ИНФОРМАТИКА

2004 **октябрь-декабрь** **№4**

УДК 519.8

Ю.Н. Сотсков

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РАСПИСАНИЙ

Перечислены основные результаты по исследованию устойчивости оптимальных расписаний относительно возможных вариаций числовых исходных данных. Рассматриваются многостадийные системы обслуживания, в которых технологические маршруты фиксированы. Основное внимание уделено вычислению радиуса устойчивости оптимального расписания. Приведен обзор различных подходов к анализу устойчивости решений задач дискретной оптимизации.

Введение

В данной работе рассматривается следующая задача теории расписаний. Множество требований $J = \{J_1, J_2, ..., J_n\}$ должно быть обслужено в многостадийной системе, состоящей из различных по назначению приборов $M = \{M_1, M_2, ..., M_m\}$. В любой момент времени каждый прибор $M_k \in M$ может обслуживать не более одного требования множества *J*, а каждое требование $J_i \in J$ может обслуживаться не более чем одним прибором множества *M*. Обслуживание требования $J_i \in J$ состоит из $r_i > 1$ стадий и соответственно включает r_i операций $O_{i1}, O_{i2}, ..., O_{ir(i)}$, которые должны последовательно выполняться приборами $M_{i1}, M_{i2}, ..., M_{ir(i)}$ из множества *M* в соответствии с заданным технологическим маршрутом. Длительность выполнения операции по обслуживанию требования $J_i \in J$ прибором M_{ij} на стадии *j* равна $p_{ij} \geq 0$, где p_{ij} – действительное число. Предполагается, что все операции *Q* должны выполняться без прерываний и поэтому для каждого (допустимого) расписания выполняется равенство $c_{ij} = s_{ij} + p_{ij}$, в котором s_{ij} и c_{ij} обозначают соответственно момент начала и момент завершения выполнения операции. Задача состоит в построении *оптимального* расписания обслуживания требований *J* приборами *M*, т. е. необходимо построить расписание, при котором заданная целевая функция $\Phi = \Phi(C_1, C_2, ..., C_n)$ принимает наименьшее значение. Здесь C_i обозначает момент завершения обслуживания требования $J_i \in J$: $C_i = c_{ir(i)}$.

Большинство известных результатов для многостадийных систем обслуживания получено для критерия быстродействия, т. е. для минимизации общего (максимального) времени обслуживания требований $C_{\max} = \max\{C_i : J_i \in J\}$, а также для критерия минимизации суммарного (среднего) времени обслуживания требований $\sum C_i = \sum_{i=1}^{n} C_i$. Ряд алгоритмов применим и для произвольного регулярного критерия, состоящего в минимизации заданной неубывающей целевой функции $\Phi = \Phi(C_1, C_2, ..., C_n)$.

В зависимости от маршрутов обслуживания требований многостадийная система может быть одного из следующих типов. В системах flow shop (поточного типа) маршруты всех требований заданы одинаковыми: $(M_1, M_2, ..., M_m)$. В системах job shop маршруты требований фиксированы и могут быть различными для разных требований. В системах general shop на множестве всех выполняемых операций *Q* задается произвольное отношение строгого порядка. В системах open shop маршруты требований не фиксированы на момент составления оптимального расписания. Очевидно, что системы job shop и open shop являются частными случаями системы general shop, а система flow shop – частным случаем системы job shop. Следует отметить, что в системе job shop в маршруте $(M_{i1}, M_{i2}, ..., M_{ir(i)})$ обслуживания требования $J_i \in J$ допускаются повторения приборов и (или) отсутствие некоторых приборов. Иными словами, в отличие от систем flow shop и open shop, в которых $r(i) = m$ для каждого требования $J_i \in J$, в системе job shop возможно выполнение одного из трех соотношений: $r_i < m$, $r_i = m$ или $r_i > m$. Для обозначения задач теории расписаний принято использовать трехпозиционную форму $\alpha/\beta/\gamma$, в которой позиция α характеризует число приборов и тип обслуживающей системы (символ F используется для обозначения системы flow shop, J – для системы job shop, O – для системы open shop и G – для системы general shop). Позиция β определяет число требований и их основные характеристики. Позиция γ определяет вид целевой функции.

1. Мотивация исследования устойчивости оптимальности расписания

Принятое в классической теории расписаний предположение о том, что длительности всех операций известны до построения расписания и не могут измениться в процессе его реализации, ограничивает практические возможности теории расписаний. Данный обзор посвящен результатам анализа устойчивости оптимальности расписания относительно возможных вариаций числовых параметров. Термин «анализ устойчивости» используется в дискретной оптимизации, когда решение оптимизационной задачи уже найдено и исследуется вопрос о том, как это решение зависит от числовых исходных данных. Анализ устойчивости оптимального расписания может интерпретироваться как исследование задачи построения оптимального расписания в условиях неопределенности числовых исходных данных, а именно когда требуется оценить влияние ошибок округления длительностей операций на свойство расписания оставаться оптимальным (т. е. наилучшим среди всех допустимых расписаний).

В данной работе перечислены основные результаты по вычислению *радиуса устойчивости* оптимального расписания для задач general shop, job shop и flow shop. Содержательно радиус устойчивости определяет наибольший диапазон независимых совместных изменений всех или части длительностей операций, при которых данное расписание остается оптимальным. Основное внимание уделяется результатам по анализу устойчивости расписаний, которые опубликованы в зарубежных журналах на английском языке. Используется терминология из монографии [1].

