ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)
УДК 519.872

Поступила в редакцию 26.03.2019
Received 26.03.2019

Принята к публикации 03.05.2019
Accepted 03.05.2019

Стационарные характеристики ненадежной системы массового обслуживания с групповым марковским потоком

В. И. Клименок

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
E-mail: vklimenok@yandex.ru

Аннотация. Ненадежные системы массового обслуживания представляют значительный интерес как в математическом плане, так и для приложений. В основном рассматриваются системы со стационарными пуассоновскими потоками заявок и поломок и экспоненциально распределенными временами обслуживания и ремонтов. Это обстоятельство значительно упрощает математический анализ соответствующих моделей, но редко выполняется в реальных системах, особенно в телекоммуникационных сетях. Целью исследования является анализ стационарного поведения многолинейной ненадежной системы массового обслуживания с групповым марковским потоком заявок, который учитывает корреляцию и взрывной характер реального трафика. Процессы обслуживания и ремонтов описываются фазовыми распределениями, что позволяет учесть не только средние времена обслуживания и ремонтов, но и дисперсию этих времен. В результате процесс функционирования системы представляется многомерной цепью Маркова. Условие эргодичности этой цепи задается в простом алгоритмическом виде. Предлагается алгоритм вычисления стационарного распределения. Получены формулы для ключевых характеристик производительности системы в терминах стационарного распределения цепи Маркова, описывающей динамику системы. Приведенные результаты могут использоваться для принятия экспертных решений при анализе производительности и проектировании телекоммуникационных сетей различного назначения.

Ключевые слова: система массового обслуживания, ненадежные приборы, групповой марковский поток, фазовое распределение времени обслуживания, стационарное распределение, характеристики производительности

Благодарности. Исследование выполнено в рамках совместного проекта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф18Р-136) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-57-00002).

Для цитирования. Клименок, В. И. Стационарные характеристики ненадежной системы массового обслуживания с групповым марковским потоком / В. И. Клименок // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 3. – С. 69–78.

Stationary characteristics of unreliable queueing system with a batch Markovian arrival process

Valentina I. Klimenok

Belarusian State University, Minsk, Belarus
E-mail: vklimenok@yandex.ru

Abstract. Unreliable queuing systems are of considerable interest both in mathematical terms and for applications. Systems with stationary Poisson flows of customers and breakdowns and exponentially distributed service and repair times are mainly considered. This circumstance greatly simplifies the mathematical analysis of the corresponding models but rarely occurs in real systems, especially in telecommunications networks. The purpose of this study is to analyze the stationary behavior of a multi-server unreliable queueing system with a batch Markovian arrival process, which takes into account the correlation and bursty nature of real traffic. The service and repair processes are described by phase type distributions which makes it possible to take into account not only the average service and repair times but also the variance of these times. As a result of the research, the operation of the system is described by a multi-dimensional Markov chain. The condition of ergodicity of this chain is presented in a simple algorithmic form. An algorithm for calculating the stationary distribution is proposed. Formulas for the key performance characteristics of the system are obtained in terms of the stationary distribution of the Markov chain describing the system dynamics. The results can be used to make expert decisions in analyzing the performance and design of various telecommunication networks.

Keywords: queuing system, unreliable servers, batch Markovian arrival process, phase type distribution, stationary distribution, performance characteristics

Acknowledgements. This work has been financially supported by the joint grant of Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (no. F18R-136) and Russian Foundation for Fundamental Research (no. 18-57-00002).

For citation. Klimenok V. I. Stationary characteristics of unreliable queueing system with a batch Markovian arrival process. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 3, pp. 69–78 (in Russian).

Введение. Ссылки на наиболее свежие статьи, посвященные анализу многолинейных систем с ненадежными приборами, можно найти в работах [1–5]. В большинстве публикаций рассматриваются системы со стационарными пуассоновскими потоками заявок и поломок и экспоненциально распределенными временами обслуживания и ремонта, что значительно упрощает математический анализ соответствующих моделей, но редко выполняется на практике. В частности, входящий поток должен учитывать корреляцию и взрывной характер реального трафика. Одной из наиболее подходящих моделей такого трафика является групповой марковский поток (англ. batch Markovian arrival process, $BMAP$), который включает много входных потоков, таких как стационарные пуассоновские, эрланговские, гипер-экспоненциальные, фазового типа, марковские модулированные пуассоновские потоки и их суперпозиции (см., например, [6]). Использование $BMAP$ или его ординарного аналога MAP (Markovian arrival process) вместо стационарного пуассоновского потока позволяет учитывать интенсивность поступления заявок или поломок, а также дисперсию интервалов между поступлениями и возможную корреляцию соседних интервалов между поступлениями. Процессы обслуживания достаточно хорошо могут моделироваться фазовыми распределениями (англ. phase type distribution, PH), см., например, [7]. Использование PH-распределения вместо экспоненциального позволяет учитывать не только среднее время обслуживания и ремонтов, но и дисперсию этого времени.

