ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)
УДК 517.958:537.8

Поступила в редакцию 21.06.2019
Received 21.06.2019

Принята к публикации 04.09.2019
Accepted 04.09.2019

Моделирование поверхностных электромагнитных волн с осевой симметрией на биизотропном однослойном плоском экране

В. Т. Ерофеенко

Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики и информатики», Минск, Беларусь
E-mail: bsu_erofeenko@tut.by

Аннотация. Сформулирована однородная трехобластная краевая задача для плоского однослойного экрана из биизотропного материала. Рассчитаны монохроматические электромагнитные поля с осевой симметрией, распространяющиеся за экраном, перед экраном и в слое экрана. Использованы классические граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих полей на плоскостях раздела сред. Для упрощения процедуры построения аналитических решений исходная задача преобразована в краевую задачу с двухсторонними граничными условиями, связывающими электромагнитные поля по обе стороны экрана. В результате поле в слое экрана исключено из рассмотрения. Разработана методика расчета поверхностных электромагнитных волн с осевой симметрией, распространяющихся с двух сторон экрана в радиальных направлениях слоя. В качестве биизотропного экрана рассмотрен экран из кирального мематериала. Для кирального экрана получено дисперсионное уравнение второго порядка, позволившее вычислить частоты двух последовательностей поверхностных электромагнитных полей. Вычислены параметры кирального материала, для которого существуют незатухающие поверхностные волны. Поверхностные волны представлены в виде комбинации базисных цилиндрических *TE*- и *TH*-поляризованых электромагнитных полей. Возможны другие варианты поверхностных волн.

Ключевые слова: математические модели, уравнения Максвелла, двухсторонние граничные условия, краевая задача, задача экранирования, дисперсионное уравнение, поверхностные электромагнитные волны, биизотропный экран, киральный метаматериал, аналитическое моделирование

Благодарность. Работа выполнена в рамках задания 1.1.22 государственной программы научных исследований «Информатика, космос и безопасность» на 2019 – 2020 гг.

Для цитирования. Ерофеенко, В. Т. Моделирование поверхностных электромагнитных волн с осевой симметрией на биизотропном однослойном плоском экране / В. Т. Ерофеенко // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 63–76.

Modeling of surface electromagnetic waves with axial symmetry on a bi-isotropic one-layer plane screen

Viktor T. Erofeenko

Establishment of the BSU "Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics", Minsk, Belarus
E-mail: bsu_erofeenko@tut.by

Abstract. A homogeneous three-domain boundary-value problem for a one-layer plane screen from a bi-isotropic material is formulated. Monochromatic electromagnetic fields with axial symmetry propagating behind the screen, in front of the screen and into the screen layer are calculated. Classical boundary conditions of the continuity of the tangential field components on the planes of media separation are used. To simplify the procedure of constructing analytical solutions, the original problem is transformed into a boundary problem with two-sided boundary conditions connecting electromagnetic fields on both sides of the screen. As a result, the field in the screen layer is excluded from consideration. A method for calculating surface electromagnetic waves with axial symmetry, propagating from two sides of the screen in the radial directions of the layers, is developed. A screen from a chiral material is considered as a bi-isotropic screen. For chiral screen a second-order dispersion equation was obtained, which made it possible to calculate the frequencies of the two sequences of surface electromagnetic fields. The parameters of the chiral material for which non-attenuating surface waves exist are calculated. Surface waves are presented as a combination of basis cylindrical *TE*- and *TH*-polarized electromagnetic fields. Other variants of surface waves are possible.

Keywords: mathematical models, Maxwell equations, two-sided boundary conditions, boundary-value problem, screening problem, dispersion equation, surface electromagnetic waves, bi-isotropic screen, chiral metamaterial, analytical modeling

Acknowledgements. This work was carried out as part of assignment 1.1.22 of the state program of scientific research “Informatics, space and security” for 2016–2020.

For citation. Erofeenko V. T. Modeling of surface electromagnetic waves with axial symmetry on a bi-isotropic one-layer plane screen. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 63–76 (in Russian).

Введение. Теоретическое исследование композитных материалов является одним из приоритетных направлений фундаментальной науки. Разнообразие композитов велико в силу сложного структурного и химического состава материалов, определяющих их электродинамические свойства [1]. Из композитных материалов конструируют экраны, которые используются для защиты от внешних излучений. В последнее время большое внимание уделяется исследованию экранов из биизотропных материалов [2–7], а также изучению киральных материалов [2, с. 86; 8; 9].

В статье рассмотрен плоский биизотропный экран в случае, когда он не подвергается воздействию внешнего монохроматического электромагнитного поля. Возможен вариант, когда на поверхности и внутри экрана распределено заданное количество электромагнитной энергии. При этом электромагнитная энергия распространяется вдоль поверхности экрана, образуя поверхностные электромагнитные волны (собственные волны) [8]. В работе сформулирована краевая задача для определения поверхностных волн с классическими граничными условиями непрерывности тангенциальных составляющих электромагнитного поля на плоскостях раздела сред. Для аналитического решения задачи применен метод двухсторонних граничных условий на биизотропном экране, связывающих электромагнитные поля по обе стороны экрана [10]. Исследованы монохроматические поверхностные волны с осевой симметрией. Для построения аналитических формул для поверхностных волн одновременно с одной и другой сторон экрана материальные параметры биизотропного экрана выбраны специальным образом в соответствии с параметрами, заданными в работах [11, 12]. Такие параметры позволили получить простое дисперсионное уравнение для вычисления последовательности частот поверхностных волн. В результате построена последовательность поверхностных волн с осевой симметрией, характеризуемая бесконечной последовательностью частот и порядком осевой симметрии *m*. Определены границы материальных параметров экрана, при которых существуют поверхностные волны.

Постановка краевой задачи распространения поверхностных волн на биизотропном слое. В пространстве R^3 с декартовой системой координат *Oxyz* размещен плоский экран $D(0<z<\Delta)$. Экран ограничен плоскостями $\Gamma_1(z=0)$, $\Gamma_2(z=\Delta)$. Слой выполнен из биизотропного материала, характеризуемого материальными комплексными параметрами: $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$, $\mu=\mu_r\mu_0$, ε_r,μ_r – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости; $G=G_r/c$, $Z=Z_r/c$; G_r, Z_r – относительные параметры биизотропности, в последующем рассматриваются действительные величины; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные; c – скорость света в вакууме. В рассматриваемой структуре возбуждаются электромагнитные поля: $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$ – поле в полупространстве D_1 $(z<0)$, отраженное от экрана *D*; $\vec{E},\vec{H}$ – поле в слое *D*;

$\vec{E}_2,\ \vec{H}_2$ – поле в полупространстве $D_2\left(z>\Delta\right)$. Рассматривается временная зависимость полей вида $\exp\left(-i\omega t\right)$, где $\omega = 2\pi f$ – круговая частота, f – частота поля.

Сформулируем краевую задачу, моделирующую распространение поверхностных волн вдоль экрана *D*.

