ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING

УДК 539.3

Поступила в редакцию 26.03.2019
Received 26.03.2019

Принята к публикации 15.05.2019
Accepted 15.05.2019

Вычисление критериального девиатора и вектора нормали к девиаторному сечению поверхности текучести для упругопластического материала Мурнагана

О. Л. Швед

Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
E-mail: swed@newman.bas-net.by

Аннотация. Для обобщенного упругопластического материала Мурнагана получены процедуры программной реализации и разработан комплекс программ для вычисления критериального девиатора и вектора внешней нормали к поверхности девиаторного сечения поверхности текучести. Критериальный девиатор разлагается аддитивно на три девиатора: изотропный, анизотропный и вихревой. Анизотропный девиатор образуется из анизотропных структур второй и третьей степени удельной потенциальной энергии упругой деформации. Выполнен переход от материально индифферентных величин в разложении к инвариантным величинам путем ортогонального преобразования с собственно ортогональным тензором упругого поворота. Получены необходимые аналитические соотношения для вычисления преобразованного критериального девиатора как симметричного оператора в пятимерном векторном пространстве девиаторов напряжений. Векторы внешних нормалей для сингулярной точки поверхности текучести в пространстве девиаторов напряжений определяются двумя собственными векторами оператора, а для регулярной точки – одним из них. Вычисление искомых величин проводится для упругопластического материала Мурнагана общего вида (триклинного).

Ключевые слова: упругопластический материал Мурнагана, критериальный девиатор, вектор нормали, численное моделирование, комплекс программ

Для цитирования. Швед, О. Л. Вычисление критериального девиатора и вектора нормали к девиаторному сечению поверхности текучести для упругопластического материала Мурнагана / О. Л. Швед // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 3. – С. 48–58.

Calculation of the criteria deviator and the vector of normal to the deviator section of the yield surface for the Murnaghan elastic-plastic material

Oleg L. Shved

The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
E-mail: swed@newman.bas-net.by

Abstract. For the generalized elastic-plastic material of Murnaghan the software implementation procedures were obtained and a set of programs was developed to calculate the criterion deviator and the external normal vector to the surface of the deviator section of the yield surface. The criterion deviator is decomposed into the sum of three deviators as isotropic, anisotropy and the vortex. Anisotropy deviator is formed from anisotropic structures of the second and third degrees of the specific potential energy of elastic deformation. The transition from material indifferent quantities into the expansion to invariant quantities is made by orthogonal transformation with the orthogonal elastic rotation tensor itself. The necessary analytical relations were obtained for calculating the transformed criteria deviator as a symmetric operator in the five-dimensional vector space of stress deviators. The vectors of external normal for the singular point of the yield surface in the space of stress deviators are determined by two eigenvectors of the operator, and for a regular point by one of them. The calculation of quantities sought is carried out for the elastic type of Murnaghan material of general form – triclinic.

Keywords: elastic-plastic material of Murnaghan, criteria deviator, the normal vector, numerical modeling, complex of programs

For citation. Shved O. L. Calculation of the criteria deviator and the vector of normal to the deviator section of the yield surface for the Murnaghan elastic-plastic material. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 3, pp. 48–58 (in Russian).

Введение. В монографии А. И. Лурье [1] представлены различные нелинейные модели изотропных материалов, в том числе и модель Мурнагана для частного случая. Модель для общего случая анизотропного материала изложена в работе Ф. Д. Мурнагана [2]. В статье [3] модель Мурнагана обобщается на упругопластический материал. Программная реализация вычисления скорости левой меры упругих искажений и параметра роста упругой деформационной анизотропии при известных скоростях перемещений представлена в работе [4], где неизвестные величины находятся из решения системы семи скалярных линейных уравнений. Рассматривался вопрос о формировании матрицы системы и ее решении, правые части уравнений системы считались входными данными. Поскольку соотношения для них слишком объемные, предполагалось также выполнить программную реализацию вычисления критериального девиатора и вектора внешней нормали, поскольку они определяют правые части системы.

В настоящей работе необходимо вычислить девиатор, полученный ортогональным преобразованием критериального девиатора с использованием собственно ортогонального тензора упругого поворота (согласно условиям решения задачи в работе [4]). Рассматриваются представления обоих девиаторов. Вычисление вектора нормали также выполняется для вектора (девиатора симметричного тензора в векторной форме), полученного указанным ортогональным преобразованием.

Представление критериального девиатора. Введем следующие обозначения. Ортонормированные триэдры: $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ – неподвижный, $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ – образованный собственными векторами тензора напряжений Коши $\mathbf{T}$; $\mathbf{F}_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}$ – неособенный тензор, заменяющий деформационный градиент; $\mathbf{O}$ – собственно ортогональный тензор упругого поворота; $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$ – правая и левая меры упругих искажений; $\mathbf{G} = \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_e$ и $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}}$ – меры упругой деформации Коши – Грина и Фингера; $\nabla \mathbf{v}^{\mathrm{T}}, \nabla \mathbf{v}$ – градиенты скорости перемещений; $\mathbf{D} = \nabla \mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \nabla \mathbf{v}$, $\mathbf{W} = \nabla \mathbf{v}^{\mathrm{T}} - \nabla \mathbf{v}$ – тензоры скорости деформаций и вихря; $\Omega = \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}$ – тензор упругого спина. В упругом состоянии материала справедливо соотношение $\dot{\mathbf{F}}_e = \nabla \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_e$, из которого следует $\dot{\mathbf{G}} = 2\mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}_e$, $\dot{\mathbf{F}} = \nabla \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{v}$.

Критериальный девиатор-оператор $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$ вводится как $\overset{\Omega}{\mathrm{dev}}\,\mathbf{T} = \mathrm{dev}\,\dot{\mathbf{T}} - \Omega \cdot \mathrm{dev}\,\mathbf{T} + \mathrm{dev}\,\mathbf{T} \cdot \Omega$ – О-производная $\mathrm{dev}\,\mathbf{T}$, вычисленная по соотношению $\dot{\mathbf{F}}_e = \nabla \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_e$ при условии несжимаемости. Девиатор $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$ определяет критерий текучести, но может быть заменен девиатором $\mathbf{D}$.