Одна из причин необходимости анализа устойчивости оптимального расписания состоит в том, что во многих практических ситуациях на этапе построения расписания не все длительности операций могут быть определены достаточно точно (без существенной погрешности). В таких случаях анализ устойчивости расписания необходим для того, чтобы установить, насколько практически значимым является свойство оптимальности построенного расписания. В частности, если ошибки при вычислении фактических длительностей операций превосходят радиус устойчивости оптимального расписания, то это расписание может оказаться неоптимальным при его практической реализации. Если же возможные вариации длительностей операций меньше или равны радиусу устойчивости оптимального расписания, то это расписание остается оптимальным при любой его допустимой реализации.

Другая причина необходимости вычисления радиуса устойчивости определяется практической потребностью решать семейство схожих задач построения оптимальных расписаний. В практике календарного планирования, как правило, основные характеристики обслуживающей системы (такие, как количество обслуживающих приборов, технологические маршруты обслуживания требований, диапазоны возможных значений длительностей операций и т. п.) не изменяются в течение длительного промежутка времени. В связи с этим возникает возможность использовать результаты предыдущих вычислений (как правило, довольно трудоемких) при решении новой аналогичной задачи календарного планирования.

Ввиду того, что в большинстве своем задачи составления оптимальных расписаний являются NP-трудными, для точного решения таких задач часто используются схемы неявного перебора вариантов (например, метод ветвей и границ). При этом для каждой задачи строится дерево решений, которое зачастую имеет огромные размеры и соответственно содержит много полезной информации обо всем классе задач. К сожалению, после решения конкретной задачи составления оптимального расписания, по сути, вся информации, содержащаяся в построенном дереве решений, безвозвратно теряется и в дальнейшем никак не используется. В такой ситуации радиус устойчивости полученного оптимального расписания дает возможность использовать часть этой информации при последующих решениях аналогичных задач календарного планирования.

Следует отметить также, что процедуры вычисления радиуса устойчивости оптимального расписания достаточно эффективно используются при решении различных задач теории расписаний в условиях неопределенности числовых параметров (при предположении, что длительности операций не определены к моменту построения расписания, а известен только диапазон их возможных значений). Этому новому направлению теории расписаний посвящена монография [2].

2. Постановка задачи определения радиуса устойчивости

Практически все задачи теории расписаний (без прерываний операций) могут быть представлены как экстремальные задачи на смешанных графах [1]. Так, для наиболее общей системы обслуживания general shop можно построить смешанный граф $G=(Q, A, E)$, в котором множество вершин $Q=\{1, 2, \dots, h\}$ представляет собой множество всех выполняемых в системе операций. Множество дуг A задает отношения строгого порядка на множестве операций Q. Ребра множества E соединяют попарно операции (вершины смешанного графа G), выполняемые на одном и том же приборе. Поскольку прибор в каждый момент времени может выполнять не более одной операции, то каждое ребро $[i, j] \in E$, $i \in Q$, $j \in Q$, должно быть сориентировано, т. е. заменено одной из двух дуг (i, j) (операция i выполняется раньше j) или (j, i) (операция j выполняется раньше i).

Пусть $W=\{G_1, G_2, \dots, G_к\}$ обозначает множество всех бесконтурных ориентированных графов (орграфов), порождаемых смешанным графом G в результате замены всех его ребер дугами. Тогда задача $G//C_{max}$ сводится к построению такой бесконтурной ориентации ребер E смешанного графа (Q, A, E), чтобы длина критического пути в полученном орграфе $G_s = (Q, A \cup E_s, \varnothing) \in W$ была бы наименьшей. В случае задания какого-либо другого регулярного критерия оптимальности Φ задача $G//\Phi$ аналогично сводится к задаче выбора из множества W орграфа $G_s = (Q, A \cup E_s, \varnothing)$ с некоторыми экстремальными свойствами путей максимального веса [1].

Основной вопрос, которому посвящены разд. 3 – 5, можно сформулировать следующим образом. В каких пределах можно варьировать одновременно и независимо длительности операций p_i, $i \in Q$, чтобы данное расписание s для задачи $G//\Phi$ гарантированно оставалось оптимальным, и как вычислить наибольший диапазон таких вариаций? Следует отметить, что любое изменение $p_i + \varepsilon$ $(p_i - \varepsilon)$ длительности операции p_i приводит к изменению, по крайней мере, момента завершения c_i операции i. В результате получается, строго говоря, другое расписание, однако оптимальный орграф $G_s = (Q, A \cup E_s, \varnothing)$ для новой задачи, полученной в результате такого изменения значения p_i, может оставаться тем же самым, если величина ε достаточно мала. Исследования, проведенные в работах [3–8], были посвящены анализу устойчивости оптимального орграфа $G_s = (Q, A \cup E_s, \varnothing)$, который представляет оптимальное расписание для задачи $G//\Phi$. Сформулированный выше вопрос можно конкретизировать следующим образом. При каких максимальных совместных вариациях координат вектора $p = (p_1, p_2, \dots, p_q)$ длительностей операций Q орграф $G_s = (Q, A \cup E_s, \varnothing)$ остается оптимальным?