Краевая задача 1. Требуется определить поля $\vec{E}_1,\ \vec{H}_1;\ \vec{E}_2,\ \vec{H}_2;\ \vec{E},\vec{H}$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot}\vec{E}_j = i\omega\mu_0\vec{H}_j,\ \operatorname{rot}\vec{H}_j = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_j \text{ в } D_j; \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\left(\mu\vec{H}+Z\vec{E}\right),\ \operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\left(\varepsilon\vec{E}+G\vec{H}\right) \text{ в } D, \tag{2}$$

граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих полей на плоскостях Γ_1, Γ_2

$$\left(\vec{E}_{1\tau}-\vec{E}_{\tau}\right)\Big|_{z=0}=0,\ \left(\vec{H}_{1\tau}-\vec{H}_{\tau}\right)\Big|_{z=0}=0,\ \left(\vec{E}_{2\tau}-\vec{E}_{\tau}\right)\Big|_{z=\Delta}=0,\ \left(\vec{H}_{2\tau}-\vec{H}_{\tau}\right)\Big|_{z=\Delta}=0 \tag{3}$$

и условиям излучения на бесконечности для полей $\vec{E}_1,\ \vec{H}_1;\ \vec{E}_2,\ \vec{H}_2$.

Представление поверхностных волн через цилиндрические базисные поля. Решение краевой задачи (1)–(3) представим через базисные цилиндрические электромагнитные поля с осевой симметрией вида $\Phi_m = \exp\left(im\varphi\right),\quad m=0,\ 1,\ 2,\dots$, в цилиндрической системе координат $O\rho z\varphi$ с временной зависимостью $\exp\left(-i\omega t\right)$, $\omega = 2\pi f$.

Поверхностные волны [2, с. 130] определяются формулами

$$\begin{gathered}
\vec{E}_2 = x_2\left(\lambda\right)\vec{M}_m^{(-1)}\left(\vec{\rho};\lambda,k_0\right)+y_2\left(\lambda\right)\vec{M}_m^{(-2)}\left(\vec{\rho};\lambda,k_0\right),\\
\vec{H}_2 = h_0x_2\left(\left(\lambda\right)\vec{M}_m^{(-2)}\left(\vec{\rho};\lambda,k_0\right)+y_2\left(\lambda\right)\vec{M}_m^{(-1)}\left(\vec{\rho};\lambda,k_0\right)\right),\quad z>\Delta;\\
\vec{E}_1 = x_1\left(\lambda\right)\vec{M}_m^{(+1)}\left(\vec{\rho};\lambda,k_0\right)+y_1\left(\lambda\right)\vec{M}_m^{(+2)}\left(\vec{\rho};\lambda,k_0\right),\\
\vec{H}_1 = h_0\left(x_1\left(\lambda\right)\vec{M}_m^{(+2)}\left(\vec{\rho};\lambda,k_0\right)+y_1\left(\lambda\right)\vec{M}_m^{(+1)}\left(\vec{\rho};\lambda,k_0\right)\right),\quad z<0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Волны внутри биизотропного слоя *D* выражаются через базисные поля [2, с. 139]

$$\begin{gathered}
\vec{E} = x\left(\lambda\right)\vec{K}_m^{(-1)}+y\left(\lambda\right)\vec{K}_m^{(+1)}+z\left(\lambda\right)\vec{K}_m^{(-2)}+t\left(\lambda\right)\vec{K}_m^{(+2)},\\
\vec{H} = x\left(\lambda\right)p_1\vec{K}_m^{(-1)}+y\left(\lambda\right)p_1\vec{K}_m^{(+1)}+z\left(\lambda\right)p_2\vec{K}_m^{(-2)}+t\left(\lambda\right)p_2\vec{K}_m^{(+2)},
\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\vec{K}_m^{(\pm j)} = \vec{K}_m^{(\pm j)}\left(\vec{\rho};\lambda,k_j\right) = \vec{M}_m^{(\pm 2)}\left(\vec{\rho};\lambda,k_j\right)-q_j\vec{M}_m^{(\pm 1)}\left(\vec{\rho};\lambda,k_j\right),\quad j=1,\ 2;$$

$$\vec{M}_m^{(\mp 1)}\left(\vec{\rho};\lambda,k_s\right) = \vec{V}_m^{(1)}\left(\lambda\rho\right)e^{\mp v_s(\lambda)z}\Phi_m,\quad s=0,\ 1,\ 2,$$

$$\vec{M}_m^{(\mp 2)}\left(\vec{\rho};\lambda,k_s\right) = \frac{1}{k_s}\left(\mp v_s\left(\lambda\right)\vec{V}_m^{(2)}\left(\lambda\rho\right)+\lambda J_m\left(\lambda\rho\right)\vec{e}_z\right)e^{\mp v_s(\lambda)z}\Phi_m;$$

$$\vec{V}_m^{(1)}\left(\lambda\rho\right) = \frac{im}{\lambda\rho}J_m\left(\lambda\rho\right)\vec{e}_\rho - J_m'\left(\lambda\rho\right)\vec{e}_\varphi,\ \vec{V}_m^{(2)}\left(\lambda\rho\right) = J_m'\left(\lambda\rho\right)\vec{e}_\rho+\frac{im}{\lambda\rho}J_m\left(\lambda\rho\right)\vec{e}_\varphi, \tag{6}$$

$$v_j = \sqrt{\lambda^2-k_j^2},\ -\frac{\pi}{2}\le\arg v_j<\frac{\pi}{2},\ \Phi_m = \exp\left(im\varphi\right),\quad m=0,1,2,\dots;$$

$v_0(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-k_0^2}$ при $\lambda \ge k_0$, $v_0(\lambda)=-i\sqrt{k_0^2-\lambda^2}$ при $k_0>\lambda$, $0\le\lambda<\infty$; $h_0=\dfrac{1}{iZ_0}$, $Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ – орты цилиндрической системы координат, $J_m(\cdot)$ – функции Бесселя, $J'_m(\cdot)$ – производная, $\vec{\rho}=(\rho,\ z,\varphi)$.

Поля $\vec{E}_1,\vec{H}_1$; $\vec{E}_2,\vec{H}_2$; $\vec{E},\vec{H}$ удовлетворяют условиям (1)–(3) краевой задачи 1. Условия излучения на бесконечности для полей $\vec{E}_1,\vec{H}_1$; $\vec{E}_2,\vec{H}_2$ (4) выполнены, так как электромагнитная энергия поля $\vec{E}_1,\vec{H}_1$ распространяется в отрицательном направлении оси *Oz*, а энергия поля $\vec{E}_2,\vec{H}_2$ излучается в положительном направлении оси *Oz*.

Краевая задача с двухсторонними граничными условиями для определения поверхностных волн. Для аналитического построения поверхностных волн воспользуемся двухсторонними граничными условиями [10], эквивалентными граничным условиям (3). Применение двухсторонних граничных условий позволяет исключить из рассмотрения электромагнитное поле $\vec{E},\vec{H}$ (5) в слое *D*. Для определения амплитуд поверхностных волн (4) сформулируем специальную краевую задачу, эквивалентную исходной краевой задаче (1)–(3).

Краевая задача 2. Требуется определить цилиндрические поля $\vec{E}_1,\vec{H}_1$; $\vec{E}_2,\vec{H}_2$ (4), которые удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot}\vec{E}_j=i\omega\mu_0\vec{H}_j,\ \operatorname{rot}\vec{H}_j=-i\omega\varepsilon_0\vec{E}_j \text{ в } D_j, \tag{7}$$

двухстороннему граничному условию [10]

$$\vec{U}_1\Big|_{z=0}=\hat{C}(\lambda)\vec{U}_2\Big|_{z=\Delta} \tag{8}$$

и условиям излучения в областях D_j.