Имеет место соотношение $\overset{\Omega}{\mathrm{dev}}\,\mathbf{T} = \mathrm{dev}\,\overset{\Omega}{\mathbf{T}}$. Действительно, $(\mathrm{dev}\,\mathbf{T})^{\bullet} = (\mathbf{T} - 3^{-1}\mathbf{E} \cdot\cdot \mathbf{T})^{\bullet} = \dot{\mathbf{T}} - 3^{-1}\mathbf{E} \cdot\cdot \dot{\mathbf{T}} = \mathrm{dev}\,\dot{\mathbf{T}}$, $-\Omega \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \Omega = -\Omega \cdot \mathrm{dev}\,\mathbf{T} + \mathrm{dev}\,\mathbf{T} \cdot \Omega$. Следовательно, соотношение выполняется, О-производную в нем можно заменить и на производную Яуманна $\overset{\mathbf{W}}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}$ тензора $\mathbf{T}$. Эти производные связаны соотношением

$$\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = \overset{\mathbf{W}}{\mathbf{T}} + \mathbf{T}\cdot(\Omega - \mathbf{W}) - (\Omega - \mathbf{W})\cdot\mathbf{T}. \tag{1}$$

Вычисление $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$ проводится по соотношению (1) с последующим переходом к $\mathrm{dev}\overset{\Omega}{\mathbf{T}}$. В работе [3] получено определяющее уравнение для тензора $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \sum \delta_p \mathbf{T}_p, \tag{2}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{T}_0 = 2L_3^{-1}(\varphi_0\mathbf{E} + \varphi_1\mathbf{F} + \varphi_2\mathbf{F}^2),\ \ \varphi_0 = a_0 I_3,\ \ \varphi_1 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + b_3 I_2,\ \ \varphi_2 = c_0 + c_1 I_1, \\
a_0 = 2^{-1}\nu_3,\ \ b_0 = 16^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3),\ \ b_1 = 8^{-1}(2\lambda - 3\nu_1 - 4\nu_2), \\
b_2 = 16^{-1}(\nu_1 + 2\nu_2),\ \ b_3 = -4^{-1}(\nu_2 + 2\nu_3),\ \ c_0 = 4^{-1}(2\mu - 3\nu_2 - 4\nu_3),\ \ c_0 = -b_3,
\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{T}_p = 4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_k\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_l - \delta_k^l)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j + \mathbf{C}_j\mathbf{C}_i)\cdot\mathbf{V} + \\
+(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_j - \delta_i^j)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_k\mathbf{C}_l + \mathbf{C}_l\mathbf{C}_k)\cdot\mathbf{V})\ \ (p\in\{\overline{1,21}\}),
\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{T}_p = 8^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_k\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_l - \delta_k^l)(\mathbf{c}_n\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_m - \delta_n^m)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j + \mathbf{C}_j\mathbf{C}_i)\cdot\mathbf{V} + \\
+(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_j - \delta_k^l)(\mathbf{c}_n\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_m - \delta_n^m)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_k\mathbf{C}_l + \mathbf{C}_k\mathbf{C}_l)\cdot\mathbf{V} + \\
+(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_j - \delta_i^j)(\mathbf{c}_k\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_l - \delta_k^l)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_n\mathbf{C}_m + \mathbf{C}_m\mathbf{C}_n)\cdot\mathbf{V})\ \ (p\in\{\overline{22,77}\}).
\end{gathered} \tag{5}$$

В формуле (3) I_1, I_2, I_3 – первый, второй и третий главные инварианты меры $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$; λ, μ – постоянные Ляме второго порядка; ν_1, ν_2, ν_3 – постоянные Ляме третьего порядка. В формулах (4), (5) $\mathbf{C}_i = \mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i\cdot\mathbf{O}$, индексы $i, j, k, l, n, m \in \{1,\ 2,\ 3\}$ и зависят от символа нумерации $p\in\{\overline{1,77}\}$, δ_i^j – символ Кронекера.

Имеет место следующее представление [3]:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_4\quad (\mathbf{Q}_4 = \mathbf{T}\cdot(\Omega - \mathbf{W}) - (\Omega - \mathbf{W})\cdot\mathbf{T}), \tag{6}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{Q}_0 = \mathrm{dev}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{T} + 4L_3^{-1}((d\mathbf{F}\cdot\cdot\mathbf{D} + c_1\mathbf{F}^2\cdot\cdot\mathbf{D})\mathbf{F} + c_1\mathbf{F}\cdot\cdot\mathbf{D}\mathbf{F}^2 - \varphi_0\mathbf{D} + \varphi_2\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F})) \\
(d = b_1 + (2b_2 + b_3)I_1),
\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{Q}_2 = \mathrm{dev}\sum\mathbf{Q}_{2p}(p\in\{\overline{1,21}\}),\ \ \mathbf{Q}_{2p} = \delta_p(2^{-1}L_3^{-1}(\mathbf{C}_k\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_l\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j + \mathbf{C}_j\mathbf{C}_i)\cdot\mathbf{V} + \\
+\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_k\mathbf{C}_l + \mathbf{C}_l\mathbf{C}_k)\cdot\mathbf{V})),
\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{Q}_3 = \mathrm{dev}\sum\mathbf{Q}_{3p}(p\in\{\overline{22,77}\}),\ \ \mathbf{Q}_{3p} = \delta_p(4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{C}_n\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_m(\mathbf{c}_k\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_l - \delta_k^l) + \\
+(\mathbf{C}_k\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_l(\mathbf{c}_n\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_m - \delta_n^m))\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j + \mathbf{C}_j\mathbf{C}_i))\cdot\mathbf{V} + \\
+(\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j(\mathbf{c}_n\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_m - \delta_n^m) + (\mathbf{C}_n\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_m(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_j - \delta_i^j))\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_k\mathbf{C}_l + \mathbf{C}_l\mathbf{C}_k))\cdot\mathbf{V} + \\
+(\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j(\mathbf{c}_k\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_l - \delta_k^l) + (\mathbf{C}_k\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_l(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_j - \delta_i^j))\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_n\mathbf{C}_m + \mathbf{C}_m\mathbf{C}_n))\cdot\mathbf{V})).
\end{gathered} \tag{9}$$