В настоящей работе исследована система $BMAP/PH/N$ с MAP поломок и фазовым распределением времени ремонта. Представлены результаты анализа стационарного поведения системы: найдено условие существования стационарного режима, предложен алгоритм вычисления стационарного распределения, получены формулы для вычисления основных характеристик производительности системы через векторы стационарных вероятностей.

Описание системы. Рассматривается N-линейная система массового обслуживания с $BMAP$ заявок. $BMAP$ задается управляющим процессом $\nu_t, t \geq 0$, который является неприводимой цепью Маркова с непрерывным временем и конечным пространством состояний $\{0, \dots, W\}$, и матричной производящей функцией $D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k, |z| \leq 1$, где матрица D_k описывает интенсивности переходов процесса ν_t, сопровождающиеся генерацией группы из k запросов, $k \geq 0$. Интенсивность поступления заявок (фундаментальная интенсивность $BMAP$) λ определяется как $\lambda = \boldsymbol{\theta} D'(1)\boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{\theta}$ – единственное решение систем $\boldsymbol{\theta} D(1) = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{e} = 1$; $\boldsymbol{e}$ – вектор-столбец, состоящий из единиц. Более подробную информацию о $BMAP$ можно найти в статье [6].

Полагаем, что все приборы одинаковы и независимы друг от друга. Время обслуживания заявки прибором имеет PH-распределение с неприводимым представлением $(\boldsymbol{\beta}, S)$. Это означает следующее. Время обслуживания интерпретируется как время, за которое цепь Маркова m_t, $t \geq 0$, с пространством состояний $\{1, \dots, M+1\}$ достигнет единственного поглощающего состояния $M+1$. Переходы цепи m_t, $t \geq 0$, в пространстве несущественных состояний $\{1, \dots, M\}$ задаются субгенератором S, а интенсивности переходов в поглощающее состояние – вектором $\boldsymbol{S}_0 = -S\boldsymbol{e}$. В начале обслуживания состояние процесса m_t, $t \geq 0$, выбирается из пространства состояний $\{1, \dots, M\}$ на основании вероятностного вектора-строки $\boldsymbol{\beta}$. Полагаем, что матрица $S + \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\beta}$ неприводимая. Интенсивность обслуживания задается как $\mu = -(\boldsymbol{\beta}S^{-1}\boldsymbol{e})^{-1}$, среднее время обслуживания $b_1 = \mu^{-1}$. Более подробную информацию о PH-распределении можно найти в работе [7].

Если группа заявок обнаруживает, что необходимое для ее обслуживания количество приборов свободно, то каждая из заявок занимает отдельный прибор. Если свободных приборов недостаточно (все приборы заняты или на ремонте), часть заявок (или все заявки) помещается в конец бесконечного буфера в случайном порядке.

Все приборы, не находящиеся на ремонте, подвержены поломкам. Поломки поступают в MAP, который определяется пространством состояний $\{0, 1, \dots, V\}$ процесса $\eta_t, t \geq 0$, и матричной производящей функцией $H(z) = H_0 + H_1 z$, $|z| \leq 1$. Интенсивность поломок задана равенством $h = \boldsymbol{\vartheta}H_1\boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{\vartheta}$ – единственное решение системы $\boldsymbol{\vartheta}H(1) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{e} = 1$. Поломки из MAP с одинаковой вероятностью направляются на любой занятый или свободный исправный прибор и вызывают поломку соответствующего прибора. Если поломка застает все приборы в процессе ремонта, то она игнорируется. Когда прибор ломается, ремонт начинается немедленно и имеет PH-распределение с неприводимым представлением $(\boldsymbol{\gamma}, T)$, где у вектора $\boldsymbol{\gamma}$ и матрицы T размерность R. Интенсивности переходов в поглощающее состояние задаются вектором $\boldsymbol{T}_0 = -T\boldsymbol{e}$. Время ремонта прибора не зависит от времени ремонта других приборов и времени обслуживания заявок, занимающих работающие приборы. Интенсивность ремонта $\tau = -(\boldsymbol{\gamma}T^{-1}\boldsymbol{e})^{-1}$.

Заявка, находящаяся на приборе в момент его поломки, занимает любой свободный прибор и продолжает обслуживаться. Если свободных приборов нет, то с вероятностью p она покидает систему и с вероятностью $1 - p$ становится в буфер для повторного обслуживания.