Матрица в условии (8) определяется формулами

$$\hat{C}=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34}\\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44}\end{pmatrix},\ \vec{U}_j=\begin{pmatrix} E_{jV_1}\\ H_{jV_2}\\ E_{jV_2}\\ H_{jV_1}\end{pmatrix},\quad j=1,2; \tag{9}$$

$$\begin{gathered}
C_{11}=p\left(p_1C_2-p_2C_1\right),\ C_{12}=p\left(q_1\frac{k_1}{v_1}S_1-q_2\frac{k_2}{v_2}S_2\right),\\
C_{13}=p\left(q_2\frac{p_1k_2}{v_2}S_2-q_1\frac{p_2k_1}{v_1}S_1\right),\ C_{14}=p\left(C_1-C_2\right),\\
C_{21}=pp_1p_2\left(q_2\frac{v_2}{k_2}S_2-q_1\frac{v_1}{k_1}S_1\right),\ C_{22}=p\left(p_1C_1-p_2C_2\right),\\
C_{23}=pp_1p_2\left(C_2-C_1\right),\ C_{24}=p\left(\frac{p_1v_1}{q_1k_1}S_1-\frac{p_2v_2}{q_2k_2}S_2\right),\\
C_{31}=p\left(\frac{p_1v_2}{q_2k_2}S_2-\frac{p_2v_1}{q_1k_1}S_1\right),\ C_{32}=p\left(C_1-C_2\right),\\
C_{33}=p\left(p_1C_2-p_2C_1\right),\ C_{34}=p\left(\frac{v_1}{q_1k_1}S_1-\frac{v_2}{q_2k_2}S_2\right),\\
C_{41}=pp_1p_2\left(C_2-C_1\right),\ C_{42}=p\left(q_1p_1\frac{k_1}{v_1}S_1-q_2p_2\frac{k_2}{v_2}S_2\right),
\end{gathered} \tag{10}$$

$$C_{43} = pp_1p_2\left(q_2\frac{k_2}{v_2}S_2 - q_1\frac{k_1}{v_1}S_1\right),\ C_{44} = p\left(p_1C_1 - p_2C_2\right),$$

$$C_j = \mathrm{ch}\left(\xi_j\right),\ S_j = \mathrm{sh}\left(\xi_j\right),\ \xi_j = v_j(\lambda)\Delta,\ v_j(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2},\ -\frac{\pi}{2} \le \arg v_j < \frac{\pi}{2};$$

$$k_j = k_0\bar{k}_j,\ f_0 = k_0\bar{f}_0,\ f_j = k_0\bar{f}_j,\ g = k_0^2\bar{g},\ g_j = k_0\bar{g}_j,\ a = k_0\bar{a},\ b = k_0\bar{b}, \tag{10}$$

$$p_j = \frac{\bar{p}_j}{Z_0},\ q_j = \frac{\bar{g}}{\bar{k}_j\bar{g}_j},\ v_j = k_0\bar{v}_j,\ p = \frac{1}{p_1 - p_2} = Z_0\bar{p},\ k_0 = \frac{\omega}{c},$$

где безразмерные величины задаются выражениями

$$\bar{k}_j = \sqrt{\bar{g} + \frac{1}{2}\bar{a}^2 + \bar{a}\bar{f}_j},\ \bar{f}_j = (-1)^j\,\bar{f}_0,\ \bar{f}_0 = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r - \bar{b}^2},$$

$$\bar{g} = \varepsilon_r\mu_r - G_rZ_r,\ \bar{g}_j = \bar{f}_j - \frac{1}{2}\bar{a},\ \bar{p}_j = \frac{1}{\mu_r}\left(\frac{i\bar{g}}{\bar{g}_j} - Z_r\right),\ \bar{a} = i\left(G_r - Z_r\right), \tag{11}$$

$$\bar{b} = \frac{1}{2}\left(G_r + Z_r\right),\ \bar{v}_j = \sqrt{\bar{\lambda}^2 - \bar{k}_j^{\,2}},\ \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{k_0},\ \bar{p} = \frac{1}{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}. \blacksquare$$

Аналитическое решение краевой задачи с двухсторонними граничными условиями. Представим решение краевой задачи (7), (8) в виде аналитического разложения (4). Электромагнитные поля (4) автоматически удовлетворяют уравнениям (7). Рассмотрим граничное условие (8). Для формулировки двухстороннего граничного условия (8), связывающего поля $\vec{E}_1,\vec{H}_1$ и $\vec{E}_2,\vec{H}_2$ по обе стороны экрана, запишем касательные составляющие полей (4) на плоскостях Γ_1 и Γ_2 в базисе $\vec{V}_m^{(1)},\vec{V}_m^{(2)}$ (6):

$$\vec{E}_{1\tau}(\lambda)\Big|_{z=0} = \left(E_{1V_1}(\lambda)\vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) + E_{1V_2}(\lambda)\vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho)\right)\Phi_m,$$

$$\vec{H}_{1\tau}(\lambda)\Big|_{z=0} = \left(H_{1V_1}(\lambda)\vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) + H_{1V_2}(\lambda)\vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho)\right)\Phi_m,$$

$$\vec{E}_{2\tau}(\lambda)\Big|_{z=\Delta} = \left(E_{2V_1}(\lambda)\vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) + E_{2V_2}(\lambda)\vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho)\right)\Phi_m,$$

$$\vec{H}_{2\tau}(\lambda)\Big|_{z=\Delta} = \left(H_{2V_1}(\lambda)\vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) + H_{2V_2}(\lambda)\vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho)\right)\Phi_m,$$

где

$$E_{1V_1} = x_1(\lambda),\quad E_{1V_2} = \bar{v}_0(\lambda)y_1(\lambda),$$

$$H_{1V_1} = h_0y_1(\lambda),\quad H_{1V_2} = h_0\bar{v}_0(\lambda)x_1(\lambda),$$

$$E_{2V_1} = x_2(\lambda)F(\lambda),\quad E_{2V_2} = -\bar{v}_0(\lambda)y_2(\lambda)F(\lambda),$$

$$H_{2V_1} = h_0y_2(\lambda)F(\lambda),\quad H_{2V_2} = -h_0\bar{v}_0(\lambda)x_2(\lambda)F(\lambda),$$

$$F(\lambda) = e^{-v_0(\lambda)\Delta},\quad \bar{v}_0(\lambda) = \frac{v_0(\lambda)}{k_0}.$$

