

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)

УДК 519.714  
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-1-63-77>

Поступила в редакцию 05.11.2019  
Received 05.11.2019

Принята к публикации 19.12.2019  
Accepted 19.12.2019

## Выделение подсистем связанных функций из многоуровневого представления системы булевых функций

П. Н. Бибило<sup>✉</sup>, А. М. Позняк

*Объединенный институт проблем информатики  
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*  
<sup>✉</sup>E-mail: [bibilo@newman.bas-net.by](mailto:bibilo@newman.bas-net.by)

**Аннотация.** Одним из направлений логической оптимизации многоуровневых представлений систем булевых функций являются методы, основанные на выделении подсистем функций, которые имеют одинаковые части в областях определения функций выделенных подсистем. Такие подсистемы называются связанными. Связанность функций приводит к появлению большого числа одинаковых структурных частей (конъюнкций, алгебраических выражений, подфункций и др.) в оптимизированных формах представления функций, по которым строятся в дальнейшем комбинационные логические схемы. Чем сильнее связаны функции выделенной подсистемы, тем скорее можно ожидать, что в представлениях функций данной подсистемы будет больше одинаковых подвыражений и синтезированные логические схемы будут иметь меньшую сложность.

Описываются программно реализованные алгоритмы выделения подсистем связанных функций из BDD-представления системы булевых функций на основе введенных численных оценок связанности BDD-представлений функций. Связанность заключается в наличии одинаковых частей в областях единичных значений функций системы либо одинаковых уравнений в BDD-представлениях. Такие представления являются компактными формами задания функций и получаются в результате разложения Шеннона функций исходной системы (и получающихся в результате разложения подфункций) по всем своим переменным. Проведенные эксперименты показывают эффективность применения предложенных алгоритмов и программ при синтезе логических схем из библиотечных логических элементов.

**Ключевые слова:** булева функция, разложение Шеннона, BDD-представление, дизъюнктивная нормальная форма, синтез логических схем

**Для цитирования.** Бибило, П. Н. Выделение подсистем связанных функций из многоуровневого представления системы булевых функций / П. Н. Бибило, А. М. Позняк // Информатика. – 2020. – Т. 17, № 1. – С. 63–77. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-1-63-77>

---

---

## The search for subsystems of related functions from multilevel representation of systems of Boolean functions

Petr N. Bibilo<sup>✉</sup>, Andrei M. Pazniak

*The United Institute of Informatics Problems of the National Academy  
of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*  
<sup>✉</sup>E-mail: [bibilo@newman.bas-net.by](mailto:bibilo@newman.bas-net.by)

**Abstract.** One of the directions of logical optimization of multilevel representations of systems of Boolean functions is the methods based on the search of subsystems of functions that have the same parts in the domains of functions of selected subsystems. Such subsystems are called related. The good relationship of functions leads to the appearance of a large number of identical structural parts (conjunctions, algebraic expressions, subfunctions, etc.) in optimized forms of representation of functions which are used in the construction of combinational logic circuits. The more the functions of the selected subsystem are related, the sooner it is expected that in the representations of the functions of this subsystem will be more identical subexpressions and synthesized logic circuits will have less complexity.

We describe software-implemented algorithms for extracting subsystems of related functions from a BDD representation of a system of Boolean functions based on introduced numerical estimates of the relationship of BDD representations of functions. The relationship of Boolean functions is the presence of Boolean vectors, where the functions take the value as one, or of the same equations in BDD representations. BDD representations of Boolean functions are compact forms defining functions and are constructed as the result of Shannon decomposition of the functions of the original system (resulting from the decomposition of subfunctions) by all variables, which the functions of the original system depend on. The experiments show the effectiveness of proposed algorithms and programs in the synthesis of logic circuits from logic elements library.

**Keywords:** Boolean function, Shannon decomposition, BDD representation, disjunctive normal form, logic synthesis

**For citation.** Bibilo P. N., Pazniak A. M. The search for subsystems of related functions from multilevel representation of systems of Boolean functions. *Informatics*, 2020, vol. 17, no. 1, pp. 63–77 (in Russian). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-1-63-77>

**Введение.** Синтез комбинационных схем из библиотечных элементов выполняется по оптимизированным двухуровневым либо многоуровневым представлениям систем булевых функций. Двухуровневыми (И-ИЛИ) представлениями называют в литературе [1–3] представления функций в виде дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), многоуровневыми – различные формы функциональных разложений [1, 4]. Логическая оптимизация двухуровневых представлений, часто называемая также совместной минимизацией систем булевых функций в классе ДНФ, основывается на поиске одинаковых элементарных конъюнкций, входящих в ДНФ различных функций системы, т. е. выделении одинаковых частей в алгебраических представлениях функций.

Логическая минимизация функциональных разложений по подмножествам переменных при решении задач декомпозиции систем функций [4] основывается на поиске одинаковых подфункций, входящих в разложения исходных функций системы, либо подфункций, полученных в процессе разложения. Среди функциональных разложений по одной переменной широкое применение нашли разложения Шеннона, графические представления которых называются BDD (от англ. Binary Decision Diagram, диаграмма двоичного выбора) [5–9]. В русскоязычной литературе BDD называют также диаграммами двоичных решений, бинарными диаграммами решений, двоичными решающими диаграммами и т. д. Представления булевых функций в виде BDD соответствуют многоуровневым представлениям на базе разложения Шеннона по всем переменным, от которых зависят функции системы [9], и поиска одинаковых подфункций (коэффициентов разложений), получаемых в процессе разложения. В работе [10] предложено при построении BDD-представлений систем функций находить равные и взаимно инверсные подфункции, что позволяет получать BDDI-представления (BDDI – Binary Decision Diagram with Inverse cofactors), которые являются более компактными по сравнению с BDD-представлениями, основанными на поиске только одинаковых (равных) подфункций.

Еще одним направлением логической оптимизации многоуровневых представлений систем функций являются методы, основанные на выделении подсистем функций, которые имеют одинаковые части в областях определения функций системы. В работе [11] такие подсистемы называются связанными. «Хорошая» связанность функций существенно влияет на появление одинаковых структурных частей (конъюнкций, алгебраических выражений, подфункций и т. д.) в оптимизированных двухуровневых либо многоуровневых формах представления функций, по которым и строятся комбинационные схемы. Чем сильнее связанность функций, тем скорее можно ожидать, что в их представлениях будет больше одинаковых подвыражений и синтезированные схемы будут менее сложными. По сути, выделение подсистем связанных функций является одним из приемов предварительной логической оптимизации многоуровневых представлений систем функций.

В настоящей статье формулируются понятия связанности булевых функций по их характеристическим множествам (областям единичных значений функций) либо по уравнениям в BDD-представлениях и предлагаются алгоритмы выделения связанных подсистем функций из BDD-представления системы функций. Проведенные эксперименты по выделению связанных подсистем функций показали, что данную процедуру целесообразно выполнять перед

BDDI-оптимизацией, являющейся эффективным методом логической минимизации при синтезе логических схем из библиотечных элементов. Выделение связанных функций позволяет объединить в одну подсистему те функции, которые целесообразно минимизировать на основе BDD либо BDDI-представления данной подсистемы.

**Основные определения и формы задания систем булевых функций.** Пусть задана система  $f(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), \dots, f^m(\mathbf{x}))$  булевых функций, через  $\mathbf{x}$  обозначен вектор  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Обозначим через  $V^x$  булево пространство, построенное над переменными булева вектора  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Элементами пространства  $V^x$  являются  $n$ -компонентные наборы (векторы)  $\mathbf{x}^*$  нулей и единиц. Характеристическим множеством  $M_{f^i}^1$  компонентной функции  $f^i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , системы  $f(\mathbf{x})$  называется множество наборов булева пространства, на которых функция  $f^i(\mathbf{x})$  принимает единичное значение. Через  $M_{f^i}^0$  обозначим множество наборов нулевых значений функции  $f^i(\mathbf{x})$ .