Цепь Маркова, описывающая процесс изменения состояний системы. Введем следующие обозначения:

i_t – количество заявок в очереди, $i_t \geq 0$;

n_t – общее количество занятых обслуживанием и находящихся на ремонте приборов, $n_t = \overline{0, N}$;

r_t – количество приборов, занятых обслуживанием, $r_t = \overline{0, n_t}$;

$m_t^{(j)}$ – состояние управляющего процесса обслуживания на j-м работающем приборе, $m_t^{(j)} = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, r_t}$. (Полагаем, что работающие приборы нумеруются в порядке их занятия, т. е. прибор, который начинает обслуживание, нумеруется максимальным числом среди всех занятых приборов. Когда прибор заканчивает работу, происходит перенумерация. В случае когда заявка после поломки прибора занимает свободный прибор, этому прибору назначается номер только что сломавшегося прибора.);

$l_t^{(j)}$ – состояние управляющего процесса ремонта на j-м сломанном приборе, $l_t^{(j)} = \overline{1, R}$, $j = \overline{1, n_t - r_t}$. (Полагаем, что прибор, который только что сломался, получает первый номер среди приборов, находящихся на ремонте, а номера остальных сломанных приборов увеличиваются на единицу. Когда на каком-либо из приборов заканчивается ремонт, остальные приборы перенумеровываются.);

ν_t и η_t – состояния управляющих $BMAP$ и MAP соответственно, $\nu_t = \overline{0, W}$, $\eta_t = \overline{0, V}$.

Процесс изменения состояний системы описывается регулярной неприводимой цепью Маркова с непрерывным временем и пространством состояний:

$$\Omega = \{(i, n, r, \nu, \eta, m^{(1)}, \dots, m^{(r)}, l^{(1)}, \dots, l^{(n-r)}),\ i = 0,\ n = \overline{0, N},\ r = \overline{0, n},$$

$$\nu = \overline{0, W},\ \eta = \overline{0, V},\ m^{(1)}, \dots, m^{(r)} = \overline{1, M}, l^{(1)}, \dots, l^{(n-r)} = \overline{1, R}\} \cup$$

$$\cup \{(i, n, r, \nu, \eta, m^{(1)}, \dots, m^{(r)}, l^{(1)}, \dots, l^{(n-r)}),\ i > 0, n = N, r = \overline{0, N},$$

$$\nu = \overline{0, W}, \eta = \overline{0, V}, m^{(1)}, \dots, m^{(r)} = \overline{1, M}, l^{(1)}, \dots, l^{(n-r)} = \overline{1, R}\}.$$

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$\otimes$ ($\oplus$) – кронекерово произведение (сумма) матриц [8];

$A^{\otimes l} = \underbrace{A \otimes \dots \otimes A}_{l}, l \geq 1, A^{\otimes 0} = 1;$

$A^{\oplus l} = \sum_{m=0}^{l-1} I_{n^m} \otimes A \otimes I_{n^{l-m-1}}, l \geq 1$, для матрицы A, у которой n строк;

$\bar{W} = W + 1;\ \bar{V} = V + 1; a = \bar{W}\bar{V};$

$\mathcal{B}^{(n,r)} = I_a \otimes I_{M^r} \otimes \boldsymbol{\beta} \otimes I_{R^{n-r}},\ r = \overline{0, n},\ n = \overline{0, N-1};$

$\mathcal{T}_0^{(n,r)} = I_a \otimes I_{M^r} \otimes \boldsymbol{T}_0^{\oplus n-r},\ r = \overline{0,\ n}, n = \overline{1, N};$

$\mathcal{S}_0^{(n,r)} = I_a \otimes \boldsymbol{S}_0^{\oplus r} \otimes I_{R^{n-r}}, r = \overline{1, n}, n = \overline{1, N};$

$\mathcal{C}^{(n,r)} = D_0 \oplus H_0 \oplus S^{\oplus r} \oplus T^{\oplus n-r}, r = \overline{0, n}, n = \overline{0, N-1}, i \geq 0;$

$\mathcal{C}^{(N,r)} =\ D_0 \oplus H(1) \oplus T^{\oplus N}$, если $r = 0$; $D_0 \oplus H_0 \oplus S^{\oplus r} \oplus T^{\oplus N-r}$, если $r = \overline{1, N}$;

$d^{(n,l)} = a \sum_{t=0}^{\min\{N,n+l\}-n-1} M^t R^{\min\{N,n+l\}-t}, n = \overline{0, N}, l \geq 0;$

$\mathcal{H}^{(n,r)} = I_{\bar{W}} \otimes H_1 \otimes I_{M^r} \otimes \boldsymbol{\gamma} \otimes I_{R^{n-r}}, r = \overline{0, n}, n = \overline{0, N-1};$

$\mathcal{H}^{(N,r)} = \dfrac{1}{r} I_{\bar{W}} \otimes H_1 \otimes (\boldsymbol{e}_M)^{\oplus r} \otimes \boldsymbol{\gamma} \otimes I_{R^{N-r}},\ r = \overline{1, N};$

$\mathcal{H}^{(N,0)} = O;$

$\mathcal{D}_l^{(n,r)} = D_l \otimes I_{\bar{V}} \otimes I_{M^r} \otimes \boldsymbol{\beta}^{\otimes \min\{l, N-n\}} \otimes I_{R^{n-r}}, r = \overline{0, n}, n = \overline{0, N}, l \geq 0;$

$\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Далее полагаем, что состояния цепи Маркова $\xi_t, t \geq 0$, перенумерованы в лексикографическом порядке. Обозначим через $Q_{i,j}$ интенсивности переходов процесса $\xi_t, t \geq 0$, из состояний, соответствующих значению i счетной компоненты, в состояния, соответствующие значению j этой компоненты. Тогда генератор запишется в виде блочной матрицы $Q = \left(Q_{i,j}\right)_{i,j \geq 0}$. Детальное описание генератора приведено в следующей лемме.

