

УДК 519.8

В.С. Гордон, М.Я. Ковалев, Я.М. Шафранский

ПОСТРОЕНИЕ РАСПИСАНИЙ ДЛЯ ОДНОСТАДИЙНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Приведен обзор результатов, полученных в лаборатории математической кибернетики ОИПИ НАН наук Беларуси по решению задач теории расписаний для одностадийных детерминированных систем обслуживания.

Введение

Теория расписаний является одним из разделов исследования операций. Изучаемые в рамках этой теории модели описывают специфические ситуации, возникающие при календарном планировании различных видов целенаправленной деятельности человека. При этом рассматриваются такие типичные для исследования операций вопросы, как построение и проверка адекватности разного рода моделей, выбор подходящих критериев и исследование их взаимосвязей, формирование правил предпочтения и т. п. Однако основной объем проводимых исследований связан с изучением разнообразных математических моделей и разработкой методов решения соответствующих оптимизационных задач, и под термином «теория расписаний» понимается именно эта ее математическая составляющая.

В Беларуси исследования в области теории расписаний начались в конце 1950-х гг. в Институте математики АН БССР по инициативе и под руководством академика Д.А. Супруненко. В дальнейшем под руководством академика В.С. Танаева в Институте технической кибернетики АН БССР сформировалась научная школа по теории расписаний, получившая широкое признание как у нас в стране, так и за рубежом. В 1975 г. в издательстве «Наука» (Москва) была опубликована первая в Советском Союзе и одна из первых в мире монография по теории расписаний [1]. В 1984 г. в этом же издательстве вышла первая часть фундаментальной монографии в данной области [2], а в 1989 г. – вторая часть [3]. В 1994 г. переработанные и дополненные варианты этих двух книг в переводе на английский язык опубликовало одно из крупнейших издательств научной литературы «Kluwer Academic Publishers» (Dordrecht – Boston – London) [4, 5]. В 1998 и 2004 гг. опубликованы монографии по проблемам теории расписаний для систем с групповыми технологиями [6] и с неопределенными параметрами [7]. В 2004 г. в США опубликована монография [8], посвященная современному состоянию исследований в области теории расписаний, в которой, в частности, отражены результаты, полученные в минской научной школе по теории расписаний.

1. Основные понятия

Рассматриваемые в теории расписаний математические модели и соответствующие оптимизационные задачи обычно формулируются в терминах обслуживания требований в системе, состоящей из одного либо нескольких обслуживающих приборов и располагающей определенным набором ресурсов. Количество каждого ресурса обычно ограничено. При создании моделей под термином «требования» могут подразумеваться обрабатываемые детали, вычислительные программы, транспортные средства и т. п.; соответственно под «приборами» подразумеваются станки, вычислительные машины, участки дорог и т. п.

Требованию сопоставляется некоторое множество приборов, каждый из которых может или должен обслуживать данное требование. Если каждое требование может быть полностью обслужено любым из этих приборов, то обслуживающая система называется одностадийной (с одним или несколькими параллельными приборами). Параллельные приборы могут быть идентичными (если длительности обслуживания каждого требования одинаковы на различных приборах), иметь заданные скорости обслуживания (однотипные приборы) или, в общем случае,

быть различными (если длительность обслуживания определяется как требованием, так и прибором). Каждому требованию, кроме длительности обслуживания, сопоставляются, как правило, несколько величин: момент готовности к обслуживанию, директивный срок, к которому процесс обслуживания требования должен быть завершен, весовой коэффициент, характеризующий степень срочности обслуживания или важность требования и др. Обслуживание требования прибором может протекать непрерывно либо с прерываниями.

Построить расписание означает тем или иным способом указать для каждой пары «требование – прибор» интервал времени, в котором этот прибор обслуживает данное требование. Каждой такой паре и временному интервалу должно быть сопоставлено определенное количество одного либо нескольких видов ресурсов. При этом необходимо соблюсти ряд ограничений. Прибор не может обслуживать два и более требований одновременно, количество назначенных ресурсов не должно превышать их имеющийся объем, на множестве требований может быть задано отношение частичного порядка, которое нельзя нарушать, и т. п.