Введем формальные определения шара и радиуса устойчивости оптимального расписания (орграфа) [4]. Пусть R – векторное пространство q-размерных действительных векторов p с чебышевской (максимальной) метрикой, т. е. расстояние $d(p,p')$ между векторами p и $p' = (p'_1, p'_2, \dots, p'_q)$ вычисляется по следующей формуле: $d(p, p') = \max\{|p_i - p'_i| : i \in Q\}$. Пусть R^+ обозначает векторное пространство q-размерных неотрицательных действительных векторов. Предположим, что расписание s является оптимальным для задачи $G//\Phi$ при условии, что длительности операций заданы вектором $p \in R^+$.

Определение. *Замкнутый шар $O_r(p)$ с радиусом r и центром $p \in R^+$ в векторном пространстве R будем называть* ***шаром устойчивости*** *расписания s (орграфа G_s), если для любого вектора $p' \in O_r(p) \cap R^+$ расписание s (орграф G_s) остается оптимальным. Максималь-*

ное значение $r_s(p)$ радиуса r шара устойчивости $O_r(p)$ расписания s (орграфа G_s) называется ***радиусом устойчивости*** *расписания s (орграфа G_s).*

Формулы для вычисления радиуса устойчивости для критерия быстродействия и характеристики экстремальных значений $r_s(p)$ получены в работах [4, 6–8]. В работе [9] рассматривались аналогичные вопросы для критерия минимизации суммарного времени обслуживания требований. Из определения радиуса устойчивости следует общий метод вычисления значения $r_s(p)$, который был предложен в работе [7] и конкретизирован для критериев $C_{\max}$ и ΣC в работах [8] и [9] соответственно. В работе [10] доказаны более общие результаты для относительного радиуса устойчивости, т. е. когда заранее задан многогранник в пространстве R^+, внутри которого могут изменяться длительности операций. В [11] были разработаны программы для вычисления радиуса устойчивости в случае критериев $C_{\max}$ и ΣC_i. Были проведены эксперименты на ЭВМ по вычислению радиуса устойчивости для случайно сгенерированных примеров. Особое внимание было уделено расписаниям с нулевым и неограниченным сверху (т. е. бесконечным) радиусом устойчивости.

3. Общее время обслуживания требований

Приведем подробнее результаты из работ [4, 6–8], в которых был исследован радиус устойчивости оптимального расписания для критерия $C_{\max}$. Пусть для задачи general shop H и H_k обозначают соответственно множества всех доминирующих путей в орграфе $(Q, A, \varnothing)$ и в орграфе $G_s = (Q, A \cup E_s, \varnothing)$ соответственно. (Путь ν доминирует путь μ, если множество $[\mu]$ вершин пути μ является собственным подмножеством множества $[\nu]$.) Пусть $H_k(p)$ обозначает множество всех критических доминирующих путей в орграфе $G_k(p) \in W$ (относительно вектора p). Тогда можно представить доказанные в [4, 6–8] необходимые и достаточные условия для выполнения равенства $r_s(p) = 0$.

Теорема 1. *Для оптимального расписания s задачи $G//C_{max}$ выполняется равенство $r_s(p) = 0$ тогда и только тогда, когда существует другое оптимальное расписание t и существует путь $\mu \in H_t(p)$, такой, что не существует пути $\nu \in H_t(p)$, для которого $[\mu] \subseteq [\nu]$.*

Доказательство аналогичного утверждения для относительного радиуса устойчивости (т. е. когда вариации длительностей операций ограничены нижними и верхними границами) было получено в работе [10], достаточные условия для выполнения неравенства $r_s(p) > 0$ в случае перестановочной задачи flow shop $F//C_{max}$ – в работе [12]. Из теоремы 1 можно получить следующие следствия [8].

Следствие 1. *Если s – единственное оптимальное расписание для задачи $G//C_{max}$, то $r_s(p) > 0$.*

Следствие 2. *Если s – оптимальное расписание для задачи $G//C_{max}$ и $H_s(p) \subseteq H$, то $r_s(p) > 0$.*

Формулы для вычисления точного значения $r_s(p)$ были получены в работах [4, 5, 8]. При этом вычисление радиуса устойчивости сводилось к экстремальной задаче на множестве орграфов $W=\{G_1, G_2, ..., G_\kappa\}$ с переменным вектором весов, приписанных вершинам орграфа $G_t \in W$. Основными объектами вычислений являлись множества доминирующих путей H_t, $t \in \{1, 2, ..., k\}$. В работе [13] показано, как можно сократить перебор сравниваемых орграфов при вычислении $r_s(p)$.

В работах [14, 15] рассматривается задача, в некотором смысле обратная к задаче вычисления радиуса устойчивости. Предполагается, что длительности операций не фиксированы, а могут изменяться в заданных интервалах в процессе реализации расписания. При этом может не существовать единственного расписания, которое остается оптимальным для любых допустимых длительностей операций. Поэтому в качестве решения задачи рассматривается минимальное по включению множество расписаний (орграфов), обладающее следующим свойством. Для любого допустимого набора длительностей операций это множество должно содержать хотя бы одно оптимальное расписание (орграф).