Лемма. Инфинитезимальный генератор Q цепи Маркова $\xi_t,\ t \geq 0$, представляет собой блочную структуру

$$Q = \begin{pmatrix} \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \cdots \\ \tilde{Q}_{-1} & Q_0 & Q_1 & Q_2 & \cdots \\ O & Q_{-1} & Q_0 & Q_1 & \cdots \\ O & O & Q_{-1} & Q_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где ненулевые блоки задаются следующим образом:

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_0 & \mathcal{D}_{0,1} & \mathcal{D}_{0,2} & \cdots & \mathcal{D}_{0,N-1} & \mathcal{D}_{0,N} \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{1,2} & \cdots & \mathcal{D}_{1,N-1} & \mathcal{D}_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & \mathcal{C}_{N-1} & \mathcal{D}_{N-1,N} \\ O & O & O & \cdots & \mathcal{A}_N & \mathcal{C}_N \end{pmatrix} + \mathcal{H} + p\bar{\mathcal{H}},$$

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_0^{(n,0)} & O & \cdots & O \\ \mathcal{S}_0^{(n,1)} & \mathcal{T}_0^{(n,1)} & \cdots & O \\ O & \mathcal{S}_0^{(n,2)} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & \mathcal{S}_0^{(n,n)} \end{pmatrix}, n = \overline{1, N}, \quad \mathcal{C}_n = diag\{\mathcal{C}^{(n,r)}, r = \overline{0, n}\}, n = \overline{0, N},$$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} O_a & \widetilde{\mathcal{H}}_0 & O & \cdots & O & O \\ O & O_{a\sum_{r=0}^{1} M^r R^{1-r}} & \widetilde{\mathcal{H}}_1 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ O & O & O & \cdots & O_{a\sum_{r=0}^{N-1} M^r R^{N-1-r}} & \widetilde{\mathcal{H}}_{N-1} \\ O & O & O & \cdots & O & O_K \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} O & O & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & O & O \\ O & O & \cdots & O & \mathcal{H}_N \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}_n = \left(H_n \quad | \quad O_{(a\sum_{r=0}^{n} M^r R^{n-r}) \times (aM^{n+1})}\right), n = \overline{0, N-1},$$

$$\mathcal{H}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{H}^{(n,0)} & O & \cdots & O & O \\ O & \mathcal{H}^{(n,1)} & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & O & \mathcal{H}^{(n,n)} \end{pmatrix}, \quad n = \overline{0, N-1},$$

$$\mathcal{H}_N = \begin{pmatrix} O_{aR^N} & O & \cdots & O & O \\ \mathcal{H}^{(N,1)} & O & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & \mathcal{H}^{(N,N)} & O_{aM^N} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}_{n,n+l} = \begin{pmatrix} O_{aR^n \times d^{(n,l)}} & \mathcal{D}_l^{(n,0)} & O & \cdots & O \\ O & O & \mathcal{D}_l^{(n,1)} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & \mathcal{D}_l^{(n,n)} \end{pmatrix}, n = \overline{0, N}, l \geq 0,$$

$$\Phi_k = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{0,N+k} \\ \mathcal{D}_{1,N+k} \\ \vdots \\ \mathcal{D}_{N,N+k} \end{pmatrix} + \delta_{1,k}(1-p) \begin{pmatrix} O \\ \vdots \\ O \\ \mathcal{H}_N \end{pmatrix}, \ k \geq 1, \quad \tilde{Q}_{-1} = \left(O_{K \times (K_0 - K)} \ \mathcal{A}_N \mathcal{B}_{N-1}\right),$$

$$\mathcal{B}_n = \begin{pmatrix} O_{aR^n \times aR^{n+1}} & \mathcal{B}^{(n,0)} & O & \cdots & O \\ O & O & \mathcal{B}^{(n,1)} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & \mathcal{B}^{(n,n)} \end{pmatrix}, n = \overline{0, N-1};$$

$$Q_{-1} = \mathcal{A}_N \mathcal{B}_{N-1}, \quad Q_0 = \mathcal{C}_N + p\mathcal{H}_N, \quad Q_k = \mathcal{D}_{N,N+k} + \delta_{1,k}(1-p)\mathcal{H}_N, k \geq 1.$$

Лемма доказывается путем анализа всевозможных переходов рассматриваемой цепи Маркова на бесконечно малом интервале времени.