Интерес обычно представляет построение лишь тех расписаний, которые являются оптимальными относительно того или иного критерия. Критерием может быть минимизация общего времени обслуживания всех требований, суммарных затрат, суммарного либо максимального отклонения завершения обслуживания требований от заданных директивных сроков и т. п.

Как правило, любая задача теории расписаний (как и большинство других задач комбинаторной оптимизации) может быть решена путем перебора конечного числа вариантов (расписаний). Трудность заключается в том, что реально осуществить этот перебор невозможно из-за чрезвычайно большого числа таких вариантов. Поэтому, когда говорят о решении той или иной задачи, то имеют в виду разработку достаточно быстрого метода ее решения. В настоящее время под быстрыми (эффективными) принято понимать методы и алгоритмы, время работы которых ограничено некоторым полиномом от размерности задачи (т. е. от числа требований n , числа приборов m и других параметров ее описания). При этом обычно имеются в виду полиномы низких степеней (не выше третьей – четвертой). С начала 1970-х гг. получила развитие теория вычислительной сложности комбинаторных задач, в рамках которой все задачи условно подразделяются на два класса: полиномиально разрешимые и NP-трудные. В соответствии с принятой (хотя и не доказанной до сих пор) гипотезой ни одна из NP-трудных задач не может иметь полиномиального алгоритма решения. NP-трудность задачи является одной из важных ее характеристик, поскольку, установив, что задача является NP-трудной, можно не тратить усилия на бесплодный поиск полиномиальных алгоритмов получения ее точного решения. Целесообразнее заняться построением, например, приближенных методов решения. Под приближенными далее понимаются методы, обеспечивающие получение решения, относительная погрешность которого (по целевому функционалу) не превосходит либо некоторой фиксированной и априори вычисляемой величины, либо задаваемого пользователем числа $\varepsilon > 0$ (ε -приближенные методы и алгоритмы). Определенный теоретический интерес представляет также выявление специальных полиномиально разрешимых случаев NP-трудных задач.

2. Максимальная и суммарная стоимость, запаздывание в обслуживании

В работах [9 – 11] предложены полиномиальные алгоритмы решения задачи минимизации максимальной стоимости обслуживания одновременно поступающих требований одним прибором при разрешении прерываний процесса обслуживания и задании на множестве требований отношения порядка. Если на множестве требований задано произвольное отношение предшествования, то сложность соответствующего алгоритма $O(n^2)$. Для древовидного частичного порядка предложенный алгоритм имеет оценку сложности $O(n \log n)$. Установлены некоторые полиномиально разрешимые случаи задачи минимизации максимальной стоимости для одного прибора при одновременном поступлении требований и запрещении прерываний.

Предложен полилогарифмический параллельный алгоритм решения задачи минимизации максимальной стоимости для функций специального вида, использующий полиномиальное число параллельных процессоров [12, 13]. К задачам с такими функциями относятся, в частности, задачи минимизации максимального временного смещения относительно директивных сроков, максимального запаздывания, а также построения расписаний, не нарушающих задан-

ные директивные сроки. Анализ результатов по распараллеливанию алгоритмов построения оптимальных расписаний приведен в обзорах [14, 15].

Выделен ряд полиномиально разрешимых частных случаев задачи минимизации взвешенного числа запаздывающих требований при обслуживании их одним прибором для согласованных моментов поступления, весовых коэффициентов и директивных сроков, а также вложенных интервалов обслуживания и разработаны соответствующие алгоритмы [16–18]. Результаты обобщены для случая, когда некоторое подмножество требований должно быть обслужено без нарушения директивных сроков [19 – 24].

Установлена NP-трудность в сильном смысле задачи минимизации числа запаздывающих требований в системе с параллельными идентичными приборами при обслуживании неодновременно поступающих идентичных требований [25], а также задачи минимизации взвешенного числа запаздывающих идентичных требований в системе с параллельными идентичными приборами при разрешении прерываний [26].

Для задачи минимизации суммы моментов завершения обслуживания неодновременно поступающих требований при разрешении прерываний установлена ее NP-трудность в сильном смысле в случае, когда требования имеют различные длительности обслуживания, и полиномиальная разрешимость – в случае одинаковых длительностей [27].

