

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)  
УДК 681.511

Поступила в редакцию 16.07.2019  
Received 16.07.2019

Принята к публикации 01.08.2019  
Accepted 01.08.2019

## Алгоритм синтеза устойчивых характеристических полиномов динамических систем при условии вариации параметров

А. А. Несенчук

*Объединенный институт проблем информатики  
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
E-mail: anes@newman.bas-net.by*

**Аннотация.** Рассматриваются динамические системы с возмущенными параметрами, описываемые семействами характеристических полиномов третьего порядка с коэффициентами в пределах заданных интервалов значений. Динамика системы определяется в форме корневого портрета. Вводится понятие доминирующего поля корневых траекторий семейства, на основе которого формулируется условие устойчивости системы. На базе особенностей конфигурации корневых портретов подобных систем и графоаналитического подхода к их анализу и синтезу формируется алгоритм расчета параметров характеристического уравнения системы, обеспечивающих ее робастную устойчивость в случае неустойчивости исходной системы. Алгоритм реализуется в графоаналитическом варианте. Исследование устойчивости семейства и синтез, в случае необходимости, новых значений параметров выполняются на основе анализа расположения доминирующего поля корневых траекторий семейства в плоскости корней системы.

**Ключевые слова:** характеристический полином, динамическая система, параметрические вариации, корневой портрет, доминирующее поле корневых траекторий

**Благодарность.** Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ № Ф18Р-251 «Разработка корневых методов анализа и синтеза систем управления с гарантируемой динамикой, обеспечиваемой в условиях неопределенности параметров управляемых объектов».

**Для цитирования.** Несенчук А. А. Алгоритм синтеза устойчивых характеристических полиномов динамических систем при условии вариации параметров / А. А. Несенчук // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 51–62.

---

---

## Algorithm for synthesis of the stable characteristic polynomials for dynamic systems under parametric variations

Alla A. Nesenchuk

*The United Institute of Informatics Problems of the National Academy  
of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
E-mail: anes@newman.bas-net.by*

**Abstract.** The paper deals with the dynamic systems with perturbed parameters described by the families of the third order characteristic polynomials having coefficients within the given intervals of values. The system dynamics is represented in the form of the root locus portrait. The notion of the root locus field of the family is introduced that is the basis for the system stability condition formulation. Root locus portrait configuration peculiarities of the systems of the kind and graphic-analytical approach to their analysis and synthesis serve as the basis for the system characteristic equation parameters calculation algorithm ensuring its robust stability in case of the given system proven unstable. Algorithm is implemented in the graphic-analytical form. System

stability investigation and synthesis, in case of necessity, of the new parameters values are performed on the basis of estimation of the family root locus dominating field location character in the roots plane.

**Keywords:** characteristic polynomial, dynamic system, parametric variations, root locus portrait, dominating root locus field

**Acknowledgements.** This work was supported by the grant of the BRFFR no. Ф18Р-251 "Development of root methods for the analysis and synthesis of control systems with guaranteed dynamics provided under conditions of uncertainty in the parameters of controlled objects".

**For citation.** Nesenchuk A. A. Algorithm for synthesis of the stable characteristic polynomials for dynamic systems under parametric variations. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 51–62 (in Russian).

**Введение.** Развитие и усложнение современных управляемых технических объектов, повышение требований к качеству их функционирования обуславливают необходимость совершенствования систем автоматического управления данными объектами, что особенно важно в тех случаях, когда объект работает в условиях неопределенности, существенных параметрических вариаций [1]. По этой причине большое значение имеет изучение влияния неопределенности и параметрических возмущений, вызываемых различными неблагоприятными и часто непредвиденными факторами, на устойчивость и качество функционирования системы.

Обеспечение приемлемых динамических характеристик функционирования объектов управления в условиях неопределенности является одной из главных движущих сил в развитии теории автоматического управления с обратной связью [2]. Поэтому актуальным является вопрос более глубокого исследования динамических свойств систем управления в условиях изменяющихся параметров и минимизации или устранения отрицательных последствий обеспечения робастности систем [1–14]. Выделяют три основных подхода к исследованию: алгебраический, частотный и корневой. Алгебраический и корневой подходы могут быть, в свою очередь, отнесены к так называемому «полиномиальному» подходу, который впервые возник в 60–70-х гг. XX в. как особый подход к проектированию и синтезу систем автоматического управления [3]. В книге В. Кучеры [3] отмечается, что полиномиальное описание динамики систем во многих случаях является наиболее естественным и полиномиальные модели позволяют продемонстрировать важное свойство систем – динамику нулей и полюсов в транспарентной (прозрачной) форме. Здесь же рассматриваются вопросы прошлого, настоящего и будущего развития полиномиального управления в динамических системах.

Одной из первых и наиболее значимых публикаций в данном направлении является посвященная исследованию характеристических полиномов систем с интервально-возмущенными параметрами статья В. Л. Харитонова [4], в которой рассмотрено алгебраическое условие устойчивости полиномиального семейства. Б. Андерсон в своей работе [5] значительно упростил условия Харитонова для полиномов низких степеней. Основные результаты, полученные в рамках частотного подхода к робастности управления, изложены в монографиях [6, 7], где рассматриваются различные классы систем и задачи в разных постановках. Корневой подход к решению задач анализа и синтеза систем, в том числе задач синтеза полиномиальных семейств, представлен также в работах [8–14].

Несмотря на значительное количество научных результатов, полученных в области решения задач построения автоматического управления в условиях неопределенности (в частности, задач обеспечения робастности систем), наиболее общие методы разработаны в основном для решения задач анализа. Методы из области синтеза имеют, как правило, частный характер: не существует достаточно общих методов синтеза, которые были бы просты, наглядны, удобны в использовании и не были бы привязаны к конкретному объекту управления. Корневое направление исследований перспективно именно при решении задач синтеза систем в условиях неопределенности, поскольку, являясь мощным инструментом синтеза систем, корневой годограф по своей природе предполагает параметрические вариации и особенно удобен при использовании в графоаналитическом и графическом вариантах.