Следствие. *Цепь Маркова* $\xi_t,\ t \geq 0$, *принадлежит классу многомерных квазитеплицевых цепей Маркова с непрерывным временем.*

Доказательство следует из вида генератора Q и определения квазитеплицевой цепи Маркова, приведенного в работе [9].

Условие эргодичности. Стационарное распределение. Условие эргодичности совпадает в случае рассматриваемой цепи Маркова с условием существования стационарного режима в системе и формулируется в следующей теореме.

Теорема. *Неодходимым и достаточным условием эргодичности цепи Маркова* $\xi_t,\ t \geq 0$, *является выполнение неравенства*

$$\lambda + (1-p)\sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{x}_r^{(1)} H_1 \boldsymbol{e} < \sum_{r=0}^{N-1} \boldsymbol{x}_r^{(2)} \boldsymbol{T}_0^{\oplus N-r} \boldsymbol{e} + \sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{x}_r^{(3)} \boldsymbol{S}_0^{\oplus r} \boldsymbol{e}, \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{x}_r^{(1)} = \boldsymbol{x}_r(I_{\overline{V}} \otimes \boldsymbol{e}_{M^r R^{N-r}}), \boldsymbol{x}_r^{(2)} = \boldsymbol{x}_r(\boldsymbol{e}_{\overline{V} I_{M^r}} \otimes I_{R^{N-r}}),\ \boldsymbol{x}_r^{(3)} = \boldsymbol{x}_r(\boldsymbol{e}_{\overline{V}} \otimes I_{M^r} \otimes \boldsymbol{e}_{R^{N-r}}),$$

а вектор $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$ *есть единственное решение системы линейных алгебраических уравнений*

$$(1-\delta_{r,0})\boldsymbol{x}_{r-1}[I_{\overline{V}} \otimes I_{M^{r-1}} \otimes \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{T}_0^{\oplus N-r+1}] +$$

$$+\boldsymbol{x}_r[I_{\overline{V}} \otimes \boldsymbol{S}_0^{\oplus r} \otimes \boldsymbol{\beta} \otimes I_{R^{N-r}} + H \otimes (S^{\oplus r} \oplus T^{\oplus N-r})] +$$

$$+(1-\delta_{r,N})\boldsymbol{x}_{r+1}[\frac{1}{r+1} H_1 \otimes (\boldsymbol{e}_M)^{\oplus r+1} \otimes \boldsymbol{\gamma} \otimes I_{R^{N-r-1}}] = \boldsymbol{0}, r = \overline{0, N},$$

$$\sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{x}_r \boldsymbol{e} = 1. \tag{2}$$

Доказательство. Как следует из работы [9], необходимое и достаточное условие эргодичности квазитеплицевой цепи Маркова $\xi_t, t \geq 0$, может быть сформулировано в терминах блоков генератора Q:

$$\boldsymbol{y} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) Q_k \boldsymbol{e} < 0, \tag{3}$$

где вектор $\boldsymbol{y}$ есть единственное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{y} \sum_{k=-1}^{\infty} Q_k = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}\boldsymbol{e} = 1. \tag{4}$$

Неравенство (3) и система (4) могут быть переписаны, если учесть выражения для Q_k, полученные в лемме. Тогда получим условие эргодичности в виде неравенства

$$\boldsymbol{y}[\sum_{k=1}^{\infty} k D_{N,N+k} \boldsymbol{e} + (2-p) H_N \boldsymbol{e} + C_N \boldsymbol{e} + \sum_{k=1}^{\infty} D_{N,N+k} \boldsymbol{e}] < 0, \tag{5}$$

где вектор $\boldsymbol{y}$ есть единственное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{y}\left[A_N B_{N-1} + C_N + H_N + \sum_{k=1}^{\infty} D_{N,N+k}\right] = \mathbf{0},\ \boldsymbol{ye} = 1. \quad (6)$$

Пусть вектор $\boldsymbol{y}$ задан в виде

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{x}_1,\ \dots, \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{x}_N), \quad (7)$$

где векторы $\boldsymbol{x}_r$ имеют порядок $\bar{V} M^r R^{N-r}, r = \overline{0,N}$.

Подставляя в (5), (6) выражения для матриц $D_{N,N+k}, H_N, C_N, D_{N,N+k}$, вектор $\boldsymbol{y}$ в виде (7) и учитывая соотношения $\sum_{k=0}^{\infty} kD_k\boldsymbol{e} = \lambda$, $\sum_{k=0}^{\infty} D_k\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$ и $(H_0 + H_1)\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$, сведем систему (6) к виду (2), а неравенство (5) – к выражению

$$\lambda + (1-p)\sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{x}_r[\tfrac{1}{r} H_1 \otimes (\boldsymbol{e}_M)^{\oplus r} \otimes \boldsymbol{\gamma} \otimes I_{R^{N-r}}]\boldsymbol{e} + \sum_{r=0}^{N} \boldsymbol{x}_r \times$$
$$\times [I_{\bar{V}} \otimes (S^{\oplus r} \oplus T^{\oplus N-r})]\boldsymbol{e} < 0. \quad (8)$$

Применяя в выражении (8) правило смешанного произведения, получим неравенство (1). Таким образом, теорема доказана.