Для систем с параллельными идентичными приборами установлены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых все требования можно обслужить в заданные директивные сроки [28, 29]. Получены достаточные условия существования оптимального расписания без прерываний процесса обслуживания требований или с прерываниями только в моменты их поступления [30, 31].

В [32] рассмотрена двухкритериальная задача построения расписания обслуживания требований единичной длительности в системе из параллельных приборов разной производительности. Предложены алгоритмы построения множества Парето. В случае, когда оба критерия – максимальная стоимость, сложность алгоритма $O(n^4)$, а в случае, когда один критерий – максимальная стоимость, а второй – сумма функций стоимости, сложность алгоритма $O(n^5)$.

3. Вполне полиномиальные ε -приближенные алгоритмы

Приближенный алгоритм решения задачи оптимизации называется вполне полиномиальным ε -приближенным, если он гарантирует построение решения с любой наперед заданной относительной погрешностью ε за время, полиномиальное от размерности задачи и величины $1/\varepsilon$.

Общие схемы построения вполне полиномиальных ε -приближенных алгоритмов предложены в [33–37]. Такие алгоритмы разработаны для перечисленных ниже NP-трудных задач.

Один прибор. Целевые функции: взвешенное число запаздывающих требований, суммарная взвешенная стоимость работы по обслуживанию запаздывающих требований, суммарная стоимость потребляемых ресурсов при зависящих от дискретного ресурса длительностях обслуживания требований, общий момент завершения обслуживания при зависящих от времени начала длительностях обслуживания требований, суммарное взвешенное отклонение моментов завершения обслуживания требований от директивных сроков, среднее квадратичное отклонение моментов завершения обслуживания требований от среднего момента завершения их обслуживания. Для этих задач разработаны алгоритмы временной сложности $O(n^2 \log n + n^2/\varepsilon)$ [38], $O(n^3 \log n + n^3/\varepsilon)$ [39], $O(n^3 \log n + n^3/\varepsilon^2)$ [40], $O(n^5 L^4/\varepsilon^3)$ [41], $O(n^2 L^3/\varepsilon^2)$ [42] и $O(n^2/\varepsilon)$ [43] соответственно. Здесь L – логарифм от максимального значения числовых параметров требований. Алгоритмы построения ε -аппроксимации множества Парето для ряда двухкритериальных задач предложены в [44, 45].

Идентичные приборы. Для задач минимизации момента завершения обслуживания всех требований, максимального запаздывания, суммарного запаздывания, взвешенной суммы моментов завершения обслуживания, суммы квадратов моментов освобождения приборов разработаны алгоритмы сложности $O(n^m/\varepsilon^{m-1})$ [46], $O(n^m/\varepsilon^{m-1})$ [47], $O(n^{m+1}/\varepsilon^m)$ [48, 49] и $O(n^m/\varepsilon^m)$ [50] соответственно.

В [51] предложены полиномиальные алгоритмы построения ε -аппроксимации множества Парето для двухкритериальной задачи, где один из критериев – максимальная стоимость. В за-

дачах рассматриваемого класса длительность обслуживания каждого требования i не фиксирована, а выбирается из интервала $[a_i, b_i]$. Вторым критерий – сумма линейных функций, каждая из которых возрастает с уменьшением длительности обслуживания соответствующего требования. Рассмотрены ситуации, когда обслуживающая система состоит из единственного прибора и на множестве требований задано отношение строгого порядка и когда имеется несколько параллельных приборов, требования доступны неодновременно и разрешены прерывания.

Обзоры результатов в области построения приближенных алгоритмов для задач теории расписаний приведены в [4, 52].