4. Бесконечный радиус устойчивости оптимального расписания

В работах [5, 7, 16, 17] получены необходимые и достаточные условия существования бесконечно большого радиуса устойчивости, причем для задач $J//C_{max}$ и $J//L_{max}$ соответствующие условия проверяются за полиномиальное время (критерий L_{max} обозначает минимизацию максимального смещения завершения обслуживания требований от заданных директивных сроков). В частности, в работе [7] был получен следующий критерий существования оптимального расписания с бесконечно большим радиусом устойчивости для задачи $G//C_{max}$.

Теорема 2. *Для оптимального расписания s задачи* $G//C_{max}$ *выполняется равенство* $r_s(p) = \infty$ *тогда и только тогда, когда для любого пути* $\mu \in H_s \setminus H$ *и любого орграфа* $G_t \in W$ *существует путь* $\nu \in H_t$, *такой, что* $[\mu] \subseteq [\nu]$.

Доказательство аналогичного критерия для относительного радиуса устойчивости приведено в работе [10]. Из доказательства достаточности теоремы 2 следует верхняя оценка радиуса устойчивости.

Следствие 3. *Если s – оптимальное расписание для задачи* $G//C_{max}$ *и* $r_s(p) < \infty$, *то справедлива оценка* $r_s(p) \leq \max\{p_i : i \in Q\}$.

Следуя теореме 2, можно сформулировать задачу $G//C_{max}$, для которой оптимальное расписание определяется только отношением строгого порядка, заданным на множестве операций Q, и распределением операций Q по приборам множества M. Оптимальность такого расписания, по существу, не зависит от длительностей операций $p \in R^+$, и, следовательно, такое расписание определяет минимальное (по включению и по мощности) решение задачи с неопределенными длительностями операций. К сожалению, до сих пор неизвестна эффективная процедура проверки условий теоремы 2 для задачи $G//C_{max}$, и поэтому в общем случае условия теоремы 2 можно проверить за приемлемое время только для задач небольшой размерности.

В статьях [16, 17] для задачи $J//C_{max}$ были получены необходимые и достаточные условия существования бесконечного радиуса устойчивости, которые (в отличие от условий теоремы 2) могут быть проверены за полиномиальное время. Для представления необходимых и достаточных условий существования расписания с бесконечным радиусом устойчивости для системы job shop потребуются обозначения: $A_r = \{i : i \to j,\ i \in Q \setminus Q_r,\ j \in Q_r\}$ и $B_r = \{j : i \to j,\ j \in Q \setminus Q_r,\ i \in Q_r\}$. Здесь Q_r обозначает множество операций, выполняемых на приборе $M_r \in M$, а отношение $i \to j$ указывает на то, что операция i предшествует операции j. Рассмотрим фактор-множества A_r / J и B_r / J, полагая, что две операции i и j эквивалентны тогда и только тогда, когда это операции по обслуживанию одного и того же требования. В [16] доказан следующий критерий.

Теорема 3. *Для задачи* $J//C_{max}$ *существует оптимальный орграф* $G_s \in W$ *с бесконечно большим радиусом устойчивости тогда и только тогда, когда для любого прибора* $M_r \in M$, *такого, что* $|Q_r /J| > 1$, *выполняются соотношения* $|A_r| \leq 1$ *и* $|B_r| \leq 1$, *причем если существует требование* $J_l \in J$, *для которого* $A_r \cap Q_l = g$ *и* $B_r \cap Q_l = f$, *то в орграфе* $(Q,A,\varnothing)$ *найдется путь из вершины f в вершину g или* $f = g$.

Теорема 3 позволяет выделить невырожденный класс задач $J//C_{max}$, для которых существуют расписания, оптимальные при любых неотрицательных длительностях операций. Аналоги теорем 2 и 3 для задачи $J//L_{max}$ были доказаны в работе [17]. Проверка условий теоремы 3 реализуется за $O(h^2)$ элементарных действий (как и проверка аналогичных условий для задачи $J//L_{max}$).

В работе [17] доказано, что не существует оптимального расписания s с бесконечно большим радиусом устойчивости для многостадийных систем обслуживания с другими регулярными критериями оптимальности, традиционно рассматриваемыми в теории расписаний. В [18] показано, как можно использовать радиус устойчивости перестановки Джонсона для решения задачи теории расписаний с заданными интервалами недоступности приборов.

5. Минимизация суммарной целевой функции

В работах [19, 20] представлены результаты вычисления радиуса устойчивости $r_s(p)$ для критерия ΣC_i. В [21] доказано более общее утверждение для относительного радиуса устойчивости. Экстремальные значения величины $r_s(p)$ для критерия ΣC_i. были исследованы в работах [9, 20]. Утверждение, аналогичное следствию 1, справедливо и для критерия ΣC_i. Следующая верхняя оценка радиуса устойчивости оптимального расписания для задачи $J//\Sigma C_i$ получена в работе [9].

Следствие 4. *Если расписание s является оптимальным для задачи $J//\Sigma C_i$ и неравенства $k > 1$ и $p_i > 0$ выполняются хотя бы для одной операции $i \in Q$, то $r_s(p) \leq \max\{p_i : i \in Q\}$.*

На основании следствия 4 можно заключить, что для задачи $J//\Sigma C_i$ при $k > 1$ нельзя построить оптимальное расписание с бесконечно большим радиусом устойчивости в отличие от задач $J//C_{max}$ и $J//L_{max}$. Однако в работе [13] было показано, что относительный радиус устойчивости может быть неограниченным сверху (бесконечным) и для задачи $J//\Sigma C_i$.