Далее будем предполагать, что неравенство (1) выполняется. Пусть $\boldsymbol{p}_i$ есть вектор-строка упорядоченных в лексикографическом порядке стационарных вероятностей, соответствующих значению i первой компоненты цепи ξ_t, $i \geq 0$. Чтобы вычислить векторы $\boldsymbol{p}_i$, $i \geq 0$, используется следующий численно устойчивый алгоритм вычисления стационарных вероятностей, который был представлен в работе [9] для многомерных квазитеплицевых цепей Маркова общего вида:

Шаг 1. Вычисляем матрицу G как минимальное неотрицательное решение матричного уравнения

$$\sum_{n=-1}^{\infty} Q_n G^{n+1} = O.$$

Шаг 2. Находим матрицу G_1, используя уравнение

$$Q_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n G^n G_1 = O,$$

откуда следует, что $G_1 = -(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n G^n)^{-1} Q_{-1}$.

Шаг 3. Вычисляем матрицу G_0, используя уравнение

$$\tilde{Q}_{-1} + (Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n G^{n-1} G_1) G_0 = O,$$

откуда следует, что $G_0 = -(Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n G^{n-1} G_1)^{-1} \tilde{Q}_{-1}$.

Шаг 4. Находим матрицы

$$\bar{Q}_{i,l} = \begin{cases} \Phi_l + \sum_{n=l+1}^{\infty} \Phi_n G_{n-1} G_{n-2} \dots G_l, i = 0, l \geq 0; \\ Q_{l-i} + \sum_{n=l+1}^{\infty} Q_{n-i} G_{n-1} G_{n-2} \dots G_l, i \geq 1, l \geq i, \end{cases}$$

где $G_i = G, i \geq 2$.

Шаг 5. Вычисляем матрицы F_l, используя рекуррентную формулу

$$F_l = (\bar{Q}_{0,l} + \sum_{i=1}^{l-1} \Phi_i \bar{Q}_{i,l})(-\bar{Q}_{l,l})^{-1}, l \geq 1.$$

Шаг 6. Получаем вектор $\boldsymbol{p}_0$ как единственное решение системы:

$$\boldsymbol{p}_0\bar{Q}_{0,0} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{p}_0(\boldsymbol{e}_{K_0} + \sum_{l=1}^{\infty} F_l\boldsymbol{e}_K) = 1.$$

Шаг 7. Вычисляем векторы $\boldsymbol{p}_l$ по формуле $\boldsymbol{p}_l = \boldsymbol{p}_0F_l,\ l \geq 1$.

Характеристики производительности. Определив стационарное распределение $\boldsymbol{p}_i, i \geq 0$, можно найти различные вероятностные характеристики производительности системы. Нетривиальные характеристики приводим вместе с краткими пояснениями:

1. Среднее число заявок в очереди $L_{queue} = \sum_{i=1}^{\infty} i\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{e}$.

2. Среднее число занятых приборов $N_{busy} = \boldsymbol{p}_0 diag\{\hat{I}_n, n = \overline{0,N}\}e + \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i\hat{I}_N\boldsymbol{e}$, где $\hat{I}_n = diag\{rI_{aM^rR^{n-r}}, r = \overline{0,n}\}, n = \overline{0,N}$.

3. Среднее число заявок в системе $L = L_{queue} + N_{busy}$.

4. Среднее число приборов, находящихся на ремонте, $N_{repair} = \boldsymbol{p}_0 diag\{nI - \hat{I}_n, n = \overline{0,N}\}\boldsymbol{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i(NI - \hat{I}_N)\boldsymbol{e}$.

5. Среднее число доступных приборов $N_{idle} = \boldsymbol{p}_0 diag\{(N-n)I_{a\sum_{r=0}^{n} M^rR^{n-r}}, n = \overline{0,N}\}\boldsymbol{e}$.

6. Вероятность застать r занятых приборов, $(n-r)$ приборов на ремонте и i заявок в очереди:

$$p_0(n,r) = \boldsymbol{p}_0 I_0^{(n,r)}\boldsymbol{e}, i = 0, r = \overline{0,n}, n = \overline{0,N};$$

$$p_i(n,r) = \boldsymbol{p}_i I^{(n,r)}\boldsymbol{e}, i > 0,\ r = \overline{0,n}, n = \overline{0,N}.$$

Здесь матрица $I_0^{(n,r)}$ размерности K_0 и матрица $I^{(n,r)}$ размерности K определяются следующим образом:

$$I_0^{(n,r)} = \begin{pmatrix} O_{d\times aM^rR^{n-r}} \\ I_{aM^rR^{n-r}} \\ O \end{pmatrix}, \quad I^{(n,r)} = \begin{pmatrix} O_{a\sum_{l=0}^{r-1} M^lR^{n-l}} \\ I_{aM^rR^{n-r}} \\ O \end{pmatrix},$$

где

$$d = a(\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{l} M^lR^{l-k} + \sum_{k=0}^{r-1} M^kR^{n-k}).$$

Заметим, что матрица $I_0^{(n,r)}(I^{(n,r)})$ выделяет часть вектора $\boldsymbol{p}_0(\boldsymbol{p}_i, i > 0)$, соответствующую r занятым приборам и $(n-r)$ приборам на ремонте.