В настоящей работе приводятся результаты исследования динамических свойств систем с возмущенными параметрами, определяется корневое условие устойчивости для систем третьего порядка, используемое для проверки устойчивости и параметрического синтеза систем на основе графоаналитического подхода.

**Конфигурация и динамика корневых портретов систем.** Опишем динамику системы третьего порядка с возмущенными параметрами в виде полинома

$$s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = p(s), \quad (1)$$

где  $a_j \in [\underline{a}_j, \bar{a}_j]$ ,  $j = 1, \dots, 3$ ;  $s = \sigma + i\omega$ .

Для установления характера изменения динамических свойств полинома (1) в зависимости от параметрических вариаций исследуем основные конфигурации, которые может принимать его корневой портрет  $P$  при всех возможных значениях изменяющихся параметров, и характер пересечения годографами границы устойчивости.

Запишем уравнение свободного корневого годографа полинома (1) [8, 9]

$$3\sigma^2\omega - \omega^3 + 2a_1\sigma\omega + a_2\omega = v(\sigma, \omega) = 0 \quad (2)$$

и уравнение параметра полинома (1) [8, 9]

$$-\sigma^3 + 3\sigma\omega^2 - a_1\sigma^2 + a_1\omega^2 - a_2\sigma = u(\sigma, \omega) = a_3. \quad (3)$$

С целью исследования устойчивости системы приведем также уравнение миграции корней на границе устойчивости

$$\omega^3 - a_2\omega = 0 \quad (4)$$

и функцию параметра на границе устойчивости

$$f(\omega) = a_1\omega^2 = a_3. \quad (5)$$

Для решения поставленной задачи представим корневой портрет системы  $P$  в форме бесконечного множества двухпараметрических полей  $F_i$  корневых траекторий [9]:

$$P = \{F_i\}, i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

**Определение 1.** Параметром, или свободным параметром корневого годографа алгебраического уравнения (полинома), назовем коэффициент этого уравнения или параметр описываемой данным уравнением динамической системы, варьируемый по определенному закону с целью построения корневого годографа.

**Определение 2.** Параметром поля корневых траекторий динамической системы с характеристическим уравнением (1) назовем некоторый параметр образа корневого годографа [2] или коэффициент (параметр) характеристического уравнения (1), изменяемый в промежутке  $(-\infty, +\infty)$  с целью получения поля корневых траекторий данной системы.

В качестве параметра годографа определим свободный коэффициент  $a_3$ , т. е. будем рассматривать свободные годографы [10], а в качестве параметра поля – коэффициент  $a_2$  полинома (1).

Все поля, формирующие корневой портрет системы (6), обладают идентичными математическими свойствами, что позволяет для установления свойств корневого портрета в целом исследовать динамику отдельного поля. Запишем общие выражения соответственно для функции поля и его линий уровня:

$$F(\sigma, \omega) = 3\sigma^2 - \omega^2 + 2a_1\sigma, \tag{7}$$

$$F(\sigma, \omega) = 3\sigma^2 - \omega^2 + 2a_1\sigma = -a_2 = \text{const}. \tag{8}$$

На основе представленной выше математической модели системы установлено, что возможны следующие основные варианты пересечения границы асимптотической устойчивости ветвями полей корневых траекторий (корневых портретов) систем:

- 1) граница устойчивости пересекается положительными ветвями при  $a_1 > 0, a_2 > 0$  (рис. 1, а);
- 2) граница устойчивости пересекается отрицательными ветвями при  $a_1 < 0, a_2 > 0$  (рис. 1, б);
- 3) граница устойчивости не пересекается, т. е. пересечение отсутствует при  $-\infty < a_1 < +\infty, a_2 < 0$  (рис. 2, а).

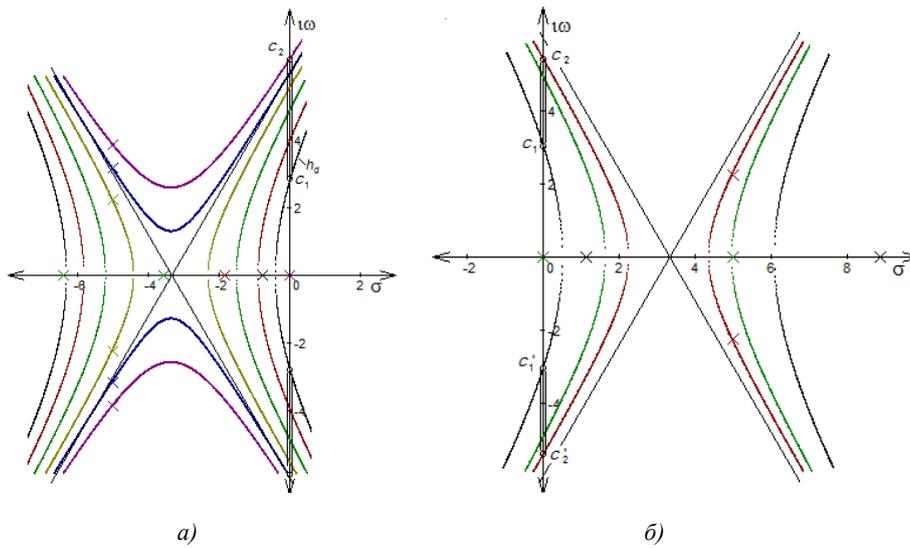


Рис. 1. Поля корневых траекторий: а) полинома  $s^3 + 10s^2 + a_2s + a_3 = p(s)$  при  $a_2 \in [7, 40], a_3 \in [-\infty, +\infty]$ ; б) полинома  $s^3 - 10s^2 + a_2s + a_3 = p(s)$  при  $a_2 \in [20, 30], a_3 \in [-\infty, +\infty]$