Далее под связанностью булевых функций будет пониматься совпадение подобластей в характеристических множествах  $M_{f^i}^1$  компонентных функций. Обозначим через  $|A|$  мощность множества  $A$ . Система функций  $f(\mathbf{x})$  называется  $S_e^1$ -связанной, если  $e \leq e_{\max}^n$ , где

$$e_{\max}^n = \left| \bigcap_{i=1}^m M_{f^i}^1 \right|. \quad (1)$$

Иными словами, система функций  $f(\mathbf{x})$  называется  $S_e^1$ -связанной, если имеется  $e$  наборов  $n$ -мерного булева пространства, на которых все компонентные функции  $f^i(\mathbf{x})$  системы одновременно принимают единичное значение. Очевидно, что для заданной системы булевых функций, зависящих от  $n$  переменных, параметр  $e_{\max}^n$  задает максимальное значение  $e$ . Если система функций является  $S_e^1$ -связанной, то она будет  $S_q^1$ -связанной для всех  $q$ , удовлетворяющих условию  $0 \leq q \leq e$ . Число  $e_{\max}^n$  назовем весом связанности системы функций. Для одной булевой функции, зависящей от  $n$  переменных, вес связанности – это число, равное мощности множества  $M_{f^i}^1$ .

Мерой (долей) связанности  $\rho_e^n(f^1, \dots, f^m)$  системы функций  $f(\mathbf{x})$  назовем отношение

$$\rho_e^n(f^1, \dots, f^m) = \frac{e_{\max}^n}{2^n}. \quad (2)$$

Очевидно, что мера связанности  $\rho_e^n(f^1, \dots, f^m)$  ограничена:  $0 \leq \rho_e^n(f^1, \dots, f^m) \leq 1$ .

Если все компонентные функции  $f^i(\mathbf{x}) = 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , то  $\rho_e^n(f^1, \dots, f^m) = 1$ . Если же система функций состоит, например, из пары  $f^1, \overline{f^1}$  взаимно инверсных функций, то  $\rho_e^n(f^1, \overline{f^1}) = 0$ . Очевидно, что это не единственный пример системы функций с нулевой мерой связанности, такие системы будем называть несвязанными.

Системы булевых функций могут быть заданы в различной форме. В качестве форм задания систем функций далее будут рассматриваться матричные формы – таблицы истинности (табл. 1) и системы ДНФ (табл. 2), а также представления систем функций алгебраическими формулами, задающими разложения Шеннона (таким формулам соответствуют графовые BDD-представления). Для системы функций (табл. 1) мера связанности  $\rho_e^4(f^1, f^2, f^3, f^4) = 0$ , так как нет ни одного набора значений переменных вектора  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ , на котором

значения всех четырех компонентных функций одновременно равны единице. Позже будет показано, что данная система содержит подсистемы связанных функций.

Таблица 1  
Система полностью определенных булевых функций

$x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$	$f^1$ $f^2$ $f^3$ $f^4$
0 0 0 0	0 0 1 1
0 0 0 1	1 1 0 0
0 0 1 0	1 0 0 0
0 0 1 1	1 1 0 0
0 1 0 0	0 0 1 1
0 1 0 1	1 1 0 0
0 1 1 0	0 1 1 1
0 1 1 1	1 1 1 0
1 0 0 0	0 0 1 1
1 0 0 1	1 0 0 0
1 0 1 0	1 1 0 0
1 0 1 1	1 1 0 0
1 1 0 0	0 0 1 1
1 1 0 1	1 0 1 1
1 1 1 0	0 0 0 1
1 1 1 1	1 0 1 0

Таблица 2  
Система ДНФ булевых функций

$T^x$	$B^f$
$x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$	$f^1$ $f^2$ $f^3$ $f^4$
- 0 1 -	1 0 0 0
0 1 1 -	0 1 1 0
- - - 1	1 0 0 0
1 0 1 -	0 1 0 0
1 1 0 -	0 0 1 1
- 1 - 0	0 0 0 1
- 1 1 1	0 0 1 0
0 - - 1	0 1 0 0
- - 0 0	0 0 1 1

В матричной форме система ДНФ (табл. 2) задается парой матриц: строки троичной матрицы  $T^x$  представляют элементарные конъюнкции (троичные векторы – интервалы булева пространства [3]), а единичные значения элементов в булевой матрице  $B^f$  отмечают вхождения соответствующих конъюнкций в ДНФ функций:

$$D^1 = \bar{x}_2 x_3 \vee x_4, D^2 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_4,$$

$$D^3 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4, D^4 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4.$$

Заметим, что данная система ДНФ представляет ту же систему булевых функций, которая приведена в табл. 1. Если в элементарной конъюнкции отсутствуют  $q$  литералов, то в представляющем ее троичном векторе имеется  $q$  неопределенных элементов «-». Весом троичного вектора, содержащего  $q$  неопределенных элементов, назовем число  $2^q$ . Другими словами, вес троичного вектора – это число двоичных векторов, получающихся всевозможными заменами неопределенных элементов троичного вектора на определенные элементы: нули либо единицы.

Системы ДНФ обычно минимизируются [2, 3], при этом стремятся уменьшить число элементарных конъюнкций и (или) число литералов в конъюнкциях. В получаемых минимизированных системах ДНФ элементарные конъюнкции (троичные векторы) находятся в различных отношениях. Далее будет использоваться отношение ортогональности. Если все троичные векторы матрицы  $T^x$  попарно ортогональны, то система ДНФ называется ортогонализированной [3, 9]. Троичные векторы  $a = (x_1^a, \dots, x_n^a)$ ,  $b = (x_1^b, \dots, x_n^b)$  ортогональны, если найдется хотя бы одна компонента  $i \in \{1, \dots, n\}$ , означающая, что  $x_i^a$ ,  $x_i^b$  определены и не равны. Например, троичные векторы  $a = (0, -, 1, 0)$ ,  $b = (-, 1, 0, 0)$  ортогональны, так как для  $i = 3$  выполняются условия ортогональности  $x_3^a = 1$  и  $x_3^b = 0$ . Если троичные векторы ортогональны, то конъюнкция (логическое произведение) соответствующих им элементарных конъюнкций равна нулю:  $a \& b = ab = (\bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4)(x_2 \bar{x}_3 x_4) = 0$ .

BDD являются представлениями булевых функций в виде ориентированных ациклических графов. Как показано в работе [9], таким представлениям соответствуют задания каждой из компонентных функций  $f^i(\mathbf{x})$  в виде пары ортогонализированных ДНФ. Одна из таких ДНФ задает область  $M_{f^i}^1$  единичных значений компонентной функции, другая ДНФ – область  $M_{f^i}^0$  нулевых значений функции. Компактность BDD-представления системы функций в виде графа

обеспечивается тем, что задание графа более компактно, чем перечисление всех путей из корневых вершин к листовым вершинам 0, 1. Для упрощения графа листовые вершины обычно дублируются, а ориентация дуг на рисунках графов BDD не показывается, так как всегда принимается, что дуги ориентированы сверху вниз. Каждому пути из корневой вершины BDD, помеченной функцией  $f^i$ , к листовой вершине 1 соответствует элементарная конъюнкция, включающая дуги (литералы)  $x_i, \bar{x}_i$  на этом пути. При этом дуге, помеченной символом 0, соответствует отрицательный литерал  $\bar{x}_i$ ; дуге, помеченной символом 1, – положительный литерал  $x_i$ , а всем путям между указанными вершинами – дизъюнкция получаемых элементарных конъюнкций, образующая ортогонализированную ДНФ  $D_{f^i}^1$ . Пути из корневой вершины  $f^i$  к листовой вершине 0 задают ортогонализированную ДНФ  $D_{f^i}^0$ .