4. Назначение директивных сроков

Обычно сроки выполнения работ устанавливает заказчик (заданные директивные сроки). Но нередко ситуации, когда компания-исполнитель сама предлагает клиенту свои директивные сроки исходя из объема работ и имеющихся ресурсов. Предлагая большой директивный срок, компания рискует потерять доверие клиента либо проиграть своим конкурентам. В таком случае, наряду с задачей поиска наилучшего расписания обслуживания требований, возникает необходимость выбора компромиссных директивных сроков. Исследованы задачи построения оптимальных расписаний для систем обслуживания с одним прибором, в которых директивные сроки завершения обслуживания требований не являются априори заданными, а определяются параметрами, подлежащими выбору в процессе решения задачи по различным правилам (SLK, TWK, PPW и пр.) [53–65]. Предложены полиномиальные алгоритмы решения задач, в целевую функцию которых входят как указанные параметры, так и максимальное запаздывание относительно директивных сроков (требования поступают на обслуживание неодновременно, разрешены прерывания процесса обслуживания и задан частичный порядок на множестве требований) [53–55]. Для задачи минимизации целевой функции, не убывающей относительно опережений по сравнению с директивными сроками и относительно величины этих сроков, назначенных по правилу SLK, предложена общая схема решения при заданном частичном порядке на множестве требований. Для минимизации суммарного штрафа с линейными или экспоненциальными функциями штрафа при последовательно-параллельном частичном порядке получены полиномиальные алгоритмы [56, 57]. Установлена NP-трудность задачи минимизации взвешенного числа запаздывающих требований с ограничением на общее время их обслуживания при назначении моментов поступления и директивных сроков в зависимости от позиций в последовательности обслуживания требований и найдены полиномиально разрешимые ее случаи [58]. Для задач минимизации суммарного штрафа за опережение и запаздывание в обслуживании установлена NP-трудность при назначении общего директивного срока для неодновременно поступающих требований [59] и при назначении директивных сроков по правилу TWK [60], найдены полиномиально разрешимые случаи этих задач [59, 60]. Для правила PPW в [61] доказана NP-трудность в сильном смысле задачи минимизации модуля отклонения моментов завершения обслуживания требований от директивных сроков в случае параллельных идентичных приборов; для одного прибора разработан алгоритм решения этой задачи сложности $O(n \log n)$. Анализ результатов по решению задач с назначаемыми общими директивными сроками приведен в [62], а для задач с назначением директивных сроков по другим правилам (в зависимости от длительности обслуживания и других параметров) – в работах [63–65].

5. Обслуживание требований партиями

Для современного производства характерно обслуживание схожих требований партиями с целью уменьшения затрат на переналадку при переходе от обслуживания требований одного типа к требованиям другого типа. Предположим, что множество требований изначально разбито на несколько семейств, где каждое семейство содержит требования одного типа.

Ряд задач построения оптимальных расписаний при групповой технологии обслуживания, когда требования каждого семейства всегда образуют одну партию, исследован в [66–70].

Различают две модели завершения обслуживания требования некоторой партии прибором: (А) обслуживание требования завершается в момент, когда прибор прекращает работу по

его обслуживанию, и (В) обслуживание завершается в момент, когда прибор прекращает работу по обслуживанию последнего требования партии.

Результаты для модели А получены в работах [71–84]. Задачи для модели В условно разделяются на два класса – (В₁) и (В₂), в которых длительность обслуживания партии равна соответственно сумме и максимуму длительностей обслуживания составляющих ее требований. Модель В₁ исследована в работах [85–92], а модель В₂ – в [93].

Построению оптимальных расписаний обслуживания требований партиями посвящены работа [94] и монография [6]. В [6] проведена унификация существующей терминологии, разработана система обозначений. Задачи проклассифицированы с точки зрения существующих типов обслуживаемых систем, проведен анализ их вычислительной сложности, описаны наиболее распространенные и эффективные методы решения и подходы к доказательству NP-трудности.

6. Приоритето-порождающие функционалы

Многие задачи теории расписаний естественным образом формулируются в терминах минимизации того или иного функционала на множестве перестановок конечного числа элементов. В зависимости от характера задачи рассматриваемое множество перестановок включает либо все перестановки (простейший случай), либо некоторое их подмножество, определяемое характером ограничений, которым должны удовлетворять расписания. К таким ограничениям относятся, прежде всего, отношение строгого порядка, заданное на множестве требований, и заданное разбиение требований на партии.