В работах [22, 23] проведено исследование устойчивости ε-приближенных решений булевых задач минимизации линейной формы. В частности, в статье [23] показано, что если число переменных коэффициентов линейной формы растет не быстрее, чем $\log n$, то радиус устойчивости ε-приближенного решения булевой задачи минимизации линейной формы вычисляется с полиномиальной трудоемкостью. Исследование устойчивости (точного) решения булевой задачи минимизации линейной формы практически нецелесообразно, поскольку при существовании двух или более решений задачи каждое из них имеет нулевой радиус устойчивости (см. разд. 6). На практике, как правило, невозможно построить все решения задачи в силу ее большой размерности.

В работе [24] проведено исследование устойчивости оптимального баланса сборочной линии к вариациям длительностей операций, выполняемых вручную, получены условия существования нулевого радиуса устойчивости и выведена формула вычисления радиуса устойчивости оптимального баланса в общем случае.

Обзор результатов по исследованию устойчивости решений задач дискретной оптимизации (в частности, задач теории расписаний) приведен в работе [25].

6. Различные подходы к исследованию устойчивости в дискретной оптимизации

В заключение рассмотрим различные подходы к исследованию устойчивости решений различных задач дискретной оптимизации. В работе [26] В.К. Леонтьев предложил особый подход к анализу локальной устойчивости в *линейных траекторных задачах,* таких, как задача о бродячем торговце, задача о назначениях, задача о кратчайшем пути, задача булевого программирования. Предложенный подход был развит в [27 – 29] и многих других работах (см. [20, 25, 30]). При анализе устойчивости решений (т. е. оптимальных траекторий) основное внимание в указанных работах уделяется определению предела возмущений числовых параметров задачи, не приводящих к появлению новых оптимальных траекторий по сравнению с множеством решений исходной задачи. Иными словами, исследовался радиус устойчивости всего множества оптимальных траекторий, т. е. наибольший радиус $r(p)$ открытого шара с центром в точке p в пространстве числовых исходных данных, такого, что при всех возмущениях вектора исходных данных p внутри этого шара не возникает новых оптимальных траекторий.

Следует отметить, что исследование устойчивости всего множества оптимальных траекторий (вместо одной конкретной траектории, что представляется практически более полезным) связано с особенностью траекторных задач. Радиус устойчивости конкретной оптимальной траектории отличен от нуля тогда и только тогда, когда нет других оптимальных траекторий при заданном векторе p. Следует отметить, что для большинства задач теории расписаний (в частности, рассмотренных в разд. 1 – 5) радиус устойчивости решения больше нуля, несмотря на наличие других оптимальных расписаний (орграфов). Перечислим основные результаты, полученные относительно устойчивости решений линейных траекторных задач.

В работе [26] получена формула для вычисления радиуса устойчивости $r(p)$ множества всех оптимальных обходов городов для задачи о бродячем торговце и определены экстремальные значения величины $r(p)$. Специфическое преобразование метода ветвей и границ при вычислении $r(p)$ для задачи о бродячем торговце предложено в работе [29], теоретическое и экспериментальное (на основе метода ветвей и границ) исследование области устойчивости оптимального обхода городов в задаче о бродячем торговце проведено в [31]. В работе [27] разработан полиномиальный алгоритм для вычисления радиуса устойчивости множества решений для экстремальной задачи на матроиде и на пересечении двух матроидов. В статье [28] исследована устойчивость оптимальной траектории в случае использования произвольной монотонной метрики. Анализ устойчивости решений задач, которые могут быть представлены в терминах булевого программирования с линейной целевой функцией, был проведен в работе [32]. Устойчивость приближенного решения линейной траекторной задачи исследовалась в работах [19, 22, 23, 33]. Следует отметить, что радиус устойчивости конкретной траектории, которая является приближенным решением линейной траекторной задачи, как правило, больше нуля, несмотря на наличие других приближенных решений задачи. В работах [34, 35] исследовалась чувствительность значения целевой функции решения задачи о рюкзаке к изменению одного числового параметра на единицу.

Сложность вычисления радиуса устойчивости $r(p)$ решения задачи дискретной оптимизации исследовалась в работах [36, 37]. В [36] доказано, что задача определения допусков (допустимых отклонений) длин дуг для задачи дискретной оптимизации не менее трудна для решения, чем исходная задача дискретной оптимизации. Допуск дуги обозначает максимальное изменение (т. е. увеличение или уменьшение) веса дуги, которое заведомо не лишает оптимальности рассматриваемое решение задачи дискретной оптимизации. В случае задачи о бродячем торговце доказанное в работе [36] утверждение означает, что задача о допусках дуг является NP-трудной, даже если в состав ее исходных данных включен оптимальный обход городов. В работе [37] установлена NP-трудность задачи вычисления величины $r(p)$ для полиномиально разрешимой задачи нахождения кратчайшего пути в орграфе без контуров отрицательного веса. Сложность анализа устойчивости решений булевого программирования исследовалась в работе [38]. Показано, что при некоторых необременительных условиях из существования полиномиального алгоритма для определения радиуса устойчивости задачи булевого программирования с необходимостью следует существование полиномиального алгоритма решения самой задачи булевого программирования. В работах [39, 40] показано, что при анализе устойчивости решений с вычислительной точки зрения целесообразно рассматривать множество k лучших (по значениям целевой функции) решений задачи дискретной оптимизации. В частности, при анализе устойчивости симметричной задачи о бродячем торговце использовались k обходов городов, которые являются кратчайшими по сравнению с остальными обходами. Сложность анализа устойчивости решений для задачи управления запасами исследовалась в работе [41], в которой предложены полиномиальные алгоритмы различной трудоемкости (сложности от $O(\log n)$ до $O(n^2)$) для определения пределов изменений тех или иных параметров задачи, сохраняющих оптимальность решения. Алгоритмы основаны на методе динамического программирования.