На рис. 1 показана BDD, представляющая систему булевых функций, которая задана в табл. 1 и 2. В табл. 3 даны ортогонализированные ДНФ, полученные по графовому BDD-представлению на рис. 1 и задающие характеристические множества компонентных функций.

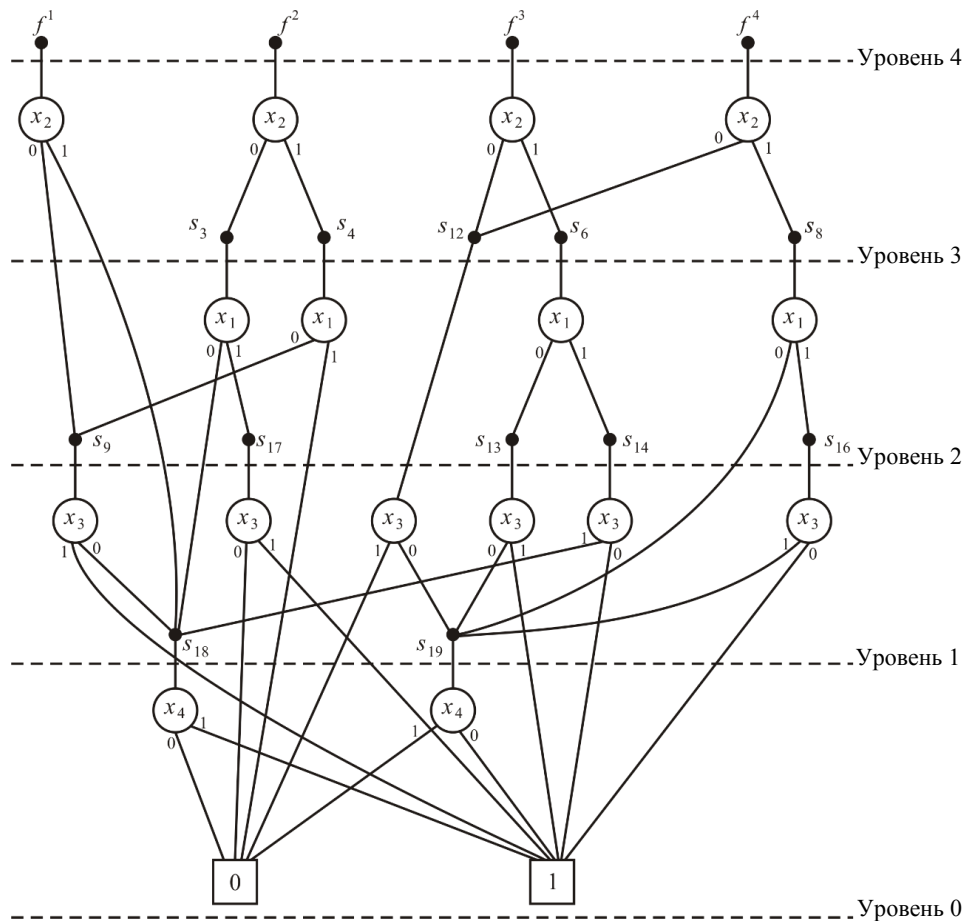


Рис. 1. BDD, реализующая систему булевых функций (см. табл. 1)

Каждой функциональной вершине BDD соответствует формула разложения Шеннона. Например, функциональной вершине  $f^1$  соответствует формула  $f^1 = \bar{x}_2 s_9 \vee x_2 x_4$ , функциональной вершине  $s_{13}$  – формула  $s_{13} = \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3$  и т. д. В литературе функциональные вершины BDD не изображаются, а пометки 0, 1 заменяются различными изображениями дуг. Например, если дуга помечена символом 0, то она рисуется прерывистой линией [7, 8].

Таблица 3  
Ортогонализированные ДНФ,  
полученные по BDD-представлению

ДНФ	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$D_{f^1}^1$	-	1	-	1
	-	0	1	-
	-	0	0	1
$D_{f^2}^1$	1	0	1	-
	0	1	1	-
	0	0	-	1
	0	1	0	1
$D_{f^3}^1$	0	1	1	-
	-	0	0	0
	1	1	0	-
	0	1	0	0
$D_{f^4}^1$	1	1	1	1
	1	1	0	-
	0	1	-	0
	1	1	1	0
	-	0	0	0

Таблица 4  
Матричное задание СДНФ  
функций  $f^1, f^2$

СДНФ	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$D_{f^1}^1$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	
	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	
	1	1	0	1	
	1	1	1	1	
	0	0	1	0	
	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	
	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	
	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	
	0	0	0	1	
	1	0	0	1	
	$D_{f^2}^1$	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
		<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
0		1	1	0	
<b>0</b>		<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	
0		0	0	1	
0		0	1	1	
0		1	0	1	
0		1	0	1	

Всему графу BDD (рис. 1) соответствуют 16 формул:

$$\begin{aligned}
 f^1 &= \bar{x}_2 s_9 \vee x_2 x_4, f^2 = \bar{x}_2 s_3 \vee x_2 s_4, f^3 = \bar{x}_2 s_{12} \vee x_2 s_6, f^4 = \bar{x}_2 s_{12} \vee x_2 s_8, \\
 s_3 &= \bar{x}_1 x_4 \vee x_1 x_3, s_4 = \bar{x}_1 s_9, s_6 = \bar{x}_1 s_{13} \vee x_1 s_{14}, s_8 = \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee x_1 s_{16}, \\
 s_9 &= \bar{x}_3 x_4 \vee x_3, s_{12} = \bar{x}_3 \bar{x}_4, s_{13} = \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_3, s_{14} = \bar{x}_3 \vee x_3 x_4, \\
 s_{16} &= \bar{x}_3 \vee x_3 x_4, s_{17} = x_3, s_{18} = x_4, s_{19} = \bar{x}_4.
 \end{aligned} \tag{3}$$

**Вычисление меры связанности  $\rho_e^n$  подсистемы по BDD-представлению исходной системы булевых функций.** Чтобы вычислить меру связанности  $\rho_e^n(f^1, \dots, f^k)$  подсистемы функций, требуется по BDD-представлению получить ДНФ этих функций, затем по полученным ДНФ определить число наборов, на которых все функции подсистемы одновременно принимают единичное значение.

Приведем пример вычисления меры связанности  $\rho_e^4(f^1, f^2)$  функций  $f^1, f^2$ , ДНФ которых заданы в табл. 3. Напомним, что такие ДНФ были получены по BDD-представлению (рис. 1) системы функций, заданной в табл. 1. Матричное задание совершенных ДНФ (СДНФ) функций  $f^1, f^2$  представлено в табл. 4, где одинаковые двоичные наборы, соответствующие полным элементарным конъюнкциям СДНФ, отмечены жирным шрифтом. Двоичные наборы полных элементарных конъюнкций легко получить заменой «-» в троичном векторе, представляющем элементарную конъюнкцию, всевозможными комбинациями нулей и единиц. Число одинаковых наборов (полных элементарных конъюнкций) равно шести, общее число наборов булева пространства размерности  $n = 4$  равно 16. Поэтому  $\rho_e^4(f^1, f^2) = 6/16 = 0,375$  (37,5 %).

Переход к СДНФ и их сравнение по числу одинаковых полных элементарных конъюнкций являются не единственным способом оценки меры связности. Можно выполнить перемножение ДНФ  $D_{f^1}^1$  &  $D_{f^2}^1$ , полученных по BDD-представлению, вычислить соответствующую ДНФ, а затем перейти к СДНФ:

$$\begin{aligned}
 D_{f^1}^1 \& D_{f^2}^1 &= (x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4) \& (x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4) = \\
 &= \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 = \\
 &= \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4.
 \end{aligned}$$

Полученная СДНФ содержит шесть полных элементарных конъюнкций, соответствующих наборам, которые отмечены в табл. 4 жирным шрифтом. Это и есть наборы, на которых  $f^1$  и  $f^2$  одновременно принимают единичные значения (см. табл. 1).