Учитывая вышестоящие формулы, представим векторы $\vec{U}_j$ (9) в виде

$$\vec{U}_1 = \begin{pmatrix} E_{1V_1} \\ H_{1V_2} \\ E_{1V_2} \\ H_{1V_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(\lambda) \\ h_0\bar{v}_0(\lambda)x_1(\lambda) \\ \bar{v}_0(\lambda)y_1(\lambda) \\ h_0y_1(\lambda) \end{pmatrix},\quad \vec{U}_2 = \begin{pmatrix} E_{2V_1} \\ H_{2V_2} \\ E_{2V_2} \\ H_{2V_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(\lambda)F(\lambda) \\ -h_0\bar{v}_0(\lambda)x_2(\lambda)F(\lambda) \\ -\bar{v}_0(\lambda)y_2(\lambda)F(\lambda) \\ h_0y_2(\lambda)F(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Далее запишем матричное граничное условие (8) в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{2V_1} \\ H_{2V_2} \\ E_{2V_2} \\ H_{2V_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1V_1} \\ H_{1V_2} \\ E_{1V_2} \\ H_{1V_1} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Подставляя векторы $\vec{U}_j$ в (12), получим систему алгебраических уравнений для определения амплитуд $x_j(\lambda)\ y_j(\lambda)$:

$$\begin{gathered} \left(C_{11} - h_0\bar{v}_0C_{12}\right)x_2 + \left(h_0C_{14} - \bar{v}_0C_{13}\right)y_2 = x_1 / F, \\ \left(C_{21} - h_0\bar{v}_0C_{22}\right)x_2 + \left(h_0C_{24} - \bar{v}_0C_{23}\right)y_2 = h_0\bar{v}_0x_1 / F, \\ \left(C_{31} - h_0\bar{v}_0C_{32}\right)x_2 + \left(h_0C_{34} - \bar{v}_0C_{33}\right)y_2 = \bar{v}_0y_1 / F, \\ \left(C_{41} - h_0\bar{v}_0C_{42}\right)x_2 + \left(h_0C_{44} - \bar{v}_0C_{43}\right)y_2 = h_0y_1 / F. \end{gathered} \tag{13}$$

Из уравнений (13) исключим величины x_1, y_1 и получим однородную систему алгебраических уравнений для определения амплитуд x_2, y_2:

$$Q_{11}x_2 + Q_{12}y_2 = 0, \quad Q_{21}x_2 + Q_{22}y_2 = 0. \tag{14}$$

Однородная система (14) разрешима, когда определитель системы

$$d = Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21} = 0, \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered} Q_{11} = C_{11} - h_0\bar{v}_0C_{12} - \frac{1}{h_0\bar{v}_0}C_{21} + C_{22}, \\ Q_{12} = -\bar{v}_0C_{13} + h_0C_{14} + \frac{1}{h_0}C_{23} - \frac{1}{\bar{v}_0}C_{24}, \\ Q_{21} = -\frac{1}{\bar{v}_0}C_{31} + h_0C_{32} + \frac{1}{h_0}C_{41} - \bar{v}_0C_{42}, \\ Q_{22} = C_{33} - \frac{h_0}{\bar{v}_0}C_{34} - \frac{\bar{v}_0}{h_0}C_{43} + C_{44}, \\ \bar{v}_0 = \frac{v_0}{k_0}. \end{gathered} \tag{16}$$

Если определитель $d = 0$, то система (14) разрешима:

$$x_2 = E_0Q_{12}, \qquad y_2 = -E_0Q_{11}, \tag{17}$$

где E_0 – произвольная величина с физической размерностью $\left[E_0\right] = \text{В} / \text{м}$.

Амплитуды x_1, y_1 определим из первого и четвертого уравнений (13):

$$\begin{gathered} x_1 = E_0F\left[Q_{12}\left(C_{11} - h_0\bar{v}_0C_{12}\right) - Q_{11}\left(h_0C_{14} - \bar{v}_0C_{13}\right)\right], \\ y_1 = E_0\frac{F}{h_0}\left[Q_{12}\left(C_{41} - h_0\bar{v}_0C_{42}\right) - Q_{11}\left(h_0C_{44} - \bar{v}_0C_{43}\right)\right]. \end{gathered} \tag{18}$$

Таким образом, амплитуды (17), (18) поверхностных волн (4) определены.

Задача для вычисления последовательности частот поверхностных волн. Возникает проблема наложения условий на параметры задачи, при которых выполнено уравнение (15). Величины Q_{sj} уравнения (15) содержат четыре материальных параметра ε_r, μ_r, G_r, Z_r, в общем случае комплексных, и три действительных параметра λ, Δ, ω. Сформулируем задачу для определения частоты ω поверхностных волн (4).

Спектральная задача. При заданных материальных параметрах ε_r, μ_r, G_r, Z_r, при заданной толщине Δ слоя D и заданном параметре $\lambda(\lambda > 0)$ полей (4) требуется определить частоту $\omega(\omega > 0)$, для которой выполнено уравнение (15). Порядок m полей (4) считается произвольным заданным целым числом.

Для упрощения решения спектральной задачи введем ограничения на материальные параметры. Будем считать, что ε_r, μ_r, G_r, Z_r – действительные числа и выполнено условие

$$Z_r = G_r = \chi. \tag{19}$$

Заметим, что при условии (19) для параметров биизотропности экран обладает свойствами для электромагнитных полей перед экраном и за экраном, описанными в статьях [11, 12].

Тогда величины (11) примут вид

$$\begin{gathered}
\bar{a} = 0,\ \bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \sqrt{\bar{g}} = \bar{k},\ 0 \le \arg \bar{k} < \pi,\ \bar{g} = \varepsilon_r \mu_r - \chi^2, \\
\bar{g} = \bar{k}^2,\ \bar{f}_0 = \bar{k},\ \bar{f}_1 = -\bar{k},\ \bar{f}_2 = \bar{k},\ \bar{g}_1 = -\bar{k},\ \bar{g}_2 = \bar{k}, \\
q_1 = -1,\ q_2 = 1,\ \bar{p}_1 = -\frac{1}{\mu_r}\left(i\bar{k} + \chi\right),\ \bar{p}_2 = \frac{1}{\mu_r}\left(i\bar{k} - \chi\right), \\
\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \sqrt{\lambda^2 - \bar{k}^2} = \bar{v},\ -\frac{\pi}{2} \le \arg \bar{v} < \frac{\pi}{2}, \\
\bar{p} = \frac{i\mu_r}{2\bar{k}},\ \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = -\frac{2\chi}{\mu_r},\ \bar{p}\bar{p}_1\bar{p}_2 = \frac{i\varepsilon_r}{2\bar{k}}, \\
C_1 = C_2 = C = \operatorname{ch}\left(k_0 \bar{v} \Delta\right),\ S_1 = S_2 = S = \operatorname{sh}\left(k_0 \bar{v} \Delta\right).
\end{gathered} \tag{20}$$

Подставляя (20) в (10), вычислим матричные элементы

$$\begin{gathered}
C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{44} = C,\ C_{14} = C_{23} = C_{32} = C_{41} = 0, \\
C_{12} = -\frac{\mu_r}{h_0 \bar{v}} S,\ C_{13} = -\frac{i\chi}{\bar{v}} S,\ C_{21} = -\frac{h_0\, \varepsilon_r\, \bar{v}}{\bar{g}} S, \\
C_{24} = \frac{i\chi\bar{v}}{\bar{g}} S,\ C_{31} = -\frac{i\chi\bar{v}}{\bar{g}} S,\ C_{34} = -\frac{\mu_r\, \bar{v}}{h_0 \bar{g}} S, \\
C_{42} = \frac{i\chi}{\bar{v}} S,\ C_{43} = -\frac{h_0\, \varepsilon_r}{\bar{v}} S.
\end{gathered} \tag{21}$$

Учитывая (21), вычислим матричные элементы (16):

$$\begin{gathered}
Q_{11} = 2(C + B_1 S),\ Q_{22} = 2(C + B_2 S), \\
Q_{12} = \frac{2ic_0}{a_0} S,\ Q_{21} = -\frac{2ic_0}{a_0} S,
\end{gathered} \tag{22}$$