Поясним полученные слагаемые в правой части соотношения (6). В работе [3] установлено, что $\overset{\mathbf{W}}{\mathbf{T}}_0 = \mathbf{T}_0\cdot\mathbf{D} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{T}_0 + 4L_3^{-1}((d\mathbf{F}\cdot\cdot\mathbf{D} + c_1\mathbf{F}^2\cdot\cdot\mathbf{D})\mathbf{F} + c_1\mathbf{F}\cdot\cdot\mathbf{D}\mathbf{F}^2 - \varphi_0\mathbf{D} + \varphi_2\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F})$. Вычисляем:

$$(L_3^{-1})^{\bullet} = 0,\quad (\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_j)^{\bullet} = 2\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{O}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{c}_j = 2\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j,$$

$$(\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j\cdot\mathbf{V})^{\bullet} = (\mathbf{V}\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\cdot\mathbf{O}\cdot\mathbf{V})^{\bullet} = (\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\cdot\mathbf{F}_e^{\mathbf{T}})^{\bullet} = \nabla\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} + \mathbf{F}_e\cdot\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\cdot\mathbf{F}_e^{\mathbf{T}}\cdot\nabla\mathbf{v} =$$

$$= \mathbf{D}\cdot\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} + \mathbf{F}_e\cdot\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\cdot\mathbf{F}_e^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{W}\cdot\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} - \mathbf{F}_e\cdot\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\cdot\mathbf{F}_e^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{W},$$

$$(\mathbf{V}\cdot\overset{\mathbf{W}}{\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j}\cdot\mathbf{V})\ \mathbf{D}\cdot\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} + \mathbf{F}_e\cdot\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\cdot\mathbf{F}_e^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{D}\cdot(\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j\cdot\mathbf{V}) + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j\cdot\mathbf{V})\cdot\mathbf{D}.$$

Находим $\overset{\mathbf{W}}{\sum\delta_p}\mathbf{T}_p = \sum(\mathbf{Q}_{2p} + \mathbf{Q}_{3p}) + \mathbf{D}\cdot\sum\delta_p\mathbf{T}_p + \sum\delta_p\mathbf{T}_p\cdot\mathbf{D}$. Первая сумма в правой части последнего соотношения идет в выражение $\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3$, а остальные тензоры входят в выражение для $\mathbf{Q}_0$. Следовательно, согласно формуле (2) выполняются соотношения (7)–(9).

Справедливо также представление девиатора $\mathbf{q} = \mathbf{O}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$:

$$\begin{gathered}\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4 \quad (\mathbf{q}_4 = \mathbf{t}\cdot(\Omega - \mathbf{W}) - (\Omega - \mathbf{W})\cdot\mathbf{t}),\\ \mathbf{q}_0 = \mathbf{O}\cdot\mathbf{Q}_0\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}},\ \mathbf{q}_2 = \mathbf{O}\cdot\mathbf{Q}_2\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}},\ \mathbf{q}_3 = \mathbf{O}\cdot\mathbf{Q}_3\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}},\ \mathbf{q}_4 = \mathbf{O}\cdot\mathbf{Q}_4\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}.\end{gathered} \tag{10}$$

Вычисление девиатора $\mathbf{q}_0$. В соответствии с (7), (10) для $\mathbf{q}_0$ тензоры $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{F}$ заменяются тензорами $\mathbf{t}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{G}$ ($\mathbf{t} = \mathbf{O}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$, $\mathbf{d} = \mathbf{O}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$). Затем тензор $\mathbf{P} = \mathbf{t}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{d}\cdot\mathbf{t} + 4L_3^{-1}((d\mathbf{G}\cdot\cdot\,\mathbf{d} + c_1\mathbf{G}^2\cdot\cdot\,\mathbf{d})\mathbf{G} + c_1\mathbf{G}\cdot\cdot\,\mathbf{d}\mathbf{G}^2 - \varphi_0\mathbf{d} + \varphi_2\mathbf{G}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{G})$ вычислялся с использованием символьных операций системы MathCAD 8. Данное соотношение находится достаточно просто, для краткости подробности опускаются. Запишем покомпонентные тензорные и векторные представления

$$\begin{gathered}\mathbf{d} = D_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + D_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - (D_1 + D_2)\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 + D_3(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1) + D_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1) + D_5(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2),\\ \mathbf{P} = P_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + P_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + P_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 + P_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1) + P_5(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1) + P_6(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)\end{gathered} \tag{11}$$

и получим $P = (P_{ik})_{\substack{i=\overline{1,6}\\ k=\overline{1,5}}}\cdot D$, где $D^{\mathrm{T}} = (D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_5)$, $P^{\mathrm{T}} = (P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ P_6)$. Переходим к девиатору

$$M_{ik} = P_{ik} - 3^{-1}(P_{1k} + P_{2k} + P_{3k})\ \ (i = \overline{1,2},\ k = \overline{1,5}),\ \ M_{ik} = P_{ik}\ \ (i = \overline{3,5},\ k = \overline{1,5}), \tag{12}$$

$$Q = (M_{ik})_{\substack{i=\overline{1,5}\\ k=\overline{1,5}}}\cdot D \quad (Q^{\mathrm{T}} = (Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4,\ Q_5)). \tag{13}$$