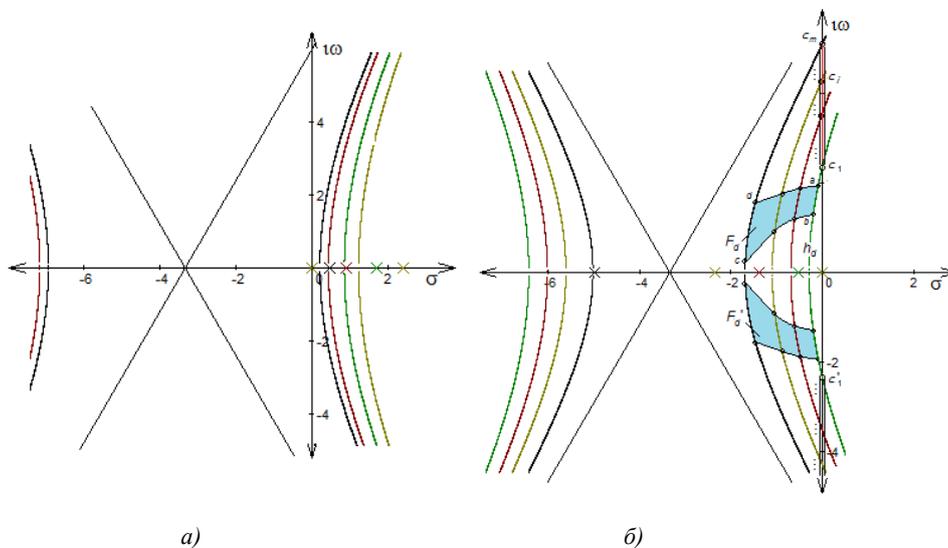


Рис. 2. Поля корневых траекторий: а) полинома  $s^3 + 10s^2 + a_2s + a_3 = p(s)$  при  $a_2 \in [-20, -5], a_3 \in [-\infty, +\infty]$ ; б) полинома  $s^3 + 10s^2 + a_2s + a_3 = p(s)$  при  $a_2 \in [5, 25], a_3 \in [18, 40], a_1 \in [10, 20]$

Далее будем рассматривать первый случай,  $a_1 > 0$ .

Из рис. 1, *a* видно, что поле корневых траекторий пересекает границу устойчивости в области  $C = [c_1, c_2]$ . На рис. 1, *б* область  $C = [c_1, c_2]$  формируется отрицательными ветвями годографов поля.

**Определение 3.** Область  $C$  на границе устойчивости  $i\omega$ , в пределах которой корневой портрет (поле) корневых траекторий пересекает эту границу, назовем областью пересечений портрета (поля).

В семействе полей корневых траекторий системы (6), формирующих ее портрет, выделим так называемое доминирующее поле  $F_d$ , устойчивость которого будет гарантировать устойчивость всего интервального семейства в целом.

**Определение 4.** Доминирующим в семействе полей корневых траекторий (6) назовем поле  $F_i = F_d$ , при расположении которого в левой полуплоскости  $s$  корней весь корневой портрет системы располагается в левой полуплоскости.

Согласно определению 4 устойчивость доминирующего поля  $F_d$  гарантирует устойчивость корневого портрета системы в целом.

**Устойчивость характеристического полинома системы.** В семействе корневых годографов доминирующего поля выделим годограф, устойчивость которого будет гарантировать устойчивость всего поля в целом.

**Определение 5.** Корневой годограф  $h_i = h_d$  доминирующего поля  $F_d$  корневых траекторий полинома (1), устойчивость которого гарантирует устойчивость поля  $F_d$ , назовем доминирующим корневым годографом поля (портрета).

Таким образом, устойчивость доминирующего корневого годографа  $h_d$  корневого портрета гарантирует устойчивость всего корневого портрета системы в целом.

На основании приведенного выше выражения (5), описывающего динамику функции параметра  $f(\omega)$  на границе устойчивости, можно заключить, что вдоль границы устойчивости данная функция может быть либо возрастающей, либо убывающей. Тогда сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение.** Функция параметра траектории (3) для поля корневых траекторий динамической системы третьего порядка, описываемой характеристическим уравнением (1) с положительными или отрицательными коэффициентами, на границе устойчивости в области  $C$  соответственно возрастает или убывает. В единственной точке экстремума функции, находящейся в начале координат, параметр траектории равен нулю.

Поскольку согласно известным свойствам корневых траекторий все начальные точки годографов  $h_i^+$  (т. е. точки, в которых параметр годографа равен нулю) полиномов третьего порядка с положительными коэффициентами всегда располагаются в левой полуплоскости корней  $s$ , положительную устойчивую часть  $P^+$  корневого портрета  $P$  рассматриваемого семейства ( $P^+ \subset P$ ) можно представить выражением  $P^+ = \{h_i^+, i = 1, 2, \dots\}$ , где  $h_i^+ = (0, a_3(\omega_i))$ ,  $a_3(\omega_i)$  – значение параметра годографа  $a_3$  в точке пересечения  $\omega_i$   $i$ -го годографа портрета с границей устойчивости  $i\omega$  в области пересечений  $C$  (см. рис. 1). Тогда согласно утверждению справедливо равенство  $\bigcap_{h_i^+ \in P^+} h_i^+ = \inf h_i^+ = (0, a_{3\min}(\omega_i))$ , где  $a_{3\min}(\omega_i) = \min a_3(c_1)$ . На этом основании и с учетом

формул (4) и (5) сформулируем следующие следствия утверждения.

**Следствие 1.** Доминирующим в семействе полей корневых траекторий полинома (1) является поле  $F_d$ , которое содержит линию уровня (доминирующий корневой годограф  $h_d(s)$ ), проходящую через нижнюю точку  $c_1$  области пересечений  $C$  (см. рис. 2, б), в которой значение параметра  $a_3$  является минимальным для данного семейства:  $a_3 = \min a_3(c_1)$ .