7. Вероятность застать j доступных приборов и i заявок на орбите $p_i^{(idle)}(j) = \boldsymbol{p}_0\sum_{r=0}^{N-j} I_0^{(N-j,r)}\boldsymbol{e}, j = \overline{0,N}$.

8. Вероятность застать j доступных приборов $p^{(idle)}(j) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(idle)}(j), j = \overline{0,N}$.

9. Вероятность того, что произвольная поступившая заявка застанет r занятых приборов, $(n-r)$ приборов на ремонте и i заявок в очереди:

$$p_0^{(a)}(n,r) = \frac{\boldsymbol{p}_0 I_0^{(n,r)}(\sum_{k=1}^{\infty} kD_k \otimes I_{aM^rR^{n-r}})\boldsymbol{e}}{\lambda},\ i = 0,\ r = \overline{0,n},\ n = \overline{0,N}; \quad (9)$$

$$p_i^{(a)}(n,r) = \frac{\boldsymbol{p}_i I^{(n,r)}(\sum_{k=1}^{\infty} kD_k \otimes I_{aM^rR^{n-r}})\boldsymbol{e}}{\lambda},\ r = \overline{0,n},\ n = \overline{0,N},\ i \geq 1. \quad (10)$$

Числители в формулах (9), (10) есть интенсивности поступающих заявок, которые застают r занятых приборов, $(n-r)$ приборов на ремонте и i заявок на орбите, λ – интенсивность всех заявок, поступающих в $BMAP$. Отношение этих интенсивностей дает вероятность $p_i^{(a)}(n,r), i \geq 0$.

10. Вероятность того, что произвольная заявка застанет j доступных приборов:

$$p_{idle}^{(a)}(j) = \lambda^{-1}\boldsymbol{p}_0\sum_{r=0}^{N-j} I_0^{(N-j,r)}(\sum_{k=1}^{\infty} kD_k \otimes I_{aM^rR^{N-j-r}})\boldsymbol{e}, j = \overline{0,N}. \quad (11)$$

Выражение (11) получено по аналогии с формулами (9) и (10).

11. Вероятность того, что произвольная поступившая заявка застанет свободный прибор:

$$P_{imm} = \lambda^{-1}\boldsymbol{p}_0 \sum_{j=1}^{N} \sum_{r=0}^{N-j} I_0^{(N-j,r)} \left(\sum_{k=0}^{j} (k-j)D_k \otimes I_{\overline{V}M^r R^{N-r-j}}\right)\boldsymbol{e}. \quad (12)$$

При естественном предположении, что позиции заявок в поступающей группе равномерно распределены, интенсивность поступающих заявок, которым удалось занять прибор сразу же после поступления, вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{p}_0 \sum_{j=1}^{N} \sum_{r=0}^{N-j} I_0^{(N-j,r)} \left(\left(\sum_{k=0}^{j} kD_k + j\sum_{k=j+1}^{\infty} D_k\right) \otimes I_{\overline{V}M^r R^{N-r-j}}\right)\boldsymbol{e}.$$

Разделив эту интенсивность на λ и принимая во внимание соотношение $\sum_{k=j+1}^{\infty} D_k\boldsymbol{e} = -\sum_{k=0}^{j} D_k\boldsymbol{e}$, получаем выражение (12).

12. Вероятность потери произвольной заявки

$$P_{loss} = p\frac{\boldsymbol{p}_0 \sum_{r=1}^{N} I_0^{(N,r)} \widehat{H}_r e + \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i \sum_{r=1}^{N} I^{(N,r)} \widehat{H}_r \boldsymbol{e}}{\lambda}, \quad (13)$$

где $\widehat{H}_r = I_{\overline{W}} \otimes H_1 \otimes I_{M^r R^{N-r}}$. Чтобы вывести формулу (13), использовались следующие рассуждения. Значение $\boldsymbol{p}_0 \sum_{r=1}^{N} I_0^{(N,r)} \widehat{H}_r \boldsymbol{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i \sum_{r=1}^{N} I^{(N,r)} \widehat{H}_r \boldsymbol{e}$ есть интенсивность поломок, которые поступают, когда нет свободных приборов и как минимум один прибор занят. Каждая такая поломка приводит к потере заявки с вероятностью p. Числитель в выражении (13) есть интенсивность заявок, которые покидают систему навсегда и которые следует рассматривать как потерянные. Отношение этой интенсивности к интенсивности λ входящего потока дает вероятность P_{loss}.