где

$$B_j = \frac{b_j}{a_0},\ a_0 = 2\bar{g}\bar{v}_0\bar{v},\ b_1 = \bar{g}\,\mu_r\,\bar{v}_0^2 + \varepsilon_r\,\bar{v}^2,\ b_2 = \bar{g}\,\varepsilon_r\,\bar{v}_0^2 + \mu_r\,\bar{v}^2,\ c_0 = \chi\left(\bar{g}\bar{v}_0^2 - \bar{v}^2\right).$$

После подстановки формул (22) в (15) придем к уравнению

$$a_0^2C^2 + a_0(b_1 + b_2)CS + \left(b_1b_2 - c_0^2\right)S^2 = 0. \tag{23}$$

Сузим область параметров, вводя дополнительные ограничения с помощью неравенств

$$\bar{g} > 1,\ \ 1 < \bar{\lambda}^2 < \bar{g}. \tag{24}$$

Из условий (24) следуют неравенства и формулы для величины w:

$$\bar{v} = -i\sqrt{\bar{g} - \bar{\lambda}^2} = -iw,\ w = \sqrt{\bar{g} - \bar{\lambda}^2} > 0,\ \bar{\lambda}^2 = \bar{g} - w^2,$$

$$\bar{v}_0 = \sqrt{\bar{g} - w^2 - 1},\ \bar{g} - w^2 - 1 > 0,\quad \bar{v}^2 = -w^2,\ \bar{v}_0^2 = \bar{g} - w^2 - 1,$$

$$a_0 = -2i\bar{g}\bar{v}_0 w = -i\bar{a}_0,\ \bar{a}_0 = 2\bar{g}w\sqrt{\bar{g} - w^2 - 1}, \tag{25}$$

$$b_1 = \bar{g}(\bar{g} - 1)\mu_r - (\bar{g}\mu_r + \varepsilon_r)w^2,\ b_2 = \bar{g}(\bar{g} - 1)\varepsilon_r - (\bar{g}\varepsilon_r + \mu_r)w^2,$$

$$c_0 = \chi(\bar{g} - 1)\left(\bar{g} - w^2\right),\ C = \mathrm{ch}(-ik_0 w\Delta) = \cos(k_0 w\Delta),$$

$$S = \mathrm{sh}(-ik_0 w\Delta) = -i\sin(k_0 w\Delta).$$

Из неравенств (24), (25) следует выражение

$$0 < w^2 < \bar{g} - 1. \tag{26}$$

Подставляя величины (25) в равенство (23), получим дисперсионное уравнение для определения частоты ω:

$$\left(b_1b_2 - c_0^2\right)\mathrm{tg}^2(k_0 w\Delta) + \bar{a}_0(b_1 + b_2)\mathrm{tg}(k_0 w\Delta) + \bar{a}_0^2 = 0. \tag{27}$$

Уравнение (27) представляет собой квадратное уравнение

$$\left(b_1b_2 - c_0^2\right)Y^2 + (b_1 + b_2)Y + 1 = 0,\quad Y = \frac{1}{\bar{a}_0}\mathrm{tg}(k_0 w\Delta),$$

с действительными корнями

$$Y_{1,2} = \left[-(b_1 + b_2) \pm \sqrt{(b_1 - b_2)^2 + 4c_0^2}\right] \Big/ 2\left(b_1b_2 - c_0^2\right).$$

В результате уравнение (27) сведено к решению тригонометрических уравнений

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\omega w\Delta}{c}\right) = \bar{a}_0 Y_1,\quad \mathrm{tg}\left(\frac{\omega w\Delta}{c}\right) = \bar{a}_0 Y_2. \tag{28}$$

Решая уравнения (28), построим две последовательности спектральных значений частоты:

$$\omega = \omega_n^{(j)} = \frac{c}{w\Delta}\left(\mathrm{arctg}\left(\bar{a}_0 Y_j\right) + \pi n\right),\quad j = 1, 2, \tag{29}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ для положительных Y_j, $n = 1, 2, 3, \ldots$ для отрицательных Y_j.

Плазмоны в виде цилиндрических поверхностных волн. Аналитическое решение дисперсионного уравнения (27) позволило определить спектральные частоты (29), для которых существуют поверхностные волны (4). Введем обозначения цилиндрических полей (4), соответствующих частотам (29):

$$\vec{E}^{(j)}_{1mn}(\vec{\rho},w)=E_0\left(x^{(j)}_{1n}(w)\vec{M}^{(+1)}_m\left(\vec{\rho};\lambda^{(j)}_n,k^{(j)}_n\right)+y^{(j)}_{1n}(w)\vec{M}^{(+2)}_m\left(\vec{\rho};\lambda^{(j)}_n,k^{(j)}_n\right)\right),$$

$$\vec{H}^{(j)}_{1mn}(\vec{\rho},w)=E_0h_0\left(x^{(j)}_{1n}(w)\vec{M}^{(+2)}_m\left(\vec{\rho};\lambda^{(j)}_n,k^{(j)}_n\right)+y^{(j)}_{1n}(w)\vec{M}^{(+1)}_m\left(\vec{\rho};\lambda^{(j)}_n,k^{(j)}_n\right)\right),\ z<0; \tag{30}$$

$$\vec{E}^{(j)}_{2mn}(\vec{\rho},w)=E_0\left(x^{(j)}_{2n}(w)\vec{M}^{(-1)}_m\left(\vec{\rho};\lambda^{(j)}_n,k^{(j)}_n\right)+y^{(j)}_{2n}(w)\vec{M}^{(-2)}_m\left(\vec{\rho};\lambda^{(j)}_n,k^{(j)}_n\right)\right),$$

$$\vec{H}^{(j)}_{2mn}(\vec{\rho},w)=E_0h_0\left(x^{(j)}_{2n}(w)\vec{M}^{(-2)}_m\left(\vec{\rho};\lambda^{(j)}_n,k^{(j)}_n\right)+y^{(j)}_{2n}(w)\vec{M}^{(-1)}_m\left(\vec{\rho};\lambda^{(j)}_n,k^{(j)}_n\right)\right),\ z>\Delta, \tag{31}$$

где $j=1,2;\ n=0,1,2,\ldots$ или $n=1,2,\ldots;\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots;$

$$\vec{M}^{(\mp1)}_m\left(\vec{\rho};\lambda^{(j)}_n,k^{(j)}_n\right)=\vec{V}^{(1)}_m\left(\lambda^{(j)}_n\rho\right)\exp\left(\mp k^{(j)}_n\bar{v}_0z\right)\Phi_m,$$

$$\vec{M}^{(\mp2)}_m\left(\vec{\rho};\lambda^{(j)}_n,k^{(j)}_n\right)=\left(\mp\bar{v}_0\vec{V}^{(2)}_m\left(\lambda^{(j)}_n\rho\right)+\bar{\lambda}J_m\left(\lambda^{(j)}_n\rho\right)\vec{e}_z\right)\exp\left(\mp k^{(j)}_n\bar{v}_0z\right)\Phi_m, \tag{32}$$

$$\bar{v}_0=\sqrt{\bar{g}-w^2-1},\ \bar{\lambda}=\sqrt{\bar{g}-w^2},\ 0<w<\sqrt{\bar{g}-1},$$

$$k^{(j)}_n=\omega^{(j)}_n/c,\ \lambda^{(j)}_n=k^{(j)}_n\sqrt{\bar{g}-w^2},\ h_0=\frac{1}{iZ_0},\ Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}.$$