Используя условия потенциальности [3], переходим к представлению девиатора $\mathbf{q}_0$ в пятимерном векторном пространстве в базисе $\mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$, $\mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_3 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_4 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_5 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)$ с матрицей оператора

$$W = \begin{pmatrix} p_1 + 2p_2 & \sqrt{3}p_2 & p_3 & p_6 & p_8\\ \sqrt{3}p_2 & -p_1 + 2p_2 & p_4 & p_7 & p_9\\ p_3 & p_4 & p_5 & p_{12} & p_{13}\\ p_6 & p_7 & p_{12} & p_{10} & p_{14}\\ p_8 & p_9 & p_{13} & p_{14} & p_{11}\end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $p_1 = 2^{-1}(M_{12} + M_{21})$, $p_2 = 2^{-1}(M_{21} - M_{12})$, $p_3 = 2^{-1}\sqrt{3}(2M_{31} - M_{13})$, $p_4 = 2^{-1}(2M_{31} - 3M_{13})$, $p_5 = M_{33} - M_{11}$, $p_6 = 2^{-1}\sqrt{3}(2M_{41} - M_{14})$, $p_7 = 2^{-1}(2M_{41} - 3M_{14})$, $p_8 = 2^{-1}\sqrt{3}(2M_{51} - M_{15})$, $p_9 = 2^{-1}(2M_{51} - 3M_{15})$, $p_{10} = M_{44} - M_{11}$, $M_{11} = M_{55} - M_{11}$, $p_{12} = M_{34}$, $p_{13} = M_{35}$, $p_{14} = M_{45}$.

С диагонали матрицы (M_{ij}) удалена не влияющая на выбор собственных векторов величина M_{11}, но при нахождении собственных значений оператора она учитывается. В соотношениях для величин p_k $(k=\overline{12,14})$ устранены ранее допущенные неточности: $p_{12}=3^{-1}M_{34}$, $p_{13}=3^{-1}M_{35}$, $p_{14}=3^{-1}M_{45}$, а остальные соотношения верны в силу условий потенциальности.

Вычисление девиаторов $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}_3$. Наиболее объемные соотношения по формуле (6) получаются при вычислении девиаторов $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_3$. Согласно принятой в работе [4] нумерации и с учетом соотношения $(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_j)^{\bullet}=2\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j$ получаем

$$\begin{gathered}
\mathbf{Q}_2=L_3^{-1}\operatorname{dev}(\mathbf{V}\cdot(\textstyle\sum(\delta_i 2\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i+\ \delta_{3+i}(\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i+\\
+2^{-1}\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1))+\ \delta_{11+i}(\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i+\ 2^{-1}\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1))+\\
+\delta_{15+i}(\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i+2^{-1}\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)))+\\
+\delta_7\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1))+\delta_8(\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1+\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2)+\\
+\delta_{11}\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1))+\delta_9(\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3)+\\
+\delta_{15}\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2))+\delta_{10}(\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1)+\\
+\delta_{19}2^{-1}(\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)+\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1))+\\
+\delta_{20}2^{-1}(\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)+\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1))+\\
+\delta_{21}2^{-1}(\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)+\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2))\cdot\mathbf{V})\ \ (i\ =\ \overline{1,3}),
\end{gathered}\tag{15}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{Q}_3=L_3^{-1}\operatorname{dev}(\mathbf{V}\cdot(\textstyle\sum 3\delta_{21+i}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i+\\
+\delta_{25}(((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1+\\
+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2)+\\
+\delta_{26}(((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1+\\
+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3)+\\
+\delta_{27}(((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2+\\
+(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1)+\\
+\delta_{28}(((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2+\\
+(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3)+\\
+\delta_{29}(((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3+\\
+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1)+\\
+\delta_{30}((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3+\\
+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2)+\\
+\delta_{31}2^{-1}(((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1+\\
+((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2+\\
+((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3)+\\
+\textstyle\sum\delta_{31+i}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i+\\
+2^{-1}((\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1))+\\
+\delta_{35}2^{-1}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)+\\
+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1))+
\end{gathered}\tag{16}$$

$$
\begin{gathered}
+\delta_{36}2^{-1}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)+\\
+(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1))+\\
+\delta_{37}2^{-1}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)+\\
+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1))+\\
+\delta_{38}2^{-1}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)+\\
+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1))+\\
+\delta_{39}2^{-1}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)+\\
+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2))+\\
+\delta_{40}2^{-1}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)+\\
+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2))+\\
+\delta_{41}4^{-1}((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)+\\
+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2))+\\
+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1))+\\
+\sum\delta_{39+3i}(2^{-1}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)+\\
+((\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i)\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i)+\\
+\sum\delta_{40+3i}(2^{-1}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)+\\
+((\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i)\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i)+\\
+\sum\delta_{41+3i}(2^{-1}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)+\\
+((\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i)\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i)+\\
+\sum\delta_{50+i}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i+\\
+2^{-1}((\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1))+\\
+\delta_{54}2^{-1}3\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)+\\
+\delta_{55}2^{-1}3\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)+\\
+\delta_{56}2^{-1}3\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)+\\
+\sum\delta_{56+i}(2^{-1}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i+\\
+(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i)+\\
+\delta_{60}4^{-1}(((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)+\\
+2((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1+\\
+2((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2)+\\
+\delta_{61}4^{-1}(((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)+\\
+2((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1+\\
+2((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2)+\\
+\delta_{62}4^{-1}(((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)+\\
+2((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1+\\
+2((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2)+\\
+\delta_{63}4^{-1}(((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)+\\
+2((\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1+\\
+2((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3)+
\end{gathered}
\tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\delta_{64}4^{-1}(((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)+\\
&+2((\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1+\\
&+2((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3)+\\
&+\delta_{65}4^{-1}(((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1)(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)+\\
&+2((\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1+\\
&+2((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3)+\\
&+\delta_{66}4^{-1}(((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)+\\
&+2((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3+\\
&+2((\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2)+\\
&+\delta_{67}4^{-1}(((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)+\\
&+2((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3+\\
&+2((\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2)+\\
&+\delta_{68}4^{-1}(((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)+\\
&+2((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3+\\
&+2((\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2)+\\
&+\sum\delta_{66+3i}4^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i+\\
&+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i+(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)+\\
&+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i+(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1))+\\
&+\sum\delta_{67+3i}4^{-1}(2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i+\\
&+(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i+(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)+\\
&+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i+(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2)(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2))+\\
&+\sum\delta_{68+3i}4^{-1}(2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i+\\
&+(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i+(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)+\\
&+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i+(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3)(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2))\cdot\mathbf{V}).
\end{aligned}
$$

Для вычисления $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ в соотношениях (15), (16) тензоры $\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j+\mathbf{C}_j\mathbf{C}_i)\cdot\mathbf{V}$ заменялись тензорами $\mathbf{U}\cdot(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j+\mathbf{c}_j\mathbf{c}_i)\cdot\mathbf{U}$, а скаляры $\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j$ – скалярами $\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{c}_j$.