В работе [42] и многих других аналогичных работах (см. [30]) исследовалась устойчивость решений векторной многокритериальной траекторной задачи, числовые параметры которой подвержены независимым возмущениям. Под векторной оптимизацией понимается задача нахождения одного, нескольких или всех эффективных решений задачи (альтернатив). При этом множество альтернатив может включать истинно эффективные (оптимальные по Парето), слабо эффективные (оптимальные по Слейтору) и строго эффективные решения. В перечисленных работах (и многих других работах по векторной оптимизации) получены достаточные условия, а в ряде случаев – необходимые и достаточные условия различных типов локальной устойчивости множества оптимальных траекторий относительно той или иной комбинации частных критериев. Найдены нижние (как правило, достижимые) оценки радиуса устойчивости оптимальной траектории как предела возмущений параметров задачи, не приводящих к потере исходной эффективности траектории. В случае изменений только одного параметра задачи получены формулы для вычисления точных значений исследованных типов радиусов устойчивости. Аналитическое выражение радиуса устойчивости строго эффективной траектории получено и в случае изменений любого (но только одного) частного критерия. Исследовались также сложность, полнота, устойчивость и скаляризация векторных траекторных задач.

Полученные в рамках различных постановок постоптимального анализа результаты нашли всестороннее отражение в аннотированной библиографии [43]. Эта библиография доступна через Интернет и постоянно пополняется новыми публикациями. В ней Х.Дж. Гринберг распределил по категориям различные типы постоптимального анализа устойчивости и чувствительности решений к возмущениям числовых параметров и дал краткий анализ современного состояния проблемы. Цель анализа чувствительности полученного решения состоит в определении того, как изменяются значения оптимального решения при изменении числовых исходных данных задачи. Рассматриваемые при этом вопросы связаны с ненормальным, неограниченным или недопустимым поведением целевой функции на данном решении или на множестве решений. Большинство публикаций постоптимального анализа чувствительности и устойчивости решений посвящено задаче линейного и целочисленного программирования.

Заключение

Несмотря на очевидную практическую важность, существует довольно мало научной литературы по анализу устойчивости в области теории расписаний. За рамками представленных в данной статье можно отметить результаты, полученные в работе [44], в которой исследовалась чувствительность эвристического алгоритма к изменениям длительностей обслуживания требований. В работе [45] исследовалась длина расписания в задаче flow shop с двумя приборами как функция от коэффициентов увеличения производительности приборов. Было показано, что эта функция кусочно-линейная и, вообще говоря, невыпуклая. Аналогично исследовалось влияние изменения длительности одной операции на качество эвристического решения задачи оптимального обслуживания требований в системе с параллельными идентичными приборами. В качестве эвристических правил рассматривались правило выбора кратчайшей операции и правило выбора длиннейшей операции. В работе [46] отмечается целесообразность изучения задачи составления расписания с неопределенными длительностями операций и проведения анализа устойчивости ее решения. Причины таких исследований были проиллюстрированы многочисленными ссылками на практические приложения. В частности, во многих практических случаях данные, используемые для оптимизации, оказываются неточными из-за неопределенности своих характеристик или обусловлены ошибками измерений. В промышленных приложениях моделей математического программирования почти всегда существуют неопределенные элементы, которые зачастую условно предполагаются несущественными для системы обслуживания или умалчиваются при формальном описании производственной ситуации [46].

В работе [47] исследования сосредоточены на производственной задаче, в которой длительности обслуживания требований являются заранее не определенными. В таких случаях специалистам, принимающим решение по составлению расписания, следует учитывать, в какой степени оптимальное расписание для детерминированной или стохастической модели будет эффективно реализовано при фактических длительностях обслуживания требований. В работе [47] рассматривалась задача составления устойчивого расписания, т. е. расписания, реализация которого слабо зависит от возможных значений длительностей обслуживания требований. Основное внимание было уделено задаче flow shop с двумя приборами и критерием быстродействия.

В работах [48, 49] показано, как можно сократить число активных расписаний при поиске оптимального по быстродействию расписания для систем job shop и open shop. Было введено в рассмотрение множество «несократимых» расписаний для задач $J//C_{max}$ и $O//C_{max}$. Для любых неотрицательных длительностей операций такое множество содержит, по крайней мере, одно оптимальное расписание. На основе вычислительных экспериментов на ЭВМ при $n \leq 3$ и $m \leq 7$ было показано, что только относительно малая доля активных расписаний является несократимой для задачи open shop и эта доля становится относительно меньшей, если размерность задачи возрастает. Проведенные эксперименты [48] продемонстрировали, что трудоемкость решения классической задачи job shop существенно зависит от мощности множества несократимых расписаний.

