computer-Mediated Communication, 1999, vol.5, no. 2. Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (Accessed 28 April 2011).

Описание статьи из продолжающегося издания (сборника трудов):

Astakhov M.V., Tagantsev T.V. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedinenii «stal'-kompozit» [*Experimental study of the strength of joints "steel-composite"*]. Trudy MGTU «Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem» [*Proc. of the Bauman MSTU "Mathematical Modeling of Complex Technical Systems"*], 2006, no. 593, pp. 125-130.

Описание материалов конференций:

Usmanov T.S., Gusmanov A.A., Mullagalin I.Z., Muhametshina R.Ju., Chervyakova A.N., Sveshnikov A.V. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [*Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing*]. Trudy 6 Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi" [*Proc. 6th Int. Symp. "New energy saving subsoil technologies and the increasing of the oil and gas impact"*]. Moscow, 2007, pp. 267-272.

Описание книги (монографии, сборники):

Izvekov V.I., Serikhin N.A., Abramov A.I. Proektirovanie turbogeneratorov [*Design of turbo-generators*]. Moscow, MEI Publ., 2005, 440 p.

Описание интернет-ресурса:

APA Style (2011). Available at: <http://www.apastyle.org/apa-style-help.aspx> (accessed 5 February 2011).
[http://www.PravilaTsitirovaniyaIstochnikov \(Rules for the Citing of Sources\) Available at.scribd.com/doc/1034528/](http://www.PravilaTsitirovaniyaIstochnikov(RulesfortheCitingofSources)Availableat.scribd.com/doc/1034528/) (accessed 7 February 2011).

Описание диссертации или автореферата диссертации:

Semenov V.I. Matematicheskoe modelirovanie plazmy v sisteme kompaktnyi tor. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [*Mathematical modeling of the plasma in the compact torus. Dr. phys. and math. sci. diss.*]. Moscow, 2003. 272 p.

Описание ГОСТа:

GOST 8.586.5–2005. Metodika vypolneniia izmerenii. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkosti i gazov s pomoshch'iu standartnykh suzhaiushchikh ustroystv [*State Standard 8.586.5 – 2005. Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices*]. Moscow, Standartinform Publ., 2007. 10 p.

Описание патента:

Palkin M.V., e.a. Sposob orientirovaniia po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoi golovkoi samonavedeniia [*The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head*]. Patent RF, no. 2280590, 2006.

11. Поступившие в редакцию статьи направляются на рецензирование специалистам. Основным критерием целесообразности публикации является новизна и информативность статьи. Если по рекомендациям рецензента статья возвращается автору на доработку, а переработанная рукопись вновь рассматривается редколлегией, датой поступления считается день получения редакцией ее окончательного варианта. Статьи не по профилю журнала возвращаются авторам после заключения редколлегии.

12. Статьи, направляемые на доработку, должны быть возвращены в исправленном виде с ответами на все замечания.

13. Редакция журнала предоставляет возможность первоочередного опубликования статей, представленных лицами, которые осуществляют послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения.

14. Авторы несут ответственность за направление в редакцию статей, уже опубликованных ранее, или статей, принятых к публикации другими изданиями.

15. Редакция оставляет за собой право на редакционные изменения, не искажающие основное содержание статьи. Окончательное решение о публикации принимается редакционной коллегией.

Тел. для справок: +375(017)284 26 22 либо по электронной почте rio@newman.bas-net.by.

Журнал «Информатика» включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в список научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований.

Индексы

00827

для индивидуальных
подписчиков

008272

для предприятий и
организаций