**Следствие 2.** Доминирующий корневой годограф  $h_d(s)$  полиномиального семейства (1) описывается уравнением

$$s^3 + \underline{a}_1 s^2 + \underline{a}_2 s + \underline{a}_3 = h_d(s), \quad (9)$$

*a* доминирующий полином, устойчивость которого будет гарантировать выражение (9), – уравнением

$$s^3 + \underline{a}_1 s^2 + \underline{a}_2 s + \bar{a}_3 = p_d(s). \quad (10)$$

На основании (8)–(10) функцию доминирующего поля  $F_d$  корневых траекторий определим выражением

$$f_d(\sigma, \omega) = \omega^2 - 3\sigma^2 - 2\underline{a}_1 \sigma, \quad (11)$$

а уравнение линий уровня поля  $F_d$  – выражением

$$\omega^2 - 3\sigma^2 - 2\underline{a}_1 \sigma = a_2. \quad (12)$$

На основе приведенных выше утверждения, следствий 1 и 2 сформулируем следующее условие устойчивости рассматриваемого семейства.

*Условие устойчивости.* Семейство характеристических полиномов (1) динамической системы с возмущенными коэффициентами является асимптотически устойчивым, если доминирующее поле  $F_d$  (11) системы (доминирующий корневой годограф  $h_d$  системы) располагается в левой полуплоскости корней  $s$ .

Расчет и настройка параметров (синтез) семейства (1) согласно данному методу выполняются, как правило, посредством определения (настройки) значений интервалов параметров  $a_2$  и  $a_3$ . Настройка осуществляется на основании следствий 1 и 2 утверждения в соответствии со следующими условиями:

$$0 < a_3 < \min(a_3(c_i)), a_2(c_i) < a_2 < a_2(c_m), \quad (13)$$

где  $a_3(c_i)$ ,  $a_2(c_i)$  – соответственно значения коэффициентов  $a_3$  и  $a_2$  в определенной точке  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , пересечения границы устойчивости  $i$ -й линией уровня доминирующего поля  $F_d$  (см. рис. 2, б).

Точка  $c_i$  может выбираться произвольно в соответствии с желанием пользователя. В случае необходимости выполняется также настройка параметра  $a_1$ .

**Алгоритм анализа и синтеза полиномиального семейства на основе графоаналитического метода.** Алгоритм состоит из следующих шагов:

*Шаг 1.* Вход алгоритма: степень  $n$  и векторы нижних  $\underline{v}$  и верхних  $\bar{v}$  значений интервалов коэффициентов  $a_j$  семейства полиномов (1).

*Шаг 2.* Формирование корневой полевой математической модели динамики системы по выражениям (2)–(12), в результате которого должны быть сформированы выражения для  $h_d(s)$  (9),  $p_d(s)$  (10), функция поля  $F_d$  (11) и уравнение линий уровня поля  $F_d$  (12).

*Шаг 3.* Графическое построение доминирующего поля корневых траекторий в виде линий уровня (корневых годографов) для заданного семейства (1) на основе выражений (2)–(12) (см. рис. 2, б).

*Шаг 4.* Анализ устойчивости семейства на основании приведенного выше условия устойчивости, который может выполняться как аналитически посредством проверки на устойчивость полинома  $p_d(s)$  (10), так и графически путем оценки расположения доминирующего поля  $abcd$  (рис. 2, б) относительно границы устойчивости.

*Шаг 5.* В случае устойчивости семейства, т. е. расположения поля в левой полуплоскости комплексной плоскости корней, альтернативное выполнение перехода к шагу 10, если никакой дальнейшей настройки полинома не требуется, и к шагу 8, если настройка требуется.

*Шаг 6.* В случае неустойчивости семейства, т. е. расположения доминирующего поля  $abcd$  (рис. 2, б) частично или полностью в правой полуплоскости плоскости корней (рис. 3, а), перемещение поля в левую полуплоскость. Для этого определяются значения  $\min(a_3(c_i))$  на основании выражений (4), (5), (9), что может также выполняться посредством щелчка мышью в желаемой точке  $c_i$ , и выбираются новые интервалы значений  $a_3$  и  $a_2$  согласно выражению (13).

Шаг 7. Переход к шагу 10.