В работе [50] рассматривались меры устойчивости и методы составления устойчивого расписания для системы job shop, которое сохраняло бы приемлемое качество в некотором диапазоне допустимых возмущений системы. В работе [51] изучался критерий минимизации взвешенного запаздывания в системе job shop. Основной тезис статьи состоял в том, что «глобальная характеристика расписания определяется подмножеством уже принятых ранее решений по составлению расписания». Было предложено определять критическое подмножество решений в начале горизонта планирования и выбирать окончательное решение по составлению расписания в последующие моменты времени. Аналогичный подход используется в монографии [2].

Список литературы

1. Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы. – М.: Наука, 1989. – 328 с.
2. Сотсков Ю.Н., Сотскова Н.Ю. Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами. – Мн: ОИПИ НАН Беларуси, 2004. – 290 с.
3. Алюшкевич В.Б., Сотсков Ю.Н. Устойчивость в задачах календарного планирования // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1989. – № 3. – С. 102-107.
4. Сотсков Ю.Н. Устойчивость оптимального расписания выполнения множества операций // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1988. – № 6. – С. 99-104.
5. Сотсков Ю.Н., Алюшкевич В.Б. Устойчивость оптимальной ориентации ребер смешанного графа // Доклады НАН Беларуси. – 1988. – Т. 32. – № 2. – С. 108-111.
6. Сотсков Ю.Н. Использование устойчивости оптимальных расписаний для синтеза информационно-вычислительных сетей // Автоматика и вычислительная техника. – 1990. – № 3. – С. 12-19.
7. Sotskov Yu.N. Stability of an optimal schedule // European Journal of Operational Research. – 1991. – V. 55. – P. 91-102.
8. Sotskov Yu.N. The stability of high-speed optimal schedules // U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys. – 1989. – V. 29. – № 3. – P. 57-63.
9. Brasel H., Sotskov Yu.N., Werner F. Stability of a schedule minimizing mean flow time // Mathematical and Computer Modelling. – 1996. – V. 24. – № 10. – P. 39-53.
10. Optimal makespan schedule with given bounds of processing times / T.-C. Lai, Yu.N. Sotskov, N. Sotskova, F. Werner // Mathematical and Computer Modelling. – 1997. – V. 26. – № 3. – P. 67-86.
11. Sotskov Yu.N., Sotskova N., Werner F. Stability of an optimal schedule in a job shop // OMEGA – International Journal of Management Science. – 1997. – V. 25. – № 4. – P. 397-414.
12. Мельников О.И. Устойчивость оптимального расписания задачи Беллмана-Джонсона // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1978. – № 6. – С. 99-101.
13. Sotskova N. Optimal scheduling with uncertainty in the numerical data on the basis of a stability analysis. – Magdeburg: Faculty of Mathematics. Otto-von-Gericker-University, 2001. http: // diglib.uni-magdeburg.de/Dissertationen/2001/nadsotskova.pdf.
14. Сотсков Ю.Н., Шилак А.Н. Минимизация сетевой модели при заданных границах допустимых значений длительностей операций // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 2004. – № 6. – С. 99-104.
15. Сотскова Н.Ю., Танаев В.С. О реализации оптимального расписания в условиях неопределенности длительностей операций // Доклады НАН Беларуси. – 1998. – Т. 42. – № 5. – С. 8-12.
16. Кравченко С.А., Сотсков Ю.Н. Оптимальное по быстродействию расписание с бесконечным радиусом устойчивости // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1993. – №. 4. – С. 85-91.
17. Kravchenko S.A., Sotskov Yu.N., Werner F. Optimal schedules with infinitely large stability radius // Optimization. – 1995. – V. 33. – P. 271-280.
18. Stability of Johnson's schedule with respect to limited machine availability / O. Braun, T.-C. Lai, G. Schmidt, Yu.N. Sotskov // International Journal of Production Research. – 2002. – V. 40. – № 17. – P. 4381-4400.

19. Sotskov Yu.N., Wagelmans A.P.M., Werner F. On the calculation of the stability radius of an optimal or an approximate schedule // Annals of Operations Research. – 1998. – V. 83. – P. 213-252.

20. Sotskov Yu.N., Tanaev V.S., Werner F. Stability radius of an optimal schedule: A survey and recent developments // Industrial Applications of Combinatorial Optimization. V. 16. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998. – P. 72-108.

21. Mean flow time minimization with given bounds of processing times / T.-C. Lai, Yu.N. Sotskov, N. Sotskova, F. Werner // European Journal of Operational Research. – 2004. – V. 33. – № 159. – P. 558-573.

22. Ковалев М.Я., Сотсков Ю.Н., Устойчивость ε-приближенных решений булевых задач минимизации линейной формы // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1990. – № 2. – С. 111-116.

23. Sotskov Yu.N. The stability of the approximate Boolean minimization of a linear form // U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys. – 1993. – V. 33. – № 5. – P. 699-707.

24. Sotskov Yu.N., Dolgui A., Portmann M.-C. Stability analysis of optimal balance for assembly line with fixed cycle time // European Journal of Operational Research. – 2004.

25. Sotskov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.N. Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Applied Mathematics. – 1995. – V. 58. – P. 169-190.