Альтернативная формула для P_{loss} может быть записана в следующем виде:

$$P_{loss} = 1 - \frac{\left[\boldsymbol{p}_0 \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{r=1}^{n} I_0^{(N,r)} + \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i \sum_{r=1}^{N} I^{(N,r)}\right]\left(I_a \otimes \boldsymbol{S}_0^{\oplus r} \otimes I_{R^{N-r}}\right)\boldsymbol{e}}{\lambda}, \quad (14)$$

где числитель вычитаемого есть интенсивность выходящего потока обслуженных заявок, а знаменатель – интенсивность λ входящего потока. Тогда вычитаемое представляет собой вероятность того, что произвольная заявка не будет потеряна, а правая часть формулы (14) – вероятность потери произвольной заявки.

Заключение. В статье приведены результаты исследования ненадежной многолинейной системы массового обслуживания с довольно общими предположениями о процессах поступления заявок и поломок, распределении времен обслуживания и ремонтов. Процесс функционирования системы описан многомерной цепью Маркова. Условие эргодичности этой цепи, совпадающее с условием существования стационарного режима в системе, представлено в простой алгоритмической форме. Предложен алгоритм вычисления стационарного распределения. Получены формулы для ключевых характеристик производительности системы. Результаты исследования являются новыми в математическом плане и могут использоваться для поддержки экспертных решений при анализе производительности и проектировании телекоммуникационных сетей и систем.

Список использованных источников

1. Reliability-based measures for a retrial system with mixed standby components / C. C. Kuoa [et al.] // Applied Mathematical Modelling. – 2014. – Vol. 38. – P. 4640–4651.

2. Modeling of multi-server repair problem with switching failure and reboot delay and related profit analysis / Y. L. Hsu [et al.] // Computers and Industrial Engineering. – 2014. – Vol. 69. – P. 21–28.

3. Wu, C. H. Multi-server machine repair problems under a (V, R) synchronous single vacation policy / C. H. Wu, J. C. Ke // Applied Mathematical Modelling. – 2014. – Vol. 38. – P. 2180–2189.

4. Klimenok, V. I. A *BMAP*/*PH*/*N* queue with negative customers and partial protection of service / V. I. Klimenok, A. N. Dudin // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 2012. – Vol. 41. – P. 1062–1082.

5. Priority retrial queueing model operating in random environment with varying number and reservation of servers / A. Dudin [et al.] // Applied Mathematics and Computations. – 2015. – Vol. 269. – P. 674–690.

6. Lucantoni, D. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process / D. Lucantoni // Communications in Statistics. Stochastic Models. – 1991. – Vol. 7. – P. 1–46.

7. Neuts, M. F. Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models / M. F. Neuts. – Baltimore : The Johns Hopkins University Press, 1981. – 352 p.

8. Graham, A. Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications / A. Graham. – Cichester : Ellis Horwood, 1981. – 130 p.

9. Klimenok, V. I. Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory / V. I. Klimenok, A. N. Dudin // Queueing Systems. – 2006. – Vol. 54. – P. 245–259.

References

1. Kuoa C. C., Sheub S. H., Ke J. C., Zhang Z. G. Reliability-based measures for a retrial system with mixed standby components. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, vol. 38, pp. 4640–4651.

2. Hsu Y. L., Ke J. C., Liu T. H., Wu C. H. Modeling of multi-server repair problem with switching failure and reboot delay and related profit analysis. *Computers and Industrial Engineering*, 2014, vol. 69, pp. 21–28.

3. Wu C. H., Ke J. C. Multi-server machine repair problems under a (V, R) synchronous single vacation policy. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, vol. 38, pp. 2180–2189.

4. Klimenok V. I., Dudin A. N. A *BMAP*/*PH*/*N* queue with negative customers and partial protection of service. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 2012, vol. 41, pp. 1062–1082.

5. Dudin A., Kim C. S., Dudin S., Dudina O. Priority retrial queueing model operating in random environment with varying number and reservation of servers. *Applied Mathematics and Computations*, 2015, vol. 269, pp. 674–690.

6. Lucantoni D. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. Communications in Statistics. Stochastic Models, 1991, vol. 7, pp. 1–46.

7. Neuts M. F. *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*. Baltimore, The Johns Hopkins University Press, 1981, 352 p.

8. Graham A. *Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications*. Cichester, Ellis Horwood, 1981, 130 p.

9. Klimenok V. I., Dudin A. N. Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory. *Queueing Systems*, 2006, vol. 54, pp. 245–259.

Информация об авторе

Клименок Валентина Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории прикладного вероятностного анализа, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
E-mail: vklimenok@yandex.ru

Information about the author

Valentina I. Klimenok, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher of the Research Laboratory of Applied Probabilistic Analysis, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: vklimenok@yandex.ru