Введем покомпонентные представления (для девиатора $\mathbf{d}$ это соотношение (11))

$$\mathbf{U}=U_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1+U_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+U_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3+U_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)+U_5(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)+U_6(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2),$$

$$\mathbf{G}=G_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1+G_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+G_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3+G_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)+G_5(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)+G_6(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2),$$

получим

$$
\begin{pmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\\ C_5\\ C_6 \end{pmatrix}=C\cdot\begin{pmatrix} D_1\\ D_2\\ D_3\\ D_4\\ D_5 \end{pmatrix},\quad C=(C_{ik})_{\substack{i=\overline{1,6}\\ k=\overline{1,5}}}=
\begin{pmatrix}
U_1^2-U_5^2 & U_4^2-U_5^2 & 2U_1U_4 & 2U_1U_5 & 2U_4U_5\\
U_4^2-U_6^2 & U_2^2-U_6^2 & 2U_2U_4 & 2U_4U_6 & 2U_2U_6\\
U_5^2-U_3^2 & U_6^2-U_3^2 & 2U_5U_6 & 2U_3U_5 & 2U_3U_6\\
U_1U_4-U_5U_6 & U_2U_4-U_5U_6 & U_4^2+U_1U_2 & U_4U_5+U_1U_6 & U_2U_5+U_4U_6\\
U_1U_5-U_3U_5 & U_4U_6-U_3U_5 & U_4U_5+U_1U_6 & U_5^2+U_1U_3 & U_5U_6+U_3U_4\\
U_4U_5-U_3U_6 & U_2U_6-U_3U_6 & U_2U_5+U_4U_6 & U_5U_6+U_3U_4 & U_6^2+U_2U_3
\end{pmatrix}.
$$

Столбцы матрицы C образуют величины $\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{c}_3$, когда в матрице компонент девиатора $\mathbf{d}$ элемент при соответствующей диаде (11) будет равен единице, а остальные элементы – нулю.

Из выражений (15) получаем соотношение

$$\begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3\\ A_4\\ A_5\\ A_6 \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\\ C_5\\ C_6 \end{pmatrix},\quad A=(A_{ik})_{\substack{i=\overline{1,6}\\ k=\overline{1,6}}}=\begin{pmatrix} 2\delta_1 & \delta_8 & \delta_{10} & \delta_4 & \delta_{12} & \delta_{16}\\ \delta_8 & 2\delta_2 & \delta_9 & \delta_5 & \delta_{13} & \delta_{17}\\ \delta_{10} & \delta_9 & 2\delta_3 & \delta_6 & \delta_{14} & \delta_{18}\\ 2^{-1}\delta_4 & 2^{-1}\delta_5 & 2^{-1}\delta_6 & \delta_7 & 2^{-1}\delta_{19} & 2^{-1}\delta_{20}\\ 2^{-1}\delta_{12} & 2^{-1}\delta_{13} & 2^{-1}\delta_{14} & 2^{-1}\delta_{19} & \delta_{11} & 2^{-1}\delta_{21}\\ 2^{-1}\delta_{16} & 2^{-1}\delta_{17} & 2^{-1}\delta_{18} & 2^{-1}\delta_{20} & 2^{-1}\delta_{21} & \delta_{15} \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Параметры анизотропии, расположенные в строках матрицы A (17), соответствуют базисным диадам, а в столбцах – структуре матрицы C. Элементы матрицы A с сохранением частичной симметрии и связей дополняем анизотропными структурами третьей степени из выражения (16):