Используя соотношения (21), (22), (25), определим амплитуды (17), (18) полей (30), (31) для различных частот:

$$x^{(j)}_{2n}(w)=Q^{(j)}_{12}(n,w),\quad y^{(j)}_{2n}(w)=-Q^{(j)}_{11}(n,w), \tag{33}$$

где

$$Q^{(j)}_{12}(n,w)=\frac{ic_0}{\bar{g}w\bar{v}_0}\sin\left(K^{(j)}_n\right),\ Q^{(j)}_{11}(n,w)=2\cos\left(K^{(j)}_n\right)+\bar{B}_1\sin\left(K^{(j)}_n\right),$$

$$\bar{B}_1=(\bar{g}(\bar{g}-1)\mu_r-(\bar{g}\mu_r+\varepsilon_r)w^2)/\bar{g}w\bar{v}_0,\ K^{(j)}_n=k^{(j)}_nw\Delta;$$

$$x^{(j)}_{1n}(w)=-F^{(j)}_n(w)\left[i\frac{\bar{v}_0\chi}{w}\sin\left(K^{(j)}_n\right)Q^{(j)}_{11}(n,w)-Q^{(j)}_{12}(n,w)\left(\cos\left(K^{(j)}_n\right)+\frac{\bar{v}_0\mu_r}{w}\sin\left(K^{(j)}_n\right)\right)\right],$$

$$y^{(j)}_{1n}(w)=-F^{(j)}_n(w)\left[i\frac{\bar{v}_0\chi}{w}\sin\left(K^{(j)}_n\right)Q^{(j)}_{12}(n,w)+Q^{(j)}_{11}(n,w)\left(\cos\left(K^{(j)}_n\right)+\frac{\bar{v}_0\varepsilon_r}{w}\sin\left(K^{(j)}_n\right)\right)\right], \tag{34}$$

$$F^{(j)}_n(w)=\exp\left(-k^{(j)}_n\bar{v}_0\Delta\right).$$

Заметим, что на материальные параметры экрана накладываются условия, при которых величины под знаками квадратного корня в формулах являются положительными.

Алгоритм расчета плазмонов. Алгоритм вычисления спектральных полей состоит из следующих шагов:

1. Ввод исходных данных:

ε_r – заданная относительная диэлектрическая проницаемость экрана, действительная величина в пределах $0<\varepsilon_r<\infty$;

μ_r – относительная магнитная проницаемость экрана, действительная величина в пределах $0<\mu_r<\infty,\quad \varepsilon_r\mu_r>1$;

ψ – заданная действительная величина в пределах $\psi_0 < \psi < \frac{\pi}{2}$, $\psi_0 = \mathrm{arctg}\left(1/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r - 1}\right)$;

α – заданная действительная величина в пределах $0 < \alpha < 1$;

G_r, Z_r – относительные параметры биизотропности экрана, действительные величины, условия задания величин: $G_r = Z_r = \chi$, $\chi = \left(\frac{\varepsilon_r\mu_r}{1+\mathrm{tg}^2(\psi)}\right)^{\frac{1}{2}}$;

Δ – толщина экрана (плоского слоя);

w – спектральный параметр непрерывного спектра, условия задания величины: $0 < w < \sqrt{\bar{g}-1}$;

$\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м – электрическая и магнитная постоянные;

$c = 3\cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

2. Вычисление вспомогательных величин:

$$\bar{g} = \varepsilon_r\mu_r - \chi^2,$$

$w = \alpha\sqrt{\bar{g}-1}$ – спектральный параметр непрерывного спектра,

$$v = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}, \quad \bar{\lambda} = \sqrt{\bar{g} - w^2}, \quad \bar{v}_0 = \sqrt{\bar{g} - w^2 - 1}, \quad b_1 = \bar{g}(\bar{g}-1)\mu_r - (\bar{g}\mu_r + \varepsilon_r)w^2,$$

$$b_2 = \bar{g}(\bar{g}-1)\varepsilon_r - (\bar{g}\varepsilon_r + \mu_r)w^2, \; c_0 = \chi(\bar{g}-1)(\bar{g}-w^2), \; B_j = \frac{b_j}{\bar{a}_0}, \; \bar{a}_0 = 2\bar{g}w\bar{v}_0; \tag{35}$$

$$У_1 = \left[-(b_1+b_2) + \sqrt{(b_1-b_2)^2 + 4c_0^2}\right] \Big/ 2\left(b_1b_2 - c_0^2\right),$$

$$У_2 = \left[-(b_1+b_2) - \sqrt{(b_1-b_2)^2 + 4c_0^2}\right] \Big/ 2\left(b_1b_2 - c_0^2\right). \tag{36}$$

3. Вычисление спектральных дискретных значений частоты и спектральных величин:

$\omega_n^{(1)}(w), \omega_n^{(2)}(w)$ – две последовательности значений частоты;

$$\omega_n^{(1)}(w) = \frac{c}{w\Delta}\left(\mathrm{arctg}\left(\bar{a}_0 У_1\right) + \pi n\right), \tag{37}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, если $У_1 > 0$, и $n = 1, 2, \ldots$, если $У_1 \le 0$;

$$\omega_n^{(2)}(w) = \frac{c}{w\Delta}\left(\mathrm{arctg}\left(\bar{a}_0 У_2\right) + \pi n\right), \tag{38}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, если $У_2 > 0$, и $n = 1, 2, \ldots$, если $У_2 \le 0$;

$$k_n^{(j)} = \omega_n^{(j)}(w)/c, \quad \lambda_n^{(j)} = k_n^{(j)}\bar{\lambda}, \quad j = 1, 2;$$

$$K_n^{(j)} = k_n^{(j)} w\Delta, \quad F_n^{(j)} = \exp\left(-k_n^{(j)}\bar{v}_0\Delta\right). \tag{39}$$

4. Расчет дискретных последовательностей электромагнитных полей (плазмонов), распространяющихся вдоль поверхности экрана:

$\vec{\rho} = (\rho, z, \varphi)$ – цилиндрические координаты точки, в которой рассчитываются поля;

$\vec{E}^{(j)}_{1mn}(\vec{\rho},w), \vec{H}^{(j)}_{1mn}(\vec{\rho},w)$ – поля перед экраном $(z<0)$;

$\vec{E}^{(j)}_{2mn}(\vec{\rho},w), \vec{H}^{(j)}_{2mn}(\vec{\rho},w)$ – поля за экраном $(z>\Delta)$;

m – целое число, характеризующее зависимость поля от азимутального угла φ на поверхности экрана.

Поля рассчитываются по формулам (30), (31) с использованием (32), амплитуды полей рассчитываются с помощью формул (33), (34).

Для оценки диапазона частот, на которых происходит возбуждение поверхностных волн, рассмотрим следующий вариант параметров:

– параметры экрана $\varepsilon_r=5$, $\mu_r=2$, $G_r=Z_r=\sqrt{5}$, $\Delta=10^{-3}$ м;

– параметры спектрального многообразия $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\psi=\dfrac{\pi}{4}$, $w=1$;

– первые три частоты последовательности частот (37) $\omega_1^{(1)}(1)=8{,}859\cdot 10^{11}$ Гц ($У_1=-0{,}011$, $n=1$), $\omega_2^{(1)}(1)=1{,}828\cdot 10^{12}$ Гц ($У_1=-0{,}011$, $n=2$), $\omega_3^{(1)}(1)=2{,}771\cdot 10^{12}$ Гц ($У_1=-0{,}011$, $n=3$) и т. д. определяют диапазоны частот для указанных значений материальных параметров биизотропного экрана.