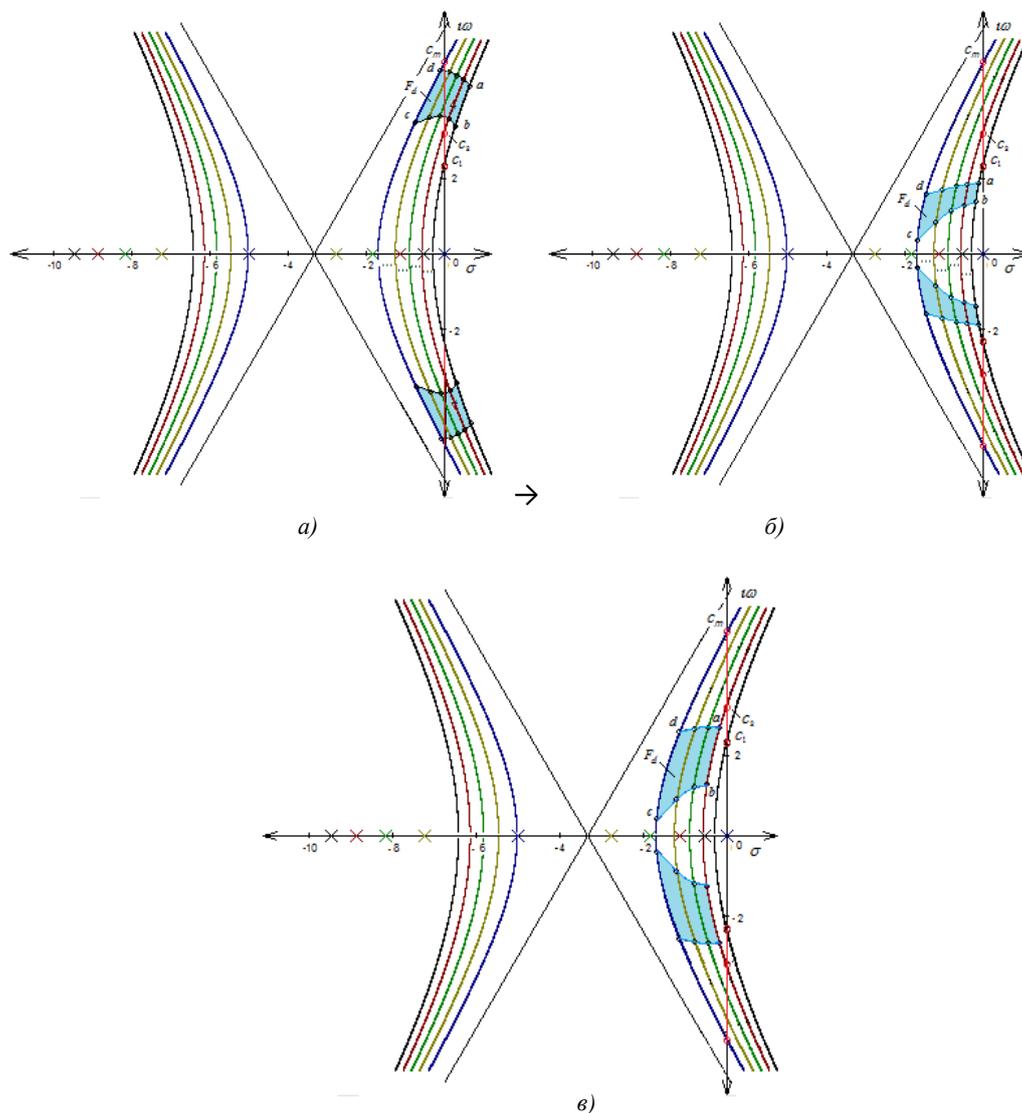


Рис. 3. Поля корневых траекторий полинома  $s^3 + 10s^2 + a_2s + a_3 = p(s)$  при  $a_2 \in [5, 25]$ ,  $a_3 \in [-\infty, +\infty]$  и доминирующее поле  $F_d = abcd$ : а) исходное неустойчивое при  $a_2 \in [5, 25]$ ,  $a_3 \in [130, 250]$ ; б) перемещенное устойчивое при  $a_2 \in [5, 25]$ ,  $a_3 \in [45, 20]$ ; в) перемещенное устойчивое при  $a_2 \in [10, 25]$ ,  $a_3 \in [70, 20]$

**Шаг 8.** Настройка семейства (1) посредством размещения поля  $F_d$  желаемым образом в плоскости корней и вычисления новых значений параметров семейства, которая может быть реализована:

- определением желаемых значений интервалов параметров  $a_3$  и  $a_2$  непосредственно в режиме диалога (для случая программной реализации рассматриваемого алгоритма) путем щелчков мышью в нужных точках на соответствующих линиях уровня (корневых траекториях) предварительно построенного исходного доминирующего поля корневых траекторий, что выполняется на основе выражений (2)–(5), (13);

- заданием желаемых значений интервалов параметров семейства (1) посредством ввода их в соответствующие поля на экране дисплея с последующим отображением соответствующих точек на линиях уровня доминирующего поля, что может быть выполнено на основе использования уравнений корневого годографа и параметра семейства (2)–(5).

*Шаг 9.* Построение нового доминирующего поля корневых траекторий семейства (1), размещенного желаемым образом в плоскости корней. Выполняется на основе предыдущего шага 8 аналогично описанному выше шагу 3.

*Шаг 10.* Выход алгоритма:

– графическое изображение доминирующего поля  $F_d$  корневых траекторий семейства, размещенное в левой полуплоскости корней в соответствии с желаемым расположением данного поля;

–  $a_j \in [\underline{a}_j, \bar{a}_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, 3$ , – вычисленные значения границ интервалов параметров характеристического полинома системы, обеспечивающие желаемое расположение доминирующего поля и асимптотическую устойчивость семейства.

Определять устойчивые и желаемые значения интервалов параметров  $a_3$  и  $a_2$  можно непосредственно в режиме диалога путем щелчков мышью в нужных точках на соответствующих линиях уровня (корневых траекториях) предварительно построенного доминирующего поля корневых траекторий. Параметр  $a_1$  также может настраиваться. При настройке параметра  $a_1$  в сторону увеличения в сравнении с его заданным минимальным значением для сохранения системой устойчивости перерасчета параметров  $a_2$  и  $a_3$  не потребуются, поскольку это не повлияет на робастную устойчивость системы. При уменьшении параметра  $a_1$  в сравнении с минимальным его значением может потребоваться перерасчет параметров  $a_2$  и  $a_3$  с целью обеспечения системой робастной устойчивости во всем диапазоне изменения параметров.

По расположению доминирующего поля  $F_d$  в плоскости корней могут выполняться (непосредственно с экрана дисплея или аналитически) проверка семейства полиномов (1) на устойчивость в графической или аналитической форме, а также синтез устойчивого полинома и полинома, обеспечивающего заданное качество системы (семейство корней которого расположено в плоскости корней определенным образом). Как анализ, так и синтез семейства могут выполняться и аналитически, и в графической форме непосредственно в режиме диалога на компьютере.

Метод отличается наглядностью и удобством в использовании. Это в определенной степени объясняется тем, что в данном случае рассматривается описание динамики системы семейством полиномов третьего порядка, для которого характерны специфические особенности конфигурации корневого портрета и характера пересечения границы устойчивости годографами портрета, позволяющие упростить процедуры анализа и синтеза.

Рассмотренный выше подход, основанный на выделении доминирующего поля корневых траекторий, может быть применен также для параметрического синтеза и исследования динамических систем более высоких порядков. С этой целью следует модифицировать приведенное выше утверждение 1 и условие устойчивости согласно особенностям конфигурации корневых портретов систем более высокого порядка и на этом основании получить функцию и уравнение для соответствующих полей, что позволит графически отобразить данные доминирующие поля и использовать их для дальнейшего исследования и расчета робастных параметров семейств.