Введенное в [95] понятие приоритето-порождающего функционала позволило разработать единый подход к решению многих разнородных задач теории расписаний. В частности, к таким задачам относится минимизация следующих функций при обслуживании требований одним прибором [2, 4]: взвешенная сумма моментов завершения обслуживания, взвешенная сумма экспонент от моментов завершения обслуживания, общая длительность обслуживания требований в ситуации, когда длительность линейно зависит от момента начала обслуживания требования, максимальное запаздывание и максимальное смещение относительно заданных директивных сроков. В терминах минимизации приоритето-порождающих функционалов формулируются и некоторые задачи для многостадийных систем обслуживания, например известная задача Беллмана-Джонсона для двух приборов. Результаты, связанные с минимизацией приоритето-порождающих функционалов, вообще говоря, выходят за рамки теории расписаний, поскольку многие известные задачи дискретной оптимизации, такие, как линейная укладка ориентированного графа, минимизация линейной формы на специальных множествах перестановок и др., формулируются в соответствующих терминах.

Каждый приоритето-порождающий функционал обладает так называемым функционалом приоритета, играющим ключевую роль в алгоритмах решения соответствующих задач. Например, для получения решения задачи минимизации приоритето-порождающего функционала на множестве всех перестановок достаточно упорядочить элементы (требования) по невозрастающей соответствующих им значений функционала приоритета. Для различных приоритето-порождающих функционалов функционалы приоритета построены в работах [96–99]. Первые результаты по минимизации произвольного приоритето-порождающего функционала получены для ситуаций, когда соответствующее множество перестановок образовано перестановками, допустимыми относительно определенного на множестве требований строгого порядка. В случае, когда граф отношения порядка является древовидным, алгоритм сложности $O(n^2)$ предложен в [95], для последовательно-параллельных графов порядка алгоритм той же сложности предложен в [100, 101]. Позднее разработан общий подход, основанный на использовании специальных преобразований графа отношения порядка, позволивший построить для указанных ситуаций алгоритмы сложности $O(n \log n)$ [102, 103]. На этих же преобразованиях построен и так называемый D -алгоритм сложности $O(n^2)$, предназначенный для работы с произвольными графами отношения порядка [2, 4, 104]. Отметим, что в последнем случае задача является NP-трудной, а D -алгоритм сужает область поиска минимума, гарантируя, что, по крайней мере, в случае ω -последовательно-параллельного графа (обобщение последовательно-параллельного

графа) будет найдена оптимальная перестановка. Необходимые и достаточные условия сходимости D -алгоритма (т.е. условия, при которых D -алгоритм гарантирует получение оптимальной перестановки) установлены в [105]. В [106] предложен метод построения множества всех оптимальных перестановок при наличии отношения порядка на множестве требований. В случае, когда граф отношения предшествования является последовательно-параллельным, соответствующий алгоритм имеет сложность $O(n^2)$.

В [69] введено понятие векторного приоритето-порождающего функционала и получены достаточные условия, при которых векторный функционал является приоритето-порождающим. Предложен $O(n^2)$ алгоритм минимизации векторного приоритето-порождающего функционала на множестве перестановок, являющихся допустимыми как относительно заданного строгого порядка (представимого последовательно-параллельным графом), так и относительно заданного группирования требований. На основании предложенного подхода разработаны алгоритмы решения ряда многокритериальных задач с упорядоченными по важности критериями.

7. Системы с сервером

Наряду с обычными приборами в состав обслуживающей системы нередко входит так называемый сервер, который служит для наладки основных приборов либо для управления ими. В роли сервера могут выступать как техническое устройство, так и человек-оператор.

В работе [107] рассмотрены задачи для систем, в которых сервер используется для наладки параллельных идентичных приборов. Предложены полиномиальные алгоритмы для ряда задач, в которых длительности обслуживания всех требований – единичные или одинаковые, а целевые функции – сумма (взвешенная сумма) моментов завершения обслуживания требований, число запаздывающих требований, сумма весов запаздывающих требований, суммарное и суммарное взвешенное запаздывания и др. Установлена NP-трудность ряда задач для систем с двумя приборами и перечисленными критериями. В работе [108] рассмотрены системы с различными параллельными приборами, в которых сервер используется для наладки основных приборов, а требования заранее распределены по приборам. Установлена NP-трудность задач построения оптимального по быстродействию расписания для системы из двух приборов, где либо длительности всех переналадок, либо длительности обслуживания всех требований – единичные. Для общего случая предложены полиномиальные приближенные алгоритмы с гарантированной точностью решения. Ситуация, когда каждое требование должно быть обслужено двумя последовательными приборами и наличие сервера необходимо на каждой стадии обслуживания (сервер используется в качестве управляющего прибора), исследована в [109]. Проведена классификация вычислительной сложности задач минимизации различных целевых функционалов, разработаны полиномиальные и псевдополиномиальные алгоритмы решения.