$$\begin{aligned}
&A_{11}=A_{11}+3(G_1-1)\delta_{22}+(G_2-1)\delta_{25}+(G_3-1)\delta_{26}+G_4\delta_{42}+G_5\delta_{43}+G_6\delta_{44},\\
&A_{21}=A_{21}+2^{-1}(2(G_1-1)\delta_{25}+2(G_2-1)\delta_{27}+(G_3-1)\delta_{31}+G_4\delta_{60}+G_5\delta_{61}+G_6\delta_{62}),\\
&A_{31}=A_{31}+2^{-1}(2(G_1-1)\delta_{26}+(G_2-1)\delta_{31}+2(G_3-1)\delta_{29}+G_4\delta_{63}+G_5\delta_{64}+G_6\delta_{65}),\\
&A_{41}=A_{41}+4^{-1}(2(G_1-1)\delta_{42}+(G_2-1)\delta_{63}+(G_3-1)\delta_{60}+2G_4\delta_{51}+G_5\delta_{69}+G_6\delta_{70}),\\
&A_{51}=A_{51}+4^{-1}(2(G_1-1)\delta_{43}+(G_2-1)\delta_{61}+(G_3-1)\delta_{64}+G_4\delta_{69}+2G_5\delta_{32}+G_6\delta_{71}),\\
&A_{61}=A_{61}+4^{-1}(2(G_1-1)\delta_{44}+(G_2-1)\delta_{62}+(G_3-1)\delta_{65}+G_4\delta_{69}+G_5\delta_{71}+2G_6\delta_{57}),\\
&A_{12}=A_{21},\\
&A_{22}=A_{22}+(G_1-1)\delta_{27}+3(G_2-1)\delta_{23}+(G_3-1)\delta_{28}+G_4\delta_{45}+G_5\delta_{46}+G_6\delta_{47},\\
&A_{32}=A_{32}+2^{-1}(2(G_1-1)\delta_{31}+(G_2-1)\delta_{28}+(G_3-1)\delta_{30}+G_4\delta_{66}+G_5\delta_{67}+G_6\delta_{68}),\\
&A_{42}=A_{42}+4^{-1}((G_1-1)\delta_{60}+2(G_2-1)\delta_{45}+(G_3-1)\delta_{66}+2G_4\delta_{52}+G_5\delta_{72}+G_6\delta_{73}),\\
&A_{52}=A_{52}+4^{-1}((G_1-1)\delta_{61}+2(G_2-1)\delta_{46}+(G_3-1)\delta_{67}+G_4\delta_{72}+2G_5\delta_{33}+G_6\delta_{74}),\\
&A_{62}=A_{62}+4^{-1}((G_1-1)\delta_{62}+2(G_2-1)\delta_{47}+(G_3-1)\delta_{68}+G_4\delta_{73}+G_5\delta_{74}+2G_6\delta_{58}),\\
&A_{13}=A_{31},\ \ A_{23}=A_{32},\\
&A_{33}=A_{33}+(G_1-1)\delta_{29}+(G_2-1)\delta_{30}+3(G_3-1)\delta_{24}+G_4\delta_{45}+G_5\delta_{49}+G_6\delta_{50},\\
&A_{43}=A_{43}+4^{-1}((G_1-1)\delta_{63}+(G_2-1)\delta_{66}+2(G_3-1)\delta_{48}+2G_4\delta_{53}+G_5\delta_{75}+G_6\delta_{76}),\\
&A_{53}=A_{53}+4^{-1}((G_1-1)\delta_{64}+(G_2-1)\delta_{67}+2(G_3-1)\delta_{49}+G_4\delta_{75}+2G_5\delta_{34}+G_6\delta_{77}),\\
&A_{63}=A_{63}+4^{-1}((G_1-1)\delta_{65}+(G_2-1)\delta_{68}+2(G_3-1)\delta_{50}+G_4\delta_{76}+G_5\delta_{77}+2G_6\delta_{59}),\\
&A_{14}=2A_{41},\ \ A_{24}=2A_{42},\ \ A_{34}=2A_{43},\\
&A_{44}=A_{44}+2^{-1}((G_1-1)\delta_{51}+(G_2-1)\delta_{52}+(G_3-1)\delta_{53}+3G_4\delta_{54}+G_5\delta_{35}+G_6\delta_{36}),\\
&A_{54}=A_{54}+4^{-1}((G_1-1)\delta_{69}+(G_2-1)\delta_{72}+(G_3-1)\delta_{75}+2G_4\delta_{35}+2G_5\delta_{37}+G_6\delta_{41}),\\
&A_{64}=A_{64}+4^{-1}((G_1-1)\delta_{70}+(G_2-1)\delta_{73}+(G_3-1)\delta_{76}+2G_4\delta_{36}+G_5\delta_{41}+2G_6\delta_{39}),\\
&A_{15}=2A_{51},\ \ A_{25}=2A_{52},\ \ A_{35}=2A_{53},\ \ A_{45}=A_{54},\\
&A_{55}=A_{55}+2^{-1}((G_1-1)\delta_{32}+(G_2-1)\delta_{33}+(G_3-1)\delta_{34}+G_4\delta_{37}+3G_5\delta_{55}+G_6\delta_{38}),\\
&A_{65}=A_{65}+4^{-1}((G_1-1)\delta_{71}+(G_2-1)\delta_{74}+(G_3-1)\delta_{77}+G_4\delta_{41}+2G_5\delta_{38}+2G_6\delta_{40}),\\
&A_{16}=2A_{61},\ \ A_{26}=2A_{62},\ \ A_{36}=2A_{63},\ \ A_{46}=A_{64},\ \ A_{56}=A_{65},\\
&A_{66}=A_{66}+2^{-1}((G_1-1)\delta_{57}+(G_2-1)\delta_{58}+(G_3-1)\delta_{59}+G_4\delta_{39}+G_5\delta_{40}+3G_6\delta_{56}).
\end{aligned}\qquad (18)$$

Отметим, что матрица A получается симметричной, если использовать базисные диады $2^{-1}(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j+\mathbf{c}_j\mathbf{c}_i)$. Далее находим, как в [4], соотношение

$$\begin{pmatrix} B_1\\ B_2\\ B_3\\ B_4\\ B_5\\ B_6\end{pmatrix}=B\cdot\begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3\\ A_4\\ A_5\\ A_6\end{pmatrix},\ B=(B_{ik})_{\substack{i=\overline{1,6}\\ k=\overline{1,6}}}=\begin{pmatrix} U_1^2 & U_4^2 & U_5^2 & 2U_1U_4 & 2U_1U_5 & 2U_4U_5\\ U_4^2 & U_2^2 & U_6^2 & 2U_2U_4 & 2U_4U_6 & 2U_2U_6\\ U_5^2 & U_6^2 & U_3^2 & 2U_5U_6 & 2U_3U_5 & 2U_3U_6\\ U_1U_4 & U_2U_4 & U_5U_6 & U_4^2+U_1U_4 & U_4U_5+U_1U_6 & U_2U_5+U_4U_6\\ U_1U_5 & U_4U_6 & U_3U_5 & U_4U_5+U_1U_6 & U_5^2+U_1U_3 & U_5U_6+U_3U_4\\ U_4U_5 & U_2U_6 & U_3U_6 & U_2U_5+U_4U_6 & U_5U_6+U_3U_4 & U_6^2+U_2U_3\end{pmatrix}.$$

Симметричные тензоры $\mathbf{U}\cdot\mathbf{c}_n\mathbf{c}_n\cdot\mathbf{U}\,(n=\overline{1,3})$, $\mathbf{U}\cdot(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)\cdot\mathbf{U}$, $\mathbf{U}\cdot(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)\cdot\mathbf{U}$, $\mathbf{U}\cdot(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)\cdot\mathbf{U}$ в базисе $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ представляются шестимерными векторами, которые образуют соответствующие столбцы матрицы B. Из (17), (18) следует $P=B\cdot A\cdot C$, $P=(P_{ik})_{\substack{i=\overline{1,6}\\ k=\overline{1,5}}}$, $M=(M_{ik})_{\substack{i=\overline{1,5}\\ k=\overline{1,5}}}$. Аналогично получаем соотношения (12), (13) и переходим к (14), параметры p_k и M_{11} суммируются с полученными ранее.