**Примеры анализа и синтеза полиномиального семейства на основе графоаналитического метода.** Рассматривается характеристический полином

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = p(s) \quad (14)$$

при  $a_1 \in [10, 20]$ ,  $a_2 \in [5, 25]$ .

**Пример 1.**  $a_3 \in [18, 40]$

*Шаг 1.* Вход алгоритма: степень  $n = 3$  и векторы интервалов коэффициентов  $a_j$  семейства полиномов (1)  $\underline{v}: 1, 10, 5, 18$ ;  $\bar{v}: 1, 20, 25, 40$ .

*Шаг 2.* Формирование корневой полевой математической модели динамики системы и определение соответствующих выражений для вычисления значений параметров  $a_2$  и  $a_3$  на основе выражений (2)–(12):

– функции доминирующего поля  $F_d$  (11)

$$f_d(\sigma, \omega) = \omega^2 - 3\sigma^2 - 10\sigma; \quad (15)$$

– уравнения линий уровня поля  $F_d$  (12)

$$\omega^2 - 3\sigma^2 - 10\sigma = a_2; \quad (16)$$

– выражений (9) и (10)

$$s^3 + 10s^2 + 5s + a_3 = h_d(s); \quad (17)$$

$$s^3 + 10s^2 + 5s + 40 = p_d(s). \quad (18)$$

*Шаг 3.* Графическое построение доминирующего поля  $F_d$  корневых траекторий в виде линий уровня (корневых годографов) для заданного семейства (14) на основе выражений (15)–(18). Доминирующее поле для данного случая представлено на рис. 2, б. Поле  $F_d$  содержит линию уровня  $ab$ , принадлежащую доминирующему корневому годографу  $h_d$ , который проходит через нижнюю точку  $c_1$  области пересечений  $C$  (см. рис. 2, б).

*Шаг 4.* Выполнение анализа устойчивости семейства аналитически посредством проверки на устойчивость полинома (18), который является устойчивым, поскольку значения его корней следующие:  $-9,9$ ;  $-0,0485 + 2i$ ;  $-0,0485 - 2i$ .

Доминирующему полиному  $p_d(s)$  семейства (18) соответствует точка  $a$  поля на рис. 2, б.

В соответствии с неравенством (13)  $a_3(c_1) = 50$ ,  $a_3(a) = 40$ .

Проверка непосредственно по графику путем оценки расположения доминирующего поля  $abcd$  (рис. 2, б) относительно границы устойчивости показала, что доминирующее поле расположено полностью в левой полуплоскости корней  $s$ . Согласно приведенному выше условию устойчивости это свидетельствует об устойчивости исходного полиномиального семейства (14).

*Шаг 5.* Семейство устойчиво. В случае необходимости перемещения изначально устойчивого семейства в новую область левой полуплоскости корней выполняется переход к шагу 8 (см. шаг 8 в примере 2).

*Шаг 10.* Выход алгоритма. Значения границ интервалов параметров характеристического полинома системы, обеспечивающие ее устойчивость, остаются неизменными:  $\underline{a}_1 = 10$ ,  $\bar{a}_1 = 20$ ,  $\underline{a}_2 = 5$ ,  $\bar{a}_2 = 25$ ,  $\underline{a}_3 = 18$ ,  $\bar{a}_3 = 40$  (рис. 2, б).

Если проверка системы на устойчивость рассмотренным графоаналитическим методом дала отрицательный результат, когда доминирующее поле семейства полностью или частично располагается в правой полуплоскости  $s$ , следует выполнить синтез устойчивой системы посредством соответствующей настройки параметров  $a_2$  и  $a_3$ , а в случае необходимости – и параметра  $a_1$ . Этот случай рассмотрен в примере 2.

**Пример 2.**  $a_3 \in [130, 250]$

*Шаг 1.* Вход алгоритма: степень  $n = 3$  и векторы интервалов коэффициентов  $a_j$  семейства полиномов (1)  $\underline{v}: 1, 10, 5, 130$ ,  $\bar{v}: 1, 20, 25, 250$ .

*Шаг 2.* Формирование корневой полевой математической модели динамики системы и определение соответствующих выражений для вычисления значений параметров  $a_2$  и  $a_3$  выражениями (2)–(12):

– функция доминирующего поля  $F_d$  (11) и уравнение линий уровня поля  $F_d$  (12) определяются в данном случае согласно выражениям (15) и (16);

– доминирующий годограф  $h_d(s)$  определяется выражением (17), доминирующий полином – выражением

$$s^3 + 10s^2 + 5s + 250 = p_d(s). \quad (19)$$

*Шаг 3.* Графическое построение доминирующего поля корневых траекторий в виде линий уровня (корневых годографов) для заданного семейства (14) на основе выражений (15)–(17), (19). Доминирующее поле для данного случая изображено на рис. 3, а. Поле  $F_d$  содержит линию

уровня  $ab$ , принадлежащую доминирующему корневому годографу  $h_d$ , который проходит через нижнюю точку  $c_1$  области пересечений  $C$  (см. рис. 3, *a*).

*Шаг 4.* Выполнение анализа устойчивости семейства аналитически посредством проверки на устойчивость полинома  $p_d(s)$  (19), который является неустойчивым, поскольку значения его корней следующие:  $-11,47$ ;  $0,733 + 4,612i$ ;  $0,733 - 4,612i$ .

Доминирующему полиному  $p_d(s)$  семейства (19) соответствует точка  $a$  поля на рис. 3, *a*.

Значение  $a_3(c_1) = 100$ , значение  $a_3(a) = 250$ , что не соответствует неравенству (13).

Проверка непосредственно по графику путем оценки расположения доминирующего поля  $abcd$  (рис. 3, *a*) относительно границы устойчивости показала, что доминирующее поле расположено частично в правой полуплоскости корней. Это свидетельствует о неустойчивости исходного полиномиального семейства.

*Шаг 5.* Семейство неустойчиво, поэтому переход к шагу 6.