Частный случай расчетной структуры. Рассмотрим случай со специальными значениями материальных параметров экрана, для которых значительно упрощаются итоговые формулы. Преобразуем величины (35), входящие в (36), к виду

$$b_1+b_2=(\mu_r+\varepsilon_r)\left(\bar{g}(\bar{g}-1)-(\bar{g}+1)w^2\right),$$

$$b_1-b_2=(\mu_r-\varepsilon_r)(\bar{g}-1)\left(\bar{g}-w^2\right).$$

Выберем параметры структуры специальным образом. Полагая

$$\varepsilon_r=\mu_r=\nu>0,\ \chi>0,\ w^2=\frac{\bar{g}(\bar{g}-1)}{\bar{g}+1}, \tag{40}$$

удовлетворим условию (26). Тогда $b_1+b_2=0, b_1-b_2=0,$ откуда следует $b_1=b_2=0, \bar{v}_0=w/\sqrt{\bar{g}}$, $c_0=2\chi w^2$, $\bar{a}_0=2\sqrt{\bar{g}}w^2$, $\bar{\lambda}=\sqrt{\dfrac{2\bar{g}}{\bar{g}+1}}$, $B_j=0,\ \bar{g}=\nu^2-\chi^2.$

Формулы (36) примут вид

$$У_1=-\frac{1}{c_0}<0,\quad У_2=\frac{1}{c_0}>0.$$

Величины $\bar{a}_0 У_1=-\sqrt{\bar{g}}/\chi$, $\bar{a}_0 У_2=\sqrt{\bar{g}}/\chi$ представим через угол ψ, полагая

$$\frac{\sqrt{\bar{g}}}{\chi}=\mathrm{tg}\psi,\ 0<\psi<\frac{\pi}{2}. \tag{41}$$

В результате формулы (37), (38) для частот упрощаются:

$$\omega_n^{(1)}=\frac{c}{w\Delta}(-\psi+\pi n),\ n=1,\ 2,\ldots;\ \ \omega_l^{(2)}=\frac{c}{w\Delta}(\psi+\pi l),\ l=0,1,2,\ldots \tag{42}$$

Из равенства (41) следует

$$\chi=\nu\cos\psi,\ \bar{g}=\nu^2\sin^2\psi. \tag{43}$$

Удовлетворяя первому неравенству (24), получим условие на материальный параметр ν:

$$\nu > \frac{1}{\sin\psi},\ 0 < \psi < \frac{\pi}{2}. \tag{44}$$

Показано, что при задании угла ψ материальный параметр ν необходимо выбрать согласно условию (44). С учетом значений (40), (42), (43) величины (39) примут значения

$$k_n^{(1)} = (-\psi + \pi n)/w\Delta,\ k_l^{(2)} = (\psi + \pi l)/w\Delta,$$

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{\sqrt{2}(-\psi + \pi n)}{\Delta\sqrt{\nu^2\sin^2\psi - 1}},\ \lambda_l^{(2)} = \frac{\sqrt{2}(\psi + \pi l)}{\Delta\sqrt{\nu^2\sin^2\psi - 1}},$$

$$K_n^{(1)} = -\psi + \pi n,\ K_l^{(2)} = \psi + \pi l,$$

$$F_n^{(1)} = \exp\left(\frac{\psi - \pi n}{\nu\sin\psi}\right),\ F_l^{(2)} = \exp\left(-\frac{\psi + \pi l}{\nu\sin\psi}\right).$$

Вычислим поля (30), (31), нормируя их на величину $2\cos\psi$. Получим последовательности плазмонов.

Первая последовательность определяется формулами

$$\vec{E}_{1mn}^{(1)} = E_0 F_n^{(1)}(w)\left(i\vec{M}_m^{(+1)}\left(\vec{\rho};\lambda_n^{(1)},k_n^{(1)}\right) + \vec{M}_m^{(+2)}\left(\vec{\rho};\lambda_n^{(1)},k_n^{(1)}\right)\right),\ z<0,$$

$$\vec{H}_{1mn}^{(1)} = E_0 h_0 F_n^{(1)}(w)\left(i\vec{M}_m^{(+2)}\left(\vec{\rho};\lambda_n^{(1)},k_n^{(1)}\right) + \vec{M}_m^{(+1)}\left(\vec{\rho};\lambda_n^{(1)},k_n^{(1)}\right)\right),\ n=1,2,\ldots;$$

$$\vec{E}_{2mn}^{(1)} = E_0 (-1)^{n+1}\left(i\vec{M}_m^{(-1)}\left(\vec{\rho};\lambda_n^{(1)},k_n^{(1)}\right) + \vec{M}_m^{(-2)}\left(\vec{\rho};\lambda_n^{(1)},k_n^{(1)}\right)\right),\ z>\Delta,$$

$$\vec{H}_{2mn}^{(1)} = E_0 h_0 (-1)^{n+1}\left(i\vec{M}_m^{(-2)}\left(\vec{\rho};\lambda_n^{(1)},k_n^{(1)}\right) + \vec{M}_m^{(-1)}\left(\vec{\rho};\lambda_n^{(1)},k_n^{(1)}\right)\right),$$

вторая последовательность – формулами

$$\vec{E}_{1ml}^{(2)} = E_0 F_l^{(2)}(w)\left(i\vec{M}_m^{(+1)}\left(\vec{\rho};\lambda_l^{(2)},k_l^{(2)}\right) - \vec{M}_m^{(+2)}\left(\vec{\rho};\lambda_l^{(2)},k_l^{(2)}\right)\right),\ z<0,$$

$$\vec{H}_{1ml}^{(2)} = E_0 h_0 F_l^{(2)}(w)\left(i\vec{M}_m^{(+2)}\left(\vec{\rho};\lambda_l^{(2)},k_l^{(2)}\right) - \vec{M}_m^{(+1)}\left(\vec{\rho};\lambda_l^{(2)},k_l^{(2)}\right)\right),\ l=0,1,2,\ldots;$$

$$\vec{E}_{2ml}^{(2)} = E_0 (-1)^{l}\left(i\vec{M}_m^{(-1)}\left(\vec{\rho};\lambda_l^{(2)},k_l^{(2)}\right) - \vec{M}_m^{(-2)}\left(\vec{\rho};\lambda_l^{(2)},k_l^{(2)}\right)\right),\ z>\Delta,$$

$$\vec{H}_{2mn}^{(2)} = E_0 h_0 (-1)^{l}\left(i\vec{M}_m^{(-2)}\left(\vec{\rho};\lambda_l^{(2)},k_l^{(2)}\right) - \vec{M}_m^{(-1)}\left(\vec{\rho};\lambda_l^{(2)},k_l^{(2)}\right)\right).$$

Заметим, что возможны иные варианты построения плазмонов для других специальных значений материальных параметров экрана.