**Связанность формульных BDD-представлений системы функций.** Обозначим через  $R_{\text{BDD}}(f^1, \dots, f^m)$  множество функциональных вершин (формул) BDD, реализующей систему функций  $f^1(\mathbf{x}), \dots, f^m(\mathbf{x})$ , а через  $R_{\text{BDD}}(f^i)$  – множество функциональных вершин (формул) подграфа BDD, реализующего компонентную функцию  $f^i$ . В рассматриваемом примере множество формул (3) задает  $R_{\text{BDD}}(f^1, f^2, f^3, f^4)$ .

Связанностью  $S_{\text{BDD}}^{\text{node}}(f^1, \dots, f^m)$  по вершинам BDD назовем

$$S_{\text{BDD}}^{\text{node}}(f^1, \dots, f^m) = \left| \bigcap_{i=1}^m R_{\text{BDD}}(f^i) \right|. \quad (4)$$

Иначе говоря, связанностью по вершинам BDD называется число общих функциональных вершин (формул), входящих в BDD-представление системы функций. В рассматриваемом примере  $S_{\text{BDD}}^{\text{node}}(f^1, \dots, f^m) = 0$ , так как нет ни одной общей функциональной вершины при реализации каждой из четырех функций системы. Заметим, что найдутся подсистемы данной системы, для которых связанность по вершинам BDD будет не нулевой. Например, такой подсистемой является  $\{f^1, f^2\}$ :  $R_{\text{BDD}}(f^1) = \{s_9, s_{18}\}$ ,  $R_{\text{BDD}}(f^2) = \{s_3, s_4, s_9, s_{17}, s_{18}\}$ , где две общие функциональные вершины –  $s_9$  и  $s_{18}$ , поэтому  $S_{\text{BDD}}^{\text{node}}(f^1, f^2) = 2$ .

Мерой (долей) связанности  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{node}}(f^1, \dots, f^m)$  системы функций  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), \dots, f^m(\mathbf{x}))$  назовем отношение

$$\rho_{\text{BDD}}^{\text{node}}(f^1, \dots, f^m) = \frac{S_{\text{BDD}}^{\text{node}}(f^1, \dots, f^m)}{\max |R_{\text{BDD}}(f^i)|}. \quad (5)$$

В рассматриваемом примере для подсистемы из двух функций  $f^1, f^2$  значение  $\max |R_{\text{BDD}}(f^2)| = 5$ , поэтому выполняется соотношение

$$\rho_{\text{BDD}}^{\text{node}}(f^1, f^2) = \frac{S_{\text{BDD}}^{\text{node}}(f^1, f^2)}{|R_{\text{BDD}}(f^2)|} = 2 / 5 = 0,4.$$

Доля связанности  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{node}}(f^1, \dots, f^m)$  ограничена:

$$0 \leq \rho_{\text{BDD}}^{\text{node}}(f^1, \dots, f^m) \leq 1. \quad (6)$$

Введем понятие уровня BDD. Листовые константные вершины 0, 1 расположены на уровне 0 (см. рис. 1), функциональные вершины-переменные – на уровне 1 и т. д. Если все переменные системы функций являются существенными, то число всех уровней BDD равно  $n + 1$ . По сути, номер уровня определяет число переменных, от которых зависит подфункция, расположенная на данном уровне.

Связанностью  $S_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^1, \dots, f^m)$  по вершинам BDD с учетом их весов назовем сумму весов общих вершин. Вес общей вершины уровня  $i$  равен  $2^i$ . Однако множество общих вершин в данном случае формируется более сложным образом: из множества общих вершин исключаются «подчиненные» общие вершины. Под «подчиненными» общими вершинами понимаются общие вершины, которые являются дочерними вершинами других общих вершин. Иными сло-

вами, суммируются веса только вершин верхних уровней из множества всех общих вершин. Например, для подсистемы из двух функций  $f^1, f^2$  (см. рис. 1) вес вершины  $s_9$  на уровне 2 равен четырем, а вес вершины  $s_{18}$  на уровне 1 – двум. Поэтому  $S_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^1, f^2) = 4 + 2 = 6$ .

Мерой (долей) связанности  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^1, \dots, f^m)$  системы функций  $f(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), \dots, f^m(\mathbf{x}))$  назовем отношение

$$\rho_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^1, \dots, f^m) = \frac{S_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^1, \dots, f^m)}{2^n}. \quad (7)$$

Подсчитаем меру связанности  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^1, f^2)$  для подсистемы  $\{f^1, f^2\}$ :

$$\rho_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^1, f^2) = \frac{S_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^1, f^2)}{2^4} = 6/16 = 0,375.$$

### Постановка задач и алгоритмы выделения связанных подсистем

*Задача 1.* Задано BDD-представление системы  $f(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), \dots, f^m(\mathbf{x}))$  булевых функций, зависящих от  $n$  переменных, и параметр  $p$  ( $0 < p < 2^n$ ). Требуется выделить из системы  $f(\mathbf{x})$  максимальное число функций, которые могут быть разбиты на минимальное число  $S_p^1$ -связанных подсистем, таких, что каждая из них содержит не менее чем две функции.

*Задача 2.* Задано BDD-представление системы  $f(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), \dots, f^m(\mathbf{x}))$  булевых функций, зависящих от  $n$  переменных, и параметр  $\rho$  ( $0 < \rho < 1$ ). Требуется выделить из системы  $f(\mathbf{x})$  максимальное число функций, которые могут быть разбиты на минимальное число подсистем с мерой связанности  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{node}} \geq \rho$ , причем каждая из подсистем включает не менее чем две функции.

*Задача 3.* Задано BDD-представление системы  $f(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), \dots, f^m(\mathbf{x}))$  булевых функций, зависящих от  $n$  переменных, и параметр  $\rho$  ( $0 < \rho < 1$ ). Требуется выделить из системы  $f(\mathbf{x})$  максимальное число функций, которые могут быть разбиты на минимальное число подсистем с мерой связанности  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{weight}} \geq \rho$ , причем каждая из подсистем включает не менее чем две функции.

Предлагаемый эвристический алгоритм 1 (решение задачи 1) состоит в последовательном формировании (на каждой итерации  $i$ ) очередной подсистемы  $P^i$   $S_p^1$ -связанных функций по текущей (остаточной) системе функций. На первой итерации ( $i = 1$ ) текущую систему функций образуют функции исходной системы.

На каждой итерации требуется выполнить шаги 1–3.

*Шаг 1.* Рассмотреть  $m - 1$  неупорядоченную пару функций  $\{f^1, f^j\}$ ,  $j = 2, \dots, m$ , текущей системы и найти такую пару  $L$  функций, которые являются  $S_q$ -связанными с максимальным значением параметра  $q$ , причем  $q \geq p$ . Если таких пар функций несколько, то выбирается первая из них (эвристика E1). Если указанной пары  $L$  функций нет, то из системы функций нельзя выделить ни одной  $S_p^1$ -связанной подсистемы. Конец алгоритма.

*Шаг 2.* Составить из функций найденной на первом шаге пары  $L$  функций формируемую подсистему  $P^i$  из двух связанных функций, исключив выбранную пару  $L$  функций из текущей системы, и добавлять в формируемую подсистему поочередно те функции  $f^r$ , которые находятся с помощью следующей эвристики.