Заключение

Исследования проблем построения оптимальных расписаний для одностадийных систем обслуживания, проведенные в ОИПИ НАН Беларуси, составили существенную часть цикла работ по теории расписаний, который в 1998 г. был удостоен Государственной премии Республики Беларусь в области естественных наук. Ряд результатов получен в ходе совместных исследований с учеными Великобритании, Германии, Китая, Канады, Франции и других стран, часть этих исследований выполнена в рамках международных проектов ИНТАС и МНТЦ. Результаты были представлены на многочисленных научных форумах европейского и мирового уровня.

Список литературы

1. Танаев В.С., Шкурба В.В. Введение в теорию расписаний. – М.: Наука, 1975. – 256 с.
2. Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М. Теория расписаний. Одностадийные системы. – М.: Наука, 1984. – 382 с.
3. Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы. – М.: Наука, 1989. – 328 с.

4. Tanaev V.S., Gordon V.S., Shafransky Y.M. *Scheduling Theory. Single-Stage Systems.* – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publ., 1994. – 380 p.
5. Tanaev V.S., Sotskov Y.N., Strusevich V.A. *Scheduling Theory. Multi-Stage Systems.* – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publ., 1994. – 404 p.
6. Танаев В.С., Ковалев М.Я., Шафранский Я.М. *Теория расписаний. Групповые технологии.* – Мн.: Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 1998. – 290 с.
7. Сотсков Ю.Н., Сотскова Н.Ю. *Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами.* – Мн.: ОИПИ НАН Беларуси, 2004. – 290 с.
8. *Handbook of Scheduling: Algorithms, Models and Performance Analysis.* – USA, Boca Raton: CRC Press, 2004. – 1120 p.
9. Гордон В.С. Об оптимальных расписаниях с прерываниями процесса обслуживания // *Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.* – 1974. – № 5. – С. 129-130.
10. Гордон В.С. Детерминированная система обслуживания с минимаксным критерием оптимальности и частично упорядоченным множеством требований // *Автоматизация технической подготовки производства.* – 1977. – Вып. 4. – С. 70-75.
11. Гордон В.С., Танаев В.С. О минимаксных задачах теории расписаний с одним прибором // *Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.* – 1983. – № 3. – С. 3-9.
12. Гордон В.С. Параллельный алгоритм минимизации максимального штрафа за обслуживание требований одним прибором // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика.* – 1989. – № 3. – С. 181-186.
13. Azharonok E., Gordon V., Werner F. Single machine preemptive scheduling with special cost functions // *Optimization.* – 1995. – V. 34. – P. 1211-1216.
14. Гордон В.С. Параллельные алгоритмы решения задач теории расписаний // *Автоматика и телемеханика.* – 1992. – № 5. – С. 97-106.
15. Гордон В.С., Зяцьков Е.А. *Параллельные вычисления в задачах теории расписаний.* – Мн.: Ин-т техн. кибернетики АН Беларуси, 1993. – 68 с.
16. Гордон В.С., Танаев В.С. Детерминированная система обслуживания с одним прибором и ступенчатыми функциями штрафа // *Вычислительная техника в машиностроении.* – Мн.: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1971, сент. – С. 3-8.
17. Танаев В.С., Гордон В.С. О построении расписаний с наименьшим взвешенным числом запаздывающих требований // *Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.* – 1983. – № 6. – С. 3-9.
18. Гордон В.С. Допустимые относительно директивных сроков расписания с наименьшим суммарным штрафом // *Оптимизация, принятие решений, микропроцессорные системы.* – София: Изд-во Болгарской академии наук, 1985. – С. 153-156.
19. Гордон В.С., Баранова Е.В. Об одной задаче минимизации суммарного штрафа за обслуживание требований одним прибором // *Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.* – 1984. – № 1. – С. 113.
20. Gordon V., Potapneva E., Werner F. Single machine scheduling with deadlines, release and due dates // *Optimization.* – 1997. – V. 42. – P. 219-244.
21. Гордон В.С., Потапнева Е.В. Построение расписаний для вложенных интервалов обслуживания