Заключение. Разработана методика построения поверхностных монохроматических электромагнитных волн на однослойном экране с использованием двухсторонних граничных условий. Рассмотрен плоский экран, выполненный из биизотропного материала с относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_r, μ_r и параметрами биизотропности G_r, Z_r. Исследовано электромагнитное поле с осевой симметрией, распространяющееся вдоль поверхности экрана на частоте ω. В работе решена задача по определению материальных параметров экрана и частоты поля, для которых существуют поверхностные волны, одновременно распространяющиеся перед экраном и за ним. Рассмотрен простейший случай, когда $G_r = Z_r = \chi$, а ε_r, μ_r – произвольные величины в пределах $0 < \varepsilon_r,\ \mu_r < \infty,\ \varepsilon_r\mu_r > 1.$ Получена формула $\chi = \chi(\alpha, \psi;\ \varepsilon_r, \mu_r)$ для определения параметра киральности χ, где величины α, ψ выбираются произвольным образом в пределах $0 < \alpha < 1,\ \ \psi_0 < \psi < \dfrac{\pi}{2}.$ Построены формулы для частот поля, на которых существуют поверхностные электромагнитные волны с осевой симметрией. Доказано существование двух последовательностей поверхностных электромагнитных волн, распространяющихся на частотах $\omega_n^{(1)} = \omega_n^{(1)}(\alpha, \psi;\ \varepsilon_r,\ \mu_r),\ n = 1, 2, \ldots;\ \omega_l^{(2)} = \omega_l^{(2)}(\alpha, \psi;\ \varepsilon_r,\ \mu_r),\ l = 1, 2, \ldots$ В результате выделено спектральное многообразие последовательностей поверхностных волн (плазмонов), распространяющихся на поверхности биизотропного экрана. Возможны другие варианты многообразий.

Список использованных источников

1. Виноградов, А. П. Электродинамика композитных материалов. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 206 с.
2. Ерофеенко, В. Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010. – 304 с.
3. Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media / I. V. Lindell [et al.]. – Boston : Artech Hause, 1994. – 324 p.
4. Ерофеенко, В. Т. Дифракция плоской электромагнитной волны на плоскослойной структуре из биизотропных материалов / В. Т. Ерофеенко, С. В. Малый // Информатика. – 2012. – № 1(33). – С. 58–65.
5. Ерофеенко, В. Т. Экранирование электромагнитных полей экранами из матричных композитов, содержащих биизотропные частицы / В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко // Информатика. – 2014. – № 3(43). – С. 28–43.
6. Ерофеенко, В. Т. Краевая задача проникновения электромагнитных полей дипольных источников через биизотропный экран // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 2. – С. 71–76.
7. Ерофеенко, В. Т. Модель вычисления эффективных параметров матричного композита из биизотропных частиц с учетом многократных переотражений электромагнитного поля // Информатика. − 2015. − № 4(48). – С. 17–33.
8. Неганов, В. А. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами / В. А. Неганов, О. В. Осипов. – М. : Радио и связь, 2006. – 280 с.
9. Ерофеенко, В. Т. Преобразование пучков электромагнитных волн при прохождении через экран из кирального метаматериала / В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко // Информатика. – 2013. – № 1(37). – С. 5–17.
10. Ерофеенко, В. Т. Модели граничных условий на композиционных экранах для электромагнитных полей с осевой симметрией // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 2. – С. 41–45.
11. Шевченко, В. В. Геометрооптическая теория плоской линзы из кирального метаматериала // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т. 54, № 6. – С. 696–700.
12. Ерофеенко, В. Т. Двухсторонняя фокусировка электромагнитного поля точечного источника плоской линзой из метаматериала // Информатика. – 2016. – № 1(49). – С. 14–25.

References

1. Vinogradov A. P. Elektrodinamika kompozitnyh materialov. *Electrodynamics of Composite Materials*. Moscow, Editorial URSS, 2001, 206 p. (in Russian).
2. Erofeenko V. T., Kozlovskaja I. S. Analiticheskoe modelirovanie v elektrodinamike. *Analytical Modeling in Electrodynamics*. Minsk, Belorusskij gosudarstvennyj universitet, 2010, 304 p. (in Russian).
3. Lindell I. V., Sihvola A. H., Viitanen A. J., Tretyakov S. A. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*. Boston, Artech Hause, 1994, 324 p.
4. Erofeenko V. T., Malyi S. V. Difrakcija ploskooj elektromagnitnooj volny na ploskoslojnoj strukture iz biizotropnyh materialov [Diffraction of a plane electromagnetic wave on a plane-layer structure of bi-isotropic materials]. Informatika [*Informatics*], 2012, no. 1(33), pp. 58–65 (in Russian).
5. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. Ekranirovanie elektromagnitnyh polej ekranami iz matrichnyh kompozitov, soderzhashhih biizotropnye chasticy [Screening of electromagnetic fields by screens from matrix composites containing bi-isotropic particles]. Informatika [*Informatics*], 2014, no. 3(43), pp. 28–43 (in Russian).

6. Erofeenko V. T. Kraevaja zadacha proniknovenija elektromagnitnyh polej dipol'nyh istochnikov cherez biizotropnyj jekran [Boundary-value problem of penetration of electromagnetic fields of dipole sources through a bi-isotropic screen]. Vestnik BGU [*Bulletin of the Belarusian State University*. *Ser. 1*], 2012, no. 2, pp. 71–76 (in Russian).

7. Erofeenko V. T. Model’ vychislenija effektivnych parametrov matrichnogo kompozita iz biizotropnyh chastic s uchjotom mnogokratnyh pereotrazhenioj elektromagnitnogo polja [Model for calculating effective parameters of matrix composites from bi-isotropic particles with regard multiple reflections of electromagnetic field]. Informatika [*Informatics*], 2015, no. 4(48), pp. 17–33 (in Russian).

8. Neganov V. A., Osipov O. V. Otrazhajushhie, volnovedushhie i izluchajushhie struktury s kiral'nymi jelementami. *Reflecting, Waveguiding and Radiating Structures with Chiral Elements*. Moscow, Radio i svyaz, 2006, 280 p. (in Russian).

9. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. Preobrazovanie puchkov elektromagnitnyh voln pri prohozhdenii cherez ekran iz kiral’nogo metamateriala [Transformation of beams electromagnetic waves passing through a chiral metamaterial screen]. Informatika [*Informatics*], 2013, no. 1(37), pp. 5–17 (in Russian).

10. Erofeenko V. T. Modeli granichnyh uslovioj na kompozicionnyh ekranah dlja elektromagnitnyh polej s osevoj simmetrieoj [Models for boundary conditions on the composite screens electromagnetic fields with axial symmetry]. Izvestija Nacional'noj akademii nauk Belarusi. Serija fiziko-matematicheskih nauk [*Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus, Physics and Mathematics Series*], 2010, no. 2, pp. 41–45 (in Russian).

11. Schevchenko V. V. Geometroopticheskaja teorija ploskoj linzy iz kiral’nogo metamateriala [Geometric-optical theory of the plane lens from chiral metamaterial]. Ragiotehnika i jelektronika [*Journal of Communications Technology and Electronics*], 2009, vol. 54, no. 6, pp. 696–700 (in Russian).

12. Erofeenko V. T. Dvuhstoronnjaja fokusirovka elektromagnitnogo polja tochechnogo istochnika ploskoj linzoj iz metamateriala [Two-sided focusing of electromagnetic field of point source by means of planar lens from metamaterials]. Informatika [*Informatics*], 2016, no. 1(49), pp. 14–25 (in Russian).

Информация об авторе

Ерофеенко Виктор Тихонович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории математических методов защиты информации, Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики и информатики».
E-mail: bsu_erofeenko@tut.by

Information about the author

Viktor T. Erofeenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher Associate of the Research Laboratory of Mathematical Methods of Information Security, Establishment of the Belarusian State University "Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics", Minsk, Belarus.
E-mail: bsu_erofeenko@tut.by