Эвристика E2. Из множества функций текущей системы выбирается та функция  $f^r$ , которая обеспечивает наибольшее возможное значение параметра  $q$  для подсистемы  $P^i \cup \{f^r\}$ . Если таких функций несколько, то выбирается и добавляется в формируемую подсистему  $P^i$  первая из них.



*Шаг 3.* Если нет ни одной функции  $f^r$ , такой, что подсистема  $P^i \cup \{f^r\}$  является  $S_p^1$ -связанной, – закончить формирование подсистемы  $P^i$  и объявить не входящие в нее функции текущей подсистемой. Переход на шаг 1 (формирование следующей подсистемы на итерации  $i + 1$ ).

*Шаг 4.* Закончить формирование подсистем, когда все функции текущей системы будут включены в формируемые подсистемы либо когда в текущей подсистеме нельзя будет найти ни одной пары функций, которые образуют  $S_p^1$ -связанную подсистему. Конец алгоритма.

Алгоритмы решения задач 2 и 3 аналогичны, только формируемые подсистемы проверяются на выполнение ограничения по связанности для значений параметров  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{node}}$  (задача 2) и  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{weight}}$  (задача 3).

Эвристический алгоритм 2 (решение задач 1–3) является более быстродействующим по сравнению с алгоритмом 1 и позволяет находить пары связанных функций, при этом мера связанности найденных пар удовлетворяет ограничению  $\rho$ . Алгоритм 2 отличается от алгоритма 1 тем, что в алгоритме 2 не выполняется шаг 2.

**Пример выделения связанных подсистем.** Проиллюстрируем эвристический алгоритм 2 для решения задач 1–3 на примере выделения пар связанных функций для BDD-представления (см. рис. 1), заданного формулами (3) для меры связанности  $\rho = 20\%$ . В табл. 5 указаны меры связанности  $\rho_e^4(f^i, f^j)$  пар функций – одна из функций  $f^i$  пары соответствует строке, вторая  $f^j$  – столбцу. Для функции  $f^1$  наибольшая мера связанности будет для пары  $\rho_e^4(f^1, f^2) = 6/16 = 0,375$ , что соответствует 37,5%. Оставшаяся пара  $\{f^3, f^4\}$  имеет меру связанности  $\rho_e^4(f^3, f^4) = 0,375$  (37,5%), что также больше 20%. Решением задачи 1 являются пары  $\{f^1, f^2\}$  и  $\{f^3, f^4\}$ . В табл. 5–7 жирным шрифтом выделены значения мер связанности, по которым формируются связанные пары функций.

Таблица 5  
Мера связанности  $\rho_e^4(f^i, f^j)$  пар функций

	$f^2$	$f^3$	$f^4$
$f^1$	<b>37,5</b>	18,75	6,25
$f^2$	–	12,5	6,25
$f^3$	–	–	<b>37,5</b>

Аналогичные решения имеют задачи 2 и 3. Соответствующие меры связанности пар функций приведены в табл. 6 и 7. Заметим, что для данного примера значения меры связанности  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{node}}(f^i, f^j)$  более близки к значениям эталонной меры связанности  $\rho_e^4(f^i, f^j)$  по сравнению со значениями меры связанности  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^i, f^j)$ . Однако при экспериментальном исследовании алгоритмов решения задач 1–3 использование  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^i, f^j)$  иногда позволяло получать лучшие решения при синтезе схем.

Таблица 6  
Мера связанности  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{node}}(f^i, f^j)$   
пар функций

	$f^2$	$f^3$	$f^4$
$f^1$	<b>40</b>	16,6	0
$f^2$	–	16,6	0
$f^3$	–	–	<b>33,3</b>

Таблица 7  
Мера связанности  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^i, f^j)$   
пар функций

	$f^2$	$f^3$	$f^4$
$f^1$	<b>37,5</b>	12,5	0
$f^2$	–	12,5	0
$f^3$	–	–	<b>62,5</b>

Приведем подсчет меры связанности  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^3, f^4)$  для пары  $\{f^3, f^4\}$ . BDD-представление подсистемы  $\{f^3, f^4\}$  (см. рис. 1) содержит общие функциональные вершины  $s_{12}$  и  $s_{19}$ . Вершина  $s_{12}$  расположена на третьем уровне BDD и имеет вес  $2^3 = 8$ , вершина  $s_{19}$  – на первом уровне и имеет вес  $2^1 = 2$ . Следовательно, связанность  $S_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^3, f^4) = 8 + 2 = 10$ , мера связанности  $\rho_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^3, f^4) = \frac{S_{\text{BDD}}^{\text{weight}}(f^3, f^4)}{2^4} = 10/16 = 0,625$  (62,5 %) (см. табл. 7).

**Программная реализация.** Предложенные алгоритмы решения задач 1–3 были программно реализованы в среде QtCreator на языке программирования C++ с использованием библиотеки классов Qt [12] и включены в систему FLC [13] логической оптимизации функционально-структурных описаний дискретных устройств.

Программы выделения подсистем (либо пар) связанных функций используются для технологически независимой оптимизации функциональных описаний схем комбинационной логики. Оптимизация таких описаний в системе FLC осуществляется на основе различных методов совместной и раздельной минимизации систем булевых функций в классе ДНФ, методов декомпозиции и методов многоуровневой минимизации BDD- и BDDI-представлений систем булевых функций. Разработанные по алгоритмам выделения подсистем функций программы используются как предварительный этап для минимизации BDD- и BDDI-представлений систем булевых функций. Выполнение этого этапа позволяет уменьшить сложность минимизированных BDD- и BDDI-описаний по такому критерию, как суммарное число литералов. Данный критерий оценки сложности алгебраических представлений систем функций давно используется при синтезе логических схем [1]. Разработанные программы выделения подсистем связанных функций могут быть использованы также в системе CMOSLD [14], предназначенной для проектирования заказных КМОП СБИС.

**Экспериментальные исследования.** Для проверки эффективности влияния алгоритмов выделения связанных подсистем функций на сложность (площадь) логических схем были проведены вычислительные эксперименты. Синтез схем из библиотечных КМОП-элементов по VHDL-описаниям во всех случаях выполнялся в системе LeonardoSpectrum [15] при одних и тех же режимах (опциях) синтеза. Под площадью схемы на этапе логического проектирования обычно понимается суммарная площадь кристалла, требуемая для размещения элементов схемы. Хотя данный критерий оценки сложности является приблизительным (в расчет не принимается площадь под межсоединения элементов схемы), он часто используется на этапе логического проектирования схем в отличие от этапа топологического проектирования, когда под площадью понимается общая площадь под элементы и межсоединения (связи) элементов. Далее в экспериментах площадь  $S_{\text{ASIC}}$  схемы из библиотечных КМОП-элементов подсчитывалась как сумма площадей элементов, составляющих схему. Именно такую оценку сложности синтезированной схемы получает LeonardoSpectrum. Библиотека логических элементов представлена в работе [9, с. 191], пример логической схемы из элементов данной библиотеки и подсчет ее площади приведены в статье [16].

Примеры матричных SF-описаний систем функций были взяты из набора промышленных тестовых примеров [17], и для каждого них были построены BDD-представления с помощью программы Tie\_BDD [9], входящей в систему FLC логической оптимизации [13]. При BDD-оптимизации программа Tie\_BDD испытывала 5000 перестановок переменных исходной системы функций, перестановки оценивались по числу функциональных вершин и BDD-представление выбиралось по той перестановке, которая давала минимальное число функциональных вершин. После выделения связанных подсистем они оптимизировались в классе BDDI с помощью программы BDD-Builder [10] либо Tie\_BDD. Программа BDD-Builder при выборе очередной переменной разложения руководствовалась правилом: выбиралась та переменная, по которой использовалось минимальное число различных взаимно инверсных подфункций разложения Шеннона. Схема организации экспериментов показана на рис. 2.