Вычисление девиатора $\mathbf{q}_4$. Если в представлении тензора упругого спина [3] заменить тензоры $\mathbf{V}$, $\mathbf{D}$ на $\mathbf{U}$, $\mathbf{d}$, а векторы $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ на $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – ортонормированные собственные векторы $\mathbf{t}$, то получим выражение

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}-\mathbf{W}&=(L_1L_2-L_3)^{-1}(a\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)+b\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1)+c\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2)),\\ a&=V_4^2(V_1-V_2)+V_5^2(V_1+V_3)-V_6^2(V_2+V_3)-(V_1-V_2)(V_1+V_3)(V_2+V_3),\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{e}_i=V_i\ (i=1,\ 2,\ 3),\\ b&=V_4^2(V_1+V_2)+V_5^2(V_1-V_3)-V_6^2(V_2+V_3)-(V_1+V_2)(V_1-V_3)(V_2+V_3),\ V_4=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{e}_2,\ V_5=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{e}_3,\\ c&=-V_4^2(V_1+V_2)+V_5^2(V_1+V_3)+V_6^2(V_3-V_2)-(V_1+V_2)(V_1+V_3)(V_3-V_2),\ V_6=\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{e}_3,\end{aligned}\tag{19}$$

в котором все скаляры не изменяются, а базисные диады $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{E}_i\mathbf{E}_j\cdot\mathbf{O}$. Следовательно, $\mathbf{q}_4=\mathbf{O}\cdot\mathbf{Q}_4\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}$. Вычисляем девиатор $\mathbf{q}_4$.

Запишем покомпонентные представления в базисе $\mathbf{c}_i$ как

$$\mathbf{e}_1=e_{11}\mathbf{c}_1+e_{12}\mathbf{c}_2+e_{13}\mathbf{c}_3,\ \mathbf{e}_2=e_{21}\mathbf{c}_1+e_{22}\mathbf{c}_2+e_{23}\mathbf{c}_3,\ \mathbf{e}_3=e_{31}\mathbf{c}_1+e_{32}\mathbf{c}_2+e_{33}\mathbf{c}_3,$$

$$\mathbf{t}=T_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1+T_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+T_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3+T_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)+T_5(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)+T_6(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)$$

и девиатор $\mathbf{d}$ согласно (11). Вычислим

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_2=c_{12}=(e_{21}e_{11}-e_{23}e_{13},e_{22}e_{12}-e_{23}e_{13},e_{22}e_{11}+e_{21}e_{12},e_{21}e_{13}+e_{33}e_{11},e_{23}e_{12}+e_{22}e_{13})\cdot D,$$

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_3=c_{13}=(e_{31}e_{11}-e_{33}e_{13},e_{32}e_{12}-e_{33}e_{13},e_{32}e_{11}+e_{31}e_{12},e_{31}e_{13}+e_{33}e_{11},e_{33}e_{12}+e_{32}e_{13})\cdot D,$$

$$\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_3=c_{23}=(e_{31}e_{21}-e_{33}e_{23},e_{32}e_{22}-e_{33}e_{23},e_{32}e_{21}+e_{31}e_{22},e_{31}e_{23}+e_{33}e_{21},e_{33}e_{22}+e_{32}e_{23})\cdot D.$$

Далее из (19) найдем

$$\mathbf{\Omega}-\mathbf{W}=w_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)+w_5(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3-\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)+w_6(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3-\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2),$$

$$w_4 = (L_1L_2 - L_3)^{-1}(ac_{12}(e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}) + bc_{13}(e_{11}e_{32} - e_{12}e_{31}) + cc_{23}(e_{21}e_{32} - e_{31}e_{22})),$$
$$w_5 = (L_1L_2 - L_3)^{-1}(ac_{12}(e_{11}e_{23} - e_{21}e_{13}) + bc_{13}(e_{11}e_{33} - e_{13}e_{31}) + cc_{23}(e_{21}e_{33} - e_{31}e_{23})),$$
$$w_6 = (L_1L_2 - L_3)^{-1}(ac_{12}(e_{12}e_{23} - e_{22}e_{13}) + bc_{13}(e_{12}e_{33} - e_{13}e_{32}) + cc_{23}(e_{22}e_{33} - e_{32}e_{23})).$$

Тензор $\mathbf{d}\cdot(\Omega - \mathbf{W}) - (\Omega - \mathbf{W})\cdot\mathbf{d}$ является девиатором. Находим

$$\mathbf{q}_4 = \mathbf{t}\cdot(\Omega - \mathbf{W}) - (\Omega - \mathbf{W})\cdot\mathbf{t} = Q_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + Q_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - (Q_1 + Q_2)\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 + Q_3(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1) + Q_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1) + Q_5(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2),$$

$$Q_1 = -2(w_4T_4 + w_5T_5),\ \ Q_2 = 2(w_4T_4 - w_6T_6),\ \ Q_3 = (T_1 - T_2)w_4 - w_6T_5 - w_5T_6,$$

$$Q_4 = (T_1 - T_3)w_5 + w_6T_4 - w_4T_6,\ \ Q_5 = (T_2 - T_3)w_6 + w_5T_4 + w_4T_5.$$

Переходим к соотношению (13), а затем к (14), как и в случае с $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}_3$. Параметры M_{11} и p_k также суммируются с их значениями, полученными ранее. Вычисление девиатора $\mathbf{q}_4$ осуществляется согласно полученным соотношениям.