*Шаг 6.* Перемещение доминирующего поля в левую полуплоскость корней  $s$  посредством вычисления новых значений параметров  $a_2$  и  $a_3$  на основе условия (13). Для этого вначале определим в области пересечений  $C$  точку  $c_i$ , в которой будем вычислять  $a_3$ . Рассмотрим два варианта для точки  $c_i$ : точку  $c_1$  и точку  $c_2$  (см. рис. 3, *a*).

Для первого варианта точка  $c_1$  – нижняя граница области  $C = [c_1 c_m]$ , которая соответствует значению  $a_2 = 5$  (см. рис. 3, *a*). Тогда по формуле (17) вычислим  $\min(a_3(c_i)) = \min(a_3(c_1)) = 50$ . Следовательно, согласно условиям (13) для размещения доминирующего поля должным образом необходимо выполнить неравенство  $0 < a_3 < 50$ . С учетом требований к обеспечению некоторого запаса устойчивости примем, например,  $\bar{a}_3 = 45$ ,  $\underline{a}_3 = 20$ . Доминирующее поле  $F_d$  переместилось в правую полуплоскость корней и стало устойчивым (см. рис. 3, *б*), его расположение теперь соответствует следующим значениям настраиваемых коэффициентов:

$$\underline{a}_2 = 5, \quad \bar{a}_2 = 25, \quad \underline{a}_3 = 20, \quad \bar{a}_3 = 45. \quad (20)$$

Рассмотрим второй вариант и рассчитаем другие значения параметров  $a_2$  и  $a_3$  таким образом, чтобы изменить и диапазон  $a_2$ , расширив при этом диапазон  $a_3$ . Возьмем точку  $c_2$  области  $C = [c_1 c_m]$ , которая соответствует значению  $a_2 = 10$  (см. рис. 3, *a*). Применив формулу (17), вычислим  $\min(a_3(c_i)) = \min(a_3(c_2)) = 100$ . Следовательно, согласно (13) для размещения доминирующего поля должным образом необходимо выполнить неравенство  $0 < a_3 < 100$ . Тогда с учетом требований к обеспечению некоторого запаса устойчивости примем, например,  $\bar{a}_3 = 70$ ,  $\underline{a}_3 = 20$ . В результате получим новый, устойчивый вариант размещения доминирующего поля  $F_d$  (см. рис. 3, *в*), соответствующий следующим значениям настраиваемых коэффициентов:

$$\underline{a}_2 = 10, \quad \bar{a}_2 = 25, \quad \underline{a}_3 = 20, \quad \bar{a}_3 = 70. \quad (21)$$

Во втором варианте согласно значениям (21) интервал вариации параметра  $a_3$  значительно увеличился по сравнению с первым вариантом в соответствии со значениями (20), однако немного сузился интервал вариации параметра  $a_2$ . Настройка параметра  $a_1$  в сторону его увеличения в данном случае не приведет к потере системой робастной устойчивости.

*Шаг 7.* Переход к шагу 10.

*Шаг 8.* В случае необходимости перемещения изначально устойчивого семейства в новую область левой полуплоскости корней выполнение действий, которые основываются на тех же принципах, что и перемещение неустойчивого семейства в левую полуплоскость корней (см. шаги 1–6). В данном примере это не требуется.

*Шаг 9.* Построение на экране дисплея компьютера нового доминирующего поля корневых траекторий семейства (1), размещенного желаемым образом в плоскости корней. В рассматриваемом случае построение выполнено на шаге 6.

*Шаг 10.* Выход алгоритма:

– графические изображения двух вариантов доминирующего поля  $F_d$  корневых траекторий семейства, размещенных в левой полуплоскости корней в соответствии с желаемым пользователем расположением данного поля, показаны на рис. 3, б и в;

– значения границ интервалов параметров характеристического полинома системы, обеспечивающие показанное на рис. 3, б и в расположение доминирующего поля, имеют вид

$$\underline{a}_1 = 10, \overline{a}_1 = 20, \underline{a}_2 = 5, \overline{a}_2 = 25, \underline{a}_3 = 20, \overline{a}_3 = 45 \text{ (рис. 3, б);}$$

$$\underline{a}_1 = 10, \overline{a}_1 = 20, \underline{a}_2 = 10, \overline{a}_2 = 25, \underline{a}_3 = 20, \overline{a}_3 = 70 \text{ (рис. 3, в).}$$

**Заключение.** Разработан алгоритм для анализа и параметрического синтеза семейств характеристических полиномов динамических систем третьего порядка с интервальной неопределенностью, отличающийся возможностью выполнять анализ и параметрический синтез робастно устойчивых систем с возмущенными параметрами по их графическому корневому портрету (расположению доминирующего поля корневых траекторий в плоскости корней). Метод также может быть использован для ориентации семейства корней системы в плоскости корней определенным образом, что позволяет обеспечить желаемое робастное качество. Полученные в работе результаты наглядны и удобны в применении. Построенные корневые портреты дают полное представление о динамике систем при вариации всех параметров и о том, каким образом следует манипулировать коэффициентами характеристического полиномиального семейства с целью обеспечения его желаемых динамических свойств.

Описание системы полиномиальным семейством третьего порядка позволяет получить наиболее наглядный и простой вариант реализации рассмотренной методики, процедуры анализа и синтеза, расчета робастных параметров. Для распространения предложенного подхода на системы более высокого порядка следует модифицировать алгоритм согласно особенностям конфигурации корневых портретов данных систем и их динамики на границе устойчивости.

Разработанный алгоритм может быть успешно применен в составе САПР САУ на промышленных предприятиях и в проектных организациях при проведении процедур синтеза робастных систем управления различными техническими объектами, в том числе функционирующими в нестабильных условиях окружающей среды.