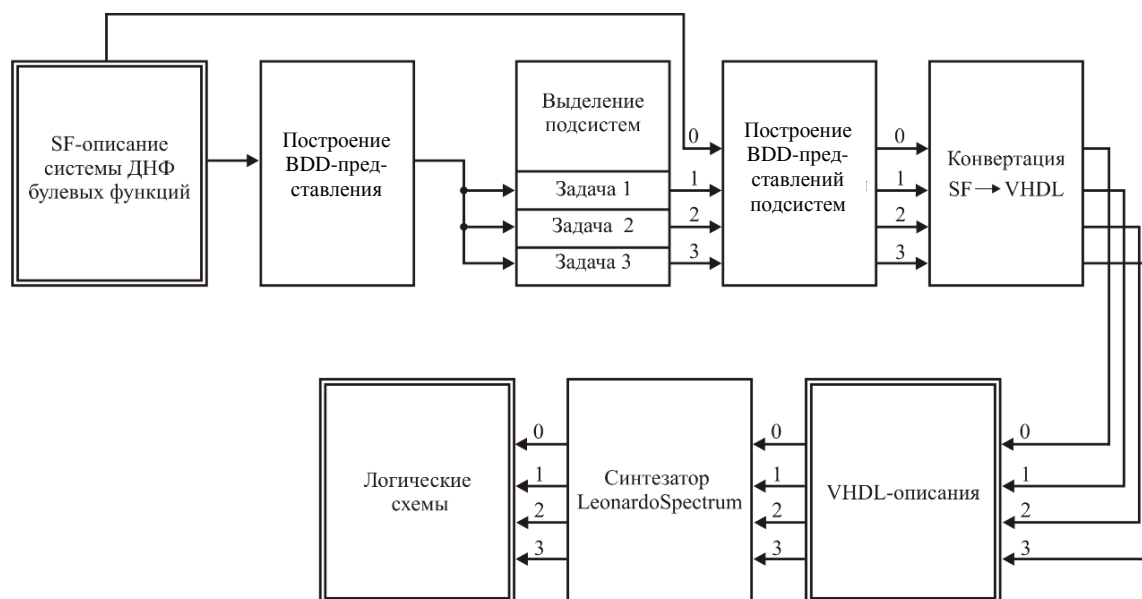


Рис. 2. Организация экспериментов

Результаты экспериментов представлены в табл. 8–12, где  $n$  – число переменных;  $m$  – число функций системы;  $k$  – число общих элементарных конъюнкций исходной системы ДНФ булевых функций, по которой строилось BDD-представление;  $S_{ASIC}$  – площадь логической схемы;  $t(c)$  – время выполнения программы на персональном компьютере с процессором AMD Ryzen 5 2400G. Жирным шрифтом в табл. 8–12 выделены лучшие решения – схемы меньшей площади. Все значения различных мер связанности  $\rho_e^n$ ,  $\rho_{BDD}^{node}$ ,  $\rho_{BDD}^{weight}$  (табл. 8, 10–12) заданы в процентах.

*Эксперимент 1.* Исследовался алгоритм 1 для решения задач 1–3. Результаты эксперимента 1 для промышленных примеров схем приведены в табл. 8–10.

Результаты эксперимента 1 для «блочных» систем ДНФ представлены в табл. 9 и 10. Общий вид «блочных» систем ДНФ показан на рис. 3, число общих переменных для пары блоков – не более четырех.

Таблица 8

Результаты эксперимента 1 для промышленных примеров

Пример	$n$	$m$	Мера связанности, %	BDD исходной системы $S_{ASIC}$	Выделение подсистем связанных функций, оптимизация BDDI					
					Задача 1		Задача 2		Задача 3	
					$S_{ASIC}$	$t, c$	$S_{ASIC}$	$t, c$	$S_{ASIC}$	$t, c$
ADD6	12	7	25	<b>12 806</b>	<b>12 806</b>	0,180	<b>12 806</b>	0,007	<b>12 806</b>	0,012
ADDM4	9	8	10	80 782	<b>71 173</b>	0,161	83 226	0,192	73 522	0,206
B12	15	9	20	18 966	<b>16 009</b>	0,017	16 472	0,007	17 744	0,013
B2	16	17	20	<b>199 106</b>	261 730	8,904	215 020	15,154	252 138	14,219
B9	16	5	5	<b>27 621</b>	28 620	0,048	28 369	0,013	27 889	0,023
IN0	15	11	15	94 620	91 306	0,237	90 190	0,335	<b>89 486</b>	0,587
INTB	15	7	20	<b>273 532</b>	311 470	2,585	308 379	6,679	308 379	5,053
M181	15	9	15	18 849	<b>16 467</b>	0,014	19 469	0,005	19 156	0,026
M2	8	16	15	<b>45 114</b>	47 357	0,046	<b>45 114</b>	0,091	47 413	0,157
M3	8	16	15	<b>52 580</b>	53 657	0,068	53 445	0,189	58 942	0,201
MP2D	14	14	15	<b>17 471</b>	18 135	0,038	17 700	0,043	18 252	0,077
P82	5	14	5	19 988	<b>18 620</b>	0,009	20 082	0,018	20 981	0,134
ROOT	8	5	5	26 109	27 816	0,025	<b>25 194</b>	0,024	26 494	0,034
T3	12	8	5	16 534	17 276	0,008	<b>14 558</b>	0,010	17 772	0,070
TIAL	14	8	15	360 264	<b>325 219</b>	6,113	390 846	4,619	335 079	5,607
Z5XP1	7	10	25	<b>18 442</b>	<b>18 442</b>	0,012	20 412	0,011	18 827	0,032

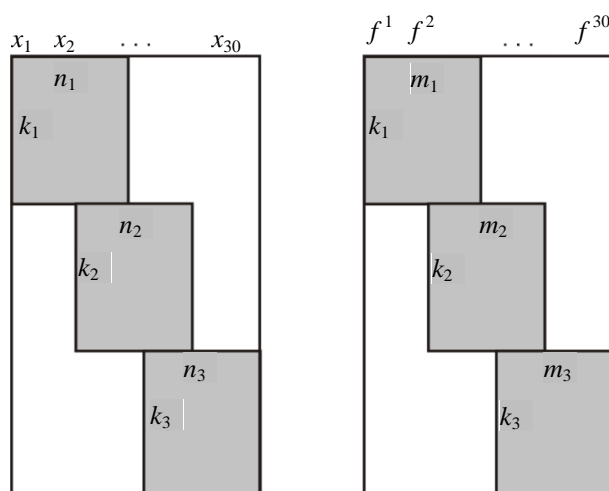


Рис. 3. Общий вид матричного задания «блочных» систем ДНФ

Таблица 9

Результаты эксперимента 1 для «блочных» систем ДНФ – сложности  $S_{ASIC}$  схем при реализации исходной системы ДНФ-функций

Пример	$n$	$m$	$k$	Оптимизация BDD	Оптимизация BDDI
				$S_{ASIC}$	$S_{ASIC}$
BL_1	30	30	400	3 616 883	<b>3 406 194</b>
BL_2	30	30	605	4 165 967	<b>4 064 779</b>
BL_3	30	30	636	<b>4 457 806</b>	4 482 687

Алгоритмы выделения подсистем связанных функций из BDD-представлений системы функций позволяют сформировать подсистемы, которые соответствуют блокам матричного представления исходной системы ДНФ функций. Для блочных систем функций выделение связанных подсистем является целесообразным при последующем синтезе.

Таблица 10

Результаты эксперимента 1 для «блочных» систем ДНФ

Пример	Мера связанности, %	Выделение подсистем связанных функций							
		Задача 2				Задача 3			
		Число подсистем	$t, c$	Оптимизация BDD	Оптимизация BDDI	Число подсистем	$t, c$	Оптимизация BDD	Оптимизация BDDI
				$S_{ASIC}$	$S_{ASIC}$			$S_{ASIC}$	$S_{ASIC}$
BL_1	5	3	529	3 207 367	3 247 783	11	408	<b>3 192 418</b>	3 436 594
	10	4	456	3 385 749	3 210 196	4	476	3 556 564	3 339 970
	20	1	539	3 469 583	3 279 193	3	538	3 566 357	3 494 743
	40	0	708	3 616 883	3 406 194	0	714	3 616 883	3 406 194
BL_2	5	2	648	3 635 275	3 681 500	13	496	3 869 646	3 963 865
	10	4	547	<b>3 532 146</b>	3 657 450	12	420	3 931 127	4 113 370
	20	5	437	3 849 904	3 788 653	0	949	4 165 967	4 064 779
	40	0	929	4 165 967	4 064 779	0	951	4 165 967	4 064 779
BL_3	5	2	1004	4 119 915	<b>3 969 690</b>	10	850	4 222 057	4 551 807
	10	3	1003	4 210 657	4 050 701	12	673	4 478 184	4 665 884
	20	5	692	4 099 135	4 238 205	4	1081	4 387 476	4 346 011
	40	0	1271	4 457 806	4 482 687	0	1307	4 457 806	4 482 687

Эксперимент 2. Исследовался алгоритм 2 – выделение пар связанных функций, исходными данными были матричные представления систем ДНФ булевых функций. Результаты приведены в табл. 11 и 12.

Таблица 11

Результаты эксперимента 2, площади схем

Пример	$n$	$m$	Мера связанности, %	BDDI исходной системы $S_{ASIC}$	Выделение пар связанных функций, оптимизация BDDI		
					Задача 1 $S_{ASIC}$	Задача 2 $S_{ASIC}$	Задача 3 $S_{ASIC}$
ADD6	12	7	50	<b>12 806</b>	12 806	12 806	12 806
ADDM4	9	8	20	80 782	76 368	<b>75 810</b>	81 083
B12	15	9	10	18 966	16 506	<b>15 485</b>	19 017
B2	16	17	20	<b>199 106</b>	208 128	208 128	261 005
B9	16	5	10	27 621	27 621	27 889	<b>27 242</b>
IN0	15	11	25	94 620	92 081	93 281	<b>89 486</b>
INTB	15	7	50	<b>273 532</b>	273 532	273 532	273 532
M181	15	9	25	18 849	16 026	<b>15 468</b>	18 955
M2	8	16	15	45 114	46 520	<b>44 088</b>	49 232
M3	8	16	15	<b>52 580</b>	53 936	54 634	54 154
MP2D	14	14	10	<b>17 471</b>	18 738	17 700	18 576
P82	5	14	25	19 988	<b>19 039</b>	20 947	22 766
ROOT	8	5	25	26 109	<b>25 194</b>	25 618	<b>25 194</b>
T3	12	8	15	16 534	16 534	<b>14 558</b>	16 941
TIAL	14	8	15	360 264	<b>279 960</b>	362 164	332 847
Z5XP1	7	10	25	18 442	19 279	18 793	<b>18 369</b>

Анализ результатов проведенных экспериментов позволяет сделать вывод о том, что алгоритмы 1 и 2 решения задач 1–3 являются конкурирующими. Эксперимент 2 показал, что для испытанных значений меры связанности выделяется мало пар связанных функций (если в табл. 12 элемент равен нулю, то это значит, что нет ни одной пары с заданным значением меры связанности). Для примеров небольшой размерности (до 16 входов и выходов) программы справляются за 0,5 с, но в случае BDD с большим числом уравнений, например B2 (697 уравнений), INTB (792 уравнения), TIAL (807 уравнений), время выделения подсистем связанных функций может доходить до 15 с. Для больших псевдослучайных примеров (BL\_1, BL\_2, BL\_3) с числом входов и выходов, равным 30, время работы программ составляет 10–15 мин. Такие примеры содержат более 7000 уравнений (например, BL\_1 состоит из 7477 уравнений). На практике требуется перебор значений параметра меры связанности, потому что при меньшем значении данного параметра могут быть найдены пары связанных функций и это может дать положительный эффект при синтезе.

Таблица 12

Результаты эксперимента 2, число выделенных пар связанных функций

Пример	Мера связанности, %	Задача 1		Задача 2		Задача 3	
		Число пар	$t, c$	Число пар	$t, c$	Число пар	$t, c$
ADD6	50	0	0,191	0	0,007	0	0,006
ADDM4	20	1	0,072	3	0,035	1	0,074
B12	10	1	0,005	2	0,001	2	0,002
B2	20	1	3,140	1	2,264	3	4,128
B9	10	0	0,025	1	0,005	1	0,010
IN0	25	1	0,317	2	0,199	3	0,198
INTB	50	0	7,626	0	4,792	0	4,770
M181	25	1	0,006	2	0,002	2	0,003
M2	15	1	0,027	2	0,011	4	0,009
M3	15	1	0,040	3	0,011	2	0,011
MP2D	10	1	0,013	3	0,005	2	0,008
P82	25	1	0,006	2	0,002	5	0,002
ROOT	25	1	0,012	2	0,004	1	0,006
T3	15	0	0,016	2	0,004	3	0,003
TIAL	15	1	2,821	1	4,126	1	3,998
Z5XP1	25	1	0,011	1	0,005	2	0,004

**Заключение.** Эксперименты показали, что для исследованного набора тестовых примеров систем булевых функций выделение связанных подсистем может оказаться эффективной процедурой при логической оптимизации многоуровневых BDD- либо BDDI-представлений, так как при последующем синтезе схемы получаются схемы меньшей площади. При этом не вошедшие в подсистемы функции целесообразно объединять в одну подсистему, а не формировать подсистемы, состоящие из одной функции. Для блочных систем ДНФ предложенный алгоритм позволяет выделять блоки из BDD-представлений исходной системы функций. Для промышленных примеров систем ДНФ BDDI-оптимизация имеет преимущество по сравнению с BDD-оптимизацией выделенных подсистем. Предложенные оценки меры связанности формульных BDD-представлений оказались конкурирующими, при этом решение более трудоемкой задачи 1 позволяет получать лучшие решения по сравнению с решениями задач 2 и 3. Алгоритм выделения пар связанных функций является быстродействующим и также позволяет в ряде примеров уменьшать сложность синтезируемых логических схем. Эксперименты показали, что при практическом использовании соответствующих программ возникает важная задача выбора значения параметра «мера связанности».

#### Список использованных источников

1. Брейтон, Р. К. Синтез многоуровневых комбинационных логических схем / Р. К. Брейтон, Г. Д. Хэчтел, А. Л. Санджованни-Винчензелли // ТИИЭР. – 1990. – Т. 78, № 2. – С. 38–83.
2. Logic Minimization Algorithm for VLSI Synthesis / K. R. Brayton [et al.]. – Boston : Kluwer Academic Publishers, 1984. – 193 p.
3. Закревский, А. Д. Логические основы проектирования дискретных устройств / А. Д. Закревский, Ю. В. Поттосин, Л. Д. Черемисинова. – М. : Физматлит, 2007. – 592 с.
4. Бибило, П. Н. Декомпозиция булевых функций на основе решения логических уравнений / П. Н. Бибило. – Минск : Беларус. навука, 2009. – 211 с.
5. Кузнецов, О. П. О программной реализации логических функций и автоматов / О. П. Кузнецов // Автоматика и телемеханика. – 1977. – № 7. – С. 63–74.
6. Akers, S. B. Binary decision diagrams / S. B. Akers // IEEE Trans. on Computers. – 1978. – Vol. C-27, no. 6. – P. 509–516.
7. Bryant, R. E. Ordered binary decision diagrams / R. E. Bryant, C. Meinel // Logic Synthesis and Verification / ed.: S. Hassoun, T. Sasao, R. K. Brayton. – Kluwer Academic Publishers, 2002. – P. 285–307.
8. Yang, S. BDS: a BDD-based logic optimization system / S. Yang, M. Ciesielski // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – 2002. – Vol. 21, no. 7. – P. 866–876.
9. Бибило, П. Н. Применение диаграмм двоичного выбора при синтезе логических схем / П. Н. Бибило. – Минск : Беларус. навука, 2014. – 231 с.
10. Бибило, П. Н. Использование полиномов Жегалкина при минимизации многоуровневых представлений систем булевых функций на основе разложения Шеннона / П. Н. Бибило, Ю. Ю. Ланкевич // Программная инженерия. – 2017. – № 3. – С. 369–384.
11. Бибило, П. Н. Разбиение системы булевых функций на подсистемы «связанных» функций / П. Н. Бибило // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2019. – № 2. – С. 14–29.
12. Шлее, М. Qt 5.3. Профессиональное программирование на C++ / М. Шлее. – СПб. : БХВ-Петербург, 2015. – 928 с.
13. Бибило, П. Н. Логическое проектирование дискретных устройств с использованием производно-фреймовой модели представления знаний / П. Н. Бибило, В. И. Романов. – Минск : Беларус. навука, 2011. – 279 с.
14. Система логического проектирования функциональных блоков заказных КМОП СБИС с пониженным энергопотреблением / П. Н. Бибило [и др.] // Микроэлектроника. – 2017. – Т. 46, № 1. – С. 72–88.
15. Бибило, П. Н. Системы проектирования интегральных схем на основе языка VHDL. StateCAD, ModelSim, LeonardoSpectrum / П. Н. Бибило. – М. : СОЛОН-Пресс, 2005. – 384 с.
16. Авдеев, Н. А. Эффективность логической оптимизации при синтезе комбинационных схем из библиотечных элементов / Н. А. Авдеев, П. Н. Бибило // Микроэлектроника. – 2015. – Т. 44, № 5. – С. 383–399.
17. Jeong, C. Computer-aided design of digital systems / C. Jeong // Department of Computer Science [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www1.cs.columbia.edu/~cs6861/sis/espresso-examples/ex>. – Date of access: 20.03.2018.

## References

1. Brayton R. K., Hachtel G. D., Sangiovanni-Vincentelli A. L. Sintez mnogourovnevnykh kombinacionnykh logicheskikh skhem [Synthesis of multi-level combinational logic circuits]. Trudy Institute inzhenerov po jelektronike i radiotekhnike [*Proceedings of the Institute of Electronics and Radio Engineering*], 1990, vol. 78, no. 2, pp. 38–83 (in Russian).
2. Brayton K. R., Hachtel G. D., McMullen C., Sangiovanni-Vincentelli A. L. *Logic Minimization Algorithm for VLSI Synthesis*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1984, 193 p.
3. Zakrevskij A. D., Pottosin Ju. V., Cheremisinova L. D. Logicheskie osnovy proektirovaniya diskretnykh ustrojstv. *Logical Bases of Design of Discrete Devices*. Moscow, Fizmatlit, 2007, 592 p. (in Russian).
4. Bibilo P. N. Dekompoziciya bulevykh funkcyj na osnove resheniya logicheskikh uravnenij. *Decomposition of Boolean Functions Based on the Solution of Logical Equations*. Minsk, Belaruskaja navuka, 2009, 211 p. (in Russian).
5. Kuznecov O. P. O programmnoj realizacii logicheskikh funkcyj i avtomatov [On the software implementation of logical functions and automata]. *Avtomatika i telemekhanika [Automation and Telematics]*, 1977, no. 7, pp. 63–74 (in Russian).
6. Akers S. B. Binary decision diagrams. *IEEE Transactions on Computers*, 1978, vol. C-27, no. 6, pp. 509–516.
7. Bryant R. E., Meinel C. Ordered binary decision diagrams. *Logic Synthesis and Verification*. In S. Hassoun, T. Sasao, R. K. Brayton. Kluwer Academic Publishers, 2002, pp. 285–307.
8. Yang S., Ciesielski M. BDS: a BDD-based logic optimization system. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2002, vol. 21, no. 7, pp. 866–876.
9. Bibilo P. N. Primenenie diagram dvoichnogo vybora pri sinteze logicheskikh skhem. *Application of Binary Selection Diagrams in the Synthesis of Logic Circuits*. Minsk, Belaruskaja navuka, 2014, 231 p. (in Russian).
10. Bibilo P. N., Lankevich Yu. Yu. Ispol'zovanie polinomov Zhegalkina pri minimizacii mnogourovnevnykh predstavlenij system bulevykh funkcyj na osnove razlozheniya Shennona [The use of Zhegalkin polynomials in minimizing multilevel representations of systems of Boolean functions based on the Shannon expansion]. *Programmnyaya inzheneriya [Software Engineering]*, 2017, no. 3, pp. 369–384 (in Russian).
11. Bibilo P. N. Razbienie sistemy bulevykh funkcyj na podsistemy "svyazannyh" funkcyj [Partitioning a system of Boolean functions into subsystems of "related" functions]. *Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Teoriya i sistem upravleniya [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems]*, 2019, no. 2, pp. 14–29 (in Russian).
12. SHlee M. Qt 5.3. Professional'noe programmirovanie na S++. *Qt 5.3. Professional C++ Programming*. Saint Petersburg, BHV-Peterburg, 2015, 928 p. (in Russian).
13. Bibilo P. N., Romanov V. I. Logicheskoe proektirovanie diskretnykh ustrojstv s ispol'zovaniem produkcijno-frejmovoj modeli predstavlenija znaniy. *Logical Design of Discrete Devices Using a Production-Frame Knowledge Representation Model*. Minsk, Belaruskaja navuka, 2011, 279 p. (in Russian).
14. Bibilo P. N., Avdeev N. A., Kardash S. N., Kirienko N. A., Lankevich Yu. Yu., ..., Cheremisinova L. D. Sistema logicheskogo proektirovaniya funkcional'nykh blokov zakaznyh KMOP SBIS s ponizhennym energopotreblenijem [System for the logical design of functional blocks of custom CMOS VLSI with low power consumption]. *Mikroelektronika [Microelectronics]*, 2017, vol. 46, no. 1, pp. 72–88 (in Russian).
15. Bibilo P. N. Cistemy proektirovaniya integral'nykh skhem na osnove yazyka VHDL. *StateCAD, ModelSim, LeonardoSpectrum. Integrated Circuit Design Systems Based on the VHDL Language. StateCAD, ModelSim, LeonardoSpectrum*. Moscow, SOLON-Press, 2005, 384 p. (in Russian).
16. Avdeev N. A., Bibilo P. N. Effektivnost' logicheskoy optimizacii pri sinteze kombinacionnykh skhem iz bibliotechnykh elementov [The effectiveness of logical optimization in the synthesis of combinational circuits from library elements]. *Mikroelektronika [Microelectronics]*, 2015, vol. 44, no. 5, pp. 383–399 (in Russian).
17. Jeong C. Computer-aided design of digital systems. *Department of Computer Science*. Available at: <http://www1.cs.columbia.edu/~cs6861/sis/espresso-examples/ex> (accessed 20.03.2018).

## Информация об авторах

Бибилло Петр Николаевич, доктор технических наук, профессор, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
E-mail: bibilo@newman.bas-net.by

Позняк Андрей Михайлович, магистрант, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
E-mail: krucios@mail.ru

## Information about the authors

Petr N. Bibilo, Dr. Sci. (Eng.), Professor, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: bibilo@newman.bas-net.by

Andrei M. Pazniak, Undergraduate, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: krucios@mail.ru