26. Леонтьев В.К. Устойчивость задачи коммивояжера // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. – Т. 15. – № 5. – С. 1293–1309.

27. Gordeev E.N. Algorithms of polynomial complexity for computing the stability radius in two classes of trajectory problems // U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. – 1987. – V. 27. – № 4. – P. 14-20.

28. Гордеев Э.Н. Об устойчивости задач на узкие места // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33. – № 9. – P. 1391-1402.

29. Gordeev E.N., Leontev V.K., Sigal I.Ch. Computational algorithms for finding stability radius in choice problems // U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. – 1983. – V. 23. – № 4. – P. 128-132.

30. Stability of a vector problem of integer programming / V.A. Emelichev, E. Girlih, Yu.V. Nikulin, D.P. Podkopaev // Optimization. – 2002. – V. 51. – № 4. – P. 645-676.

31. Jones C.V. The stability of solution to the Euclidean traveling salesman problem. Part I, II: Experimental results // Technical report. – 1997. http://www.chesapeake2.com/cvj/tsp.

32. Libura M. On accuracy of solutions for discrete optimization problems with perturbed coefficients of the objective function // Annals of Operations Research. – 1999. – V. 86. – P. 53-62.

33. Chakravarti N., Wagelmans A.P.M. Calculation of stability radii for combinatorial optimization problems // Operations Research Letters. – 1998. – V. 23. – № 1. – P. 1-7.

34. Blair C.E. Sensitivity analysis for knapsack problems: A negative results // Discrete Applied Mathematics. – 1998. – V. 81. – № 1–3. – P. 133-139.

35. Woeginger G.J., Sensitivity analysis for knapsack problems: Another negative result // Discrete Applied Mathematics and Combinatorial Operations Research and Computer Science. – 1999. – V. 92. – № 2–3. – P. 247-251.

36. Ramaswamy R., Chakravarti N. Complexity of determining exact tolerances for min-sum and min-max combinatorial optimization problems // Technical Report WPS-247/95. – Calcutta: Indian Institute of Management, 1995.

37. Gordeev E.N. Solution stability of the shortest path problem // Discrete Mathematics. – 1989. – V. 1. – № 3. – P. 45-56.

38. Van Hoesel S., Wagelmans A. On the complexity of postoptimality analysis of 0/1 programs // Discrete Applied Mathematics. – 1999. – V. 91. – P. 251-263.

39. Stability aspects of the traveling salesman problem based on k-best solutions / M. Libura, E.S. van der Poort, G. Sierksma, J.A.A. van der Veen // Discrete Applied Mathematics. – 1998. – V. 87. – P. 159-185.

40. Libura M. Optimality conditions and sensitivity analysis for combinatorial optimization problems // Control and Cybernetics. – 1996. – V. 25. – № 6. – P. 1165-1180.

41. Van Hoesel S., Wagelmans A. Sensitivity analysis of the economic lot-sizing problem // Discrete Applied Mathematics. – 1993. – V. 45. – № 3. – P. 291-312.

42. Емеличев В.А., Гирлих Э., Янушкевич О.А. Лексикографические оптимумы многокритериальной задачи // Дискретный анализ и исследование операций. – 1997. – Т. 4. – № 2. – С. 3-14.

43. Greenberg H.J. A bibliography for the development of an intelligent mathematical programming system // Annals of Operations Research. – 1996. – V. 65. – P. 55-90. http://orcs.bus.okstate.edu/itorms.

44. Sensitivity analysis of list scheduling algorithms / A.W.H. Kolen, A.H.G. Rinnooy Kan, C.P.M. van Hoesel, A.P.M. Wagelmans // Discrete Applied Mathematics. – 1994. – V. 55. – P. 145-162.

45. Wagelmans A.P.M. Sensitivity analysis in combinatorial optimization // PhD thesis. – Econometric Institute, Erasmus University. The Netherlands, 1990.

46. Wagner H.M. Global sensitivity analysis // Operations Research. – 1995. – V. 43. – P. 948-969.

47. Kouvelis P., Daniels R.L., Vairaktarakis G. Robust scheduling of a two-machine flow shop with uncertain processing times // IIE Transactions. – 2000. – V. 32. – P. 421-432.

48. Brasel H., Harboth M., Tautenhahn T. On the hardness of the classical job shop problem // Annals of Operations Research. – 1999. – V. 92. – P. 265-279.

49. Brasel H., Harboth M., Tautenhahn T. On the set of solutions of the open shop problem // Annals of Operations Research. – 1999. – V. 92. – P. 241-263.

50. Leon V.J., Wu S.D., Storer R.H. Robustness measures and robust scheduling for job shops // IIE Transactions. – 1994. – V. 26. – P. 32-43.

51. Wu S.D., Byeon E.-S., Storer R.H. A graph-theoretic decomposition of the job shop scheduling problem to achieve scheduling robustness // Operations Research. – 1999. – V. 47. – № 1. – P. 241-263.

Поступила 15.11.04

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: sotskov@newman.bas-net.by

Yu. N. Sotskov

INVESTIGATION OF OPTIMAL SCHEDULE STABILITY

The paper is the survey of recent results in the research of stability analysis of general shop, job shop and flow shop scheduling problems. The main point of the paper is the stability radius of an optimal schedule. Several concepts of stability analysis in combinatory optimization are also discussed in brief.