#### Список использованных источников

1. Dorf, R. Modern Control Systems / R. Dorf, R. Bishop. – N. Y. : Prentice Hall, 2011. – 1111 p.
2. Tempo, R. Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems with Applications / R. Tempo, C. Calafiori, F. Dabbene. – London : Springer-Verlag, 2013. – 357 p.
3. Kučera, V. Polynomial control: past, present, and future / V. Kučera // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. – 2007. – Vol. 17, no. 8. – P. 682–705.
4. Харитонов, В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений / В. Л. Харитонов // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. XIV, № 11. – С. 2086–2088.
5. Anderson, B. On robust hurwitz polynomials / B. Anderson // IEEE Trans. Automat. Control. – 1987. – Vol. 32, no. 10. – P. 909–913.
6. Поляк, Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М. : Наука, 2002. – 303 с.
7. Поляк, Б. Т. Управление линейными системами при внешних возмущениях / Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, П. С. Щербаков. – М. : Ленанд, 2014. – 560 с.
8. Римский, Г. В. Автоматизация исследований динамических систем / Г. В. Римский, В. В. Таборовец. – Минск : Наука и техника, 1978. – 336 с.
9. Несенчук, А. А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А. А. Несенчук. – Минск : ОИПИ НАН Беларуси, 2005. – 234 с.
10. Несенчук, А. А. Корневой метод синтеза устойчивых полиномов путем настройки всех коэффициентов / А. А. Несенчук // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 8. – С. 13–24.
11. Nesenчук, A. A. Investigation of behavior and synthesis of interval dynamic systems' characteristic polynomials based on the root locus portrait parameter function / A. A. Nesenчук // Proc. of the 60th American Control Conference (ACC 2018). – Milwaukee, USA, 2018. – P. 2041–2046.

12. Nesenчук, A. A. Investigation and synthesis of robust polynomials in uncertainty on the basis of the Root Locus Theory / A. A. Nesenчук // *Polynomials – Theory and Applications* / ed. by C. S. Ryoо. – London : Intechopen, 2019. – Ch. 6. – P. 109–130.

13. Определение вершинных полиномов для анализа степени робастной устойчивости интервальной системы / С. В. Гайворонский [и др.] // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2019. – Т. 20, № 5. – С. 266–273.

14. Nesenчук, A. A. Investigation and robust synthesis of polynomials under perturbations based on the root locus parameter distribution diagram / A. A. Nesenчук // *Штучний інтелект*. – 2019. – № 1. – С. 14–22.

---

## References

1. Dorf R., Bishop R. *Modern Control Systems*. New York, Prentice Hall, 2011, 1111 p.
2. Tempo R, Calafiori C., Dabbene F. *Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems with Applications*. London, Springer-Verlag, 2013, 357 p.
3. Kučera V. Polynomial control: past, present, and future. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, vol. 17, no. 8, pp. 682–705.
4. Kharitonov V. L. Ob asimptoticheskoj ustojchivosti polozhenija ravnovesija semejstva sistem linejnykh differentsyal'nykh uravnenij [About the asymptotic stability of equilibrium for the system of the linear differential equations family]. *Differentsyal'nyje uravnenija [Differential Equations]*, 1978, vol. XIV, no. 11, pp. 2086–2088 (in Russian).
5. Anderson B. On robust hurwitz polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, vol. 32, no. 10, pp. 909–913.
6. Polyak, B. T., Shcherbakov P. S. Robastnaja ustojchivost' i upravlenije. *Robust Stability and Control*. Moscow, Nauka, 2002, 303 p. (in Russian).
7. Polyak B. T., Khlebnikov M. V., Shcherbakov P. S. Upravlenije linejnymi sistemami pri vneshnich vozmushchenijach. *Linear Systems Control in Conditions of External Disturbances*. Moscow, Lenand, 2014, 560 p. (in Russian).
8. Rimsky G. V., Taborovets V. V. Avtomatizatsija issledovanij dinamicheskich system. *Automation of the Dynamic Systems Investigations*. Minsk, Nauka i tehnika, 1978, 336 p. (in Russian).
9. Nesenчук A. A. Analiz i sintez robastnykh dinamicheskikh sistem na osnovie kornievogo podkhoda. *Analysis and Synthesis of Robust Dynamic Systems on the Basis of the Root Locus Approach*. Minsk, Ob"edinennyj institut problem informatiki Nacional'noj akademii nauk Belarusi, 2005, 234 p. (in Russian)
10. Nesenчук A. A. Kornevoj metod sinteza ustojchivykh polinomov putiom nastrojki vsekh koeficientov [Root locus method for the stable polynomials synthesis over setting up all coefficients]. *Avtomatika i telemekhanika [Automation and Remote Control]*, 2010, no. 8, pp. 13–24 (in Russian).
11. Nesenчук A. A. Investigation of behavior and synthesis of interval dynamic systems' characteristic polynomials based on the root locus portrait parameter function. *Proceedings of the 60th American Control Conference (ACC 2018)*. Milwaukee, USA, 2018, pp. 2041–2046.
12. Nesenчук A. A. Investigation and synthesis of robust polynomials in uncertainty on the basis of the Root Locus Theory. *Polynomials – Theory and Applications*. In C. S. Ryoо (ed.). London, Intechopen, 2019, ch. 6, pp. 109–130.
13. Gaivoronsky S. V., Ezangina T. A., Hozhaev I. V., Nesenчук A. A. Opredelenije vershinykh polynomov dla analiza stepeni robastnoj ustojchivosti interval'noj sistemy [Definition of the vertex polynomials for analysis of the interval system robust stability degree]. *Mechatronika, avtomatizatsiya, upravlenije [Mechatronics, Automation, Control]*, 2019, vol. 20, no. 5, pp. 266–273 (in Russian).
14. Nesenчук A. A. Investigation and robust synthesis of polynomials under perturbations based on the root locus parameter distribution diagram. *Shtuchnij intelekt [Artificial Intelligence]*, 2019, no. 1, pp. 14–22.

## Информация об авторе

Несенчук Алла Анатольевна, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
E-mail: anes@newman.bas-net.by

## Information about the author

Alla A. Nesenчук, Cand. Sci. (Eng.), Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: anes@newman.bas-net.by