Вычисление вектора внешней нормали. Матрицей W (14) с учетом ее суммирования для $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$, $\mathbf{q}_4$ задается симметричный оператор в пятимерном векторном пространстве. Пять его собственных значений – действительные числа, а соответствующие им пять собственных векторов взаимно ортогональны.

Вычисляются пять собственных значений и соответствующие им пять собственных векторов оператора (14) и выбирается из них вектор внешней нормали к поверхности девиаторного сечения поверхности текучести в пространстве тензора напряжений, полученного ортогональным преобразованием тензора напряжений Коши.

Далее вычисляются пять коэффициентов в характеристическом уравнении пятой степени. Градиентным методом находится одно собственное значение. Оставшиеся четыре собственных значения находятся по методу Феррари. Затем градиентным методом уточняются величины найденных собственных значений и вычисляются пять собственных векторов. Для данного значения тензора $\mathbf{t}$ выполняется обращение изотропного упругого закона Мурнагана, т. е. вычисляется значение меры $\mathbf{G}$. Вычисляются два вектора, один из которых является вектором внешней нормали для изотропного материала [3]. Затем отыскиваются два из пяти ближних к ним собственных вектора оператора (14). Из них выбирается искомый вектор внешней нормали как ближний к вектору нормали для изотропного материала. В окрестности сингулярной точки девиаторного сечения поверхности текучести требуется дополнительная визуальная проверка для анизотропного материала. Требуемое направление вектора нормали $\mathbf{n} = \mathbf{O}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$ определяется условием $\mathbf{t}\cdot\cdot\,\mathbf{n} > 0$. Для использования $\mathbf{n}$ его необходимо нормировать как $\mathbf{n}/\sqrt{\mathbf{n}\cdot\cdot\,\mathbf{n}}$ [4].

Заключение. В работе получены необходимые соотношения для программной реализации процедуры вычисления девиаторов $\mathbf{q}$, $\mathbf{n}$. Разработан комплекс программ, с помощью которого определены входные данные в головной программе комплекса [4]. Обратным ортогональным преобразованием вычислены критериальный девиатор $\mathbf{Q}$ и вектор внешней нормали $\mathbf{N}$ к поверхности девиаторного сечения поверхности текучести в пространстве напряжений Коши $\mathbf{T}$. Полностью представлены соотношения для анизотропной и вихревой частей критериального оператора.

Разработанные программные средства могут быть использованы при проведении экспериментальных исследований по определению поверхности текучести и в системе численного моделирования процессов обработки металлов давлением на основе упругопластического материала Мурнагана. В частности, они применялись в работах [5, 6].

Список использованных источников

1. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
2. Murnaghan, F. D. Finite Deformation of an Elastic Solid / F. D. Murnaghan. – N. Y. : Dover, 1967. – 140 p.
3. Швед, О. Л. Модель упругопластического материала Мурнагана / О. Л. Швед // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83, № 1. – С. 158–172.
4 Швед, О. Л. Вычисление изменения состояния упругопластического материала Мурнагана в условиях течения при известных скоростях перемещений / О. Л. Швед // Информатика. – 2018. – № 4(15). – С. 59–70.
5. Швед, О. Л. Численное моделирование чистого сдвига для идеально упругопластического материала Мурнагана / О. Л. Швед // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2019. – Т. 64, № 2. – С. 174–181.
6. Швед, О. Л. Численное моделирование базовых экспериментов для упругопластического материала Мурнагана [Electronic resource] / О. Л. Швед // Расширенные тез. докл. XII Всерос. съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 19–24 авг. 2019 г., Уфа. – 2019. – Mode of access: http://ruscongrmech2019.bashedu.ru/ru/obshchaya-informaciya-o-sezde. − Date of access: 27.08.2019.

References

1. Lurie A. I. Nelinejnaja teorija uprugosti. *Nonlinear Theory Elasticity*. Moscow, Nauka, 1980, 512 p. (in Russian).
2. Murnaghan F. D. *Finite Deformation of an Elastic Solid*. New York, Dover, 1967, 140 p.
3. Shved O. L. Model' uprugoplasticheskogo materiala Murnagana [Model of the Murnaghan elastic-plastic material]. Prikladnaja matematika i mehanika [*Applied Mathematics and Mechanics*], 2019, vol. 83, no. 1, pp. 158–172 (in Russian).
4. Shved O. L. Vychislenie izmenenija sostojanija uprugoplasticheskogo materiala Murnagana v uslovijah techenija pri izvestnyh skorostjah peremeshhenij [Calculation of changes in state of Murnaghan’s elastic-plastic material under conditions of flow with known movement speeds]. Informatika [*Informatics*], 2018, vol. 15, no. 4, pp. 59–70 (in Russian).
5. Shved O. L. Chislennoe modelirovanie chistogo sdviga dlja ideal'no uprugoplasticheskogo materiala Murnagana [Numerical simulation of shear for a perfectly elastic-plastic material of Murnaghan]. Vestsi Natsyyanal’nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnych navuk [*Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*], 2019, vol. 64, no. 2, pp. 174–181 (in Russian).
6. Shved O. L. Chislennoe modelirovanie bazovyh jeksperimentov dlja uprugoplasticheskogo materiala Murnagana [Numerical modeling of basic experiments for Murnagan's elastic-plastic material]. Rasshirennye tezisy dokladov XII Vserossijskogo s"ezda po fundamental'nym problemam teoreticheskoj i prikladnoj mehaniki, 19–25 avg. 2019 g., Ufa [*Extended Abstracts of Reports of the XII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics, 19–24 August 2019, Ufa*], 2019. Available at: http://ruscongrmech2019.bashedu.ru/ru/obshchaya-informaciya-o-sezde (accessed: 27.08.2019).

Информация об авторе

Швед Олег Лаврентьевич, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск, Беларусь.
E-mail: swed@newman.bas-net.by

Information about the author

Oleg L. Shved, Cand. Sci. (Eng.), Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
E-mail: swed@newman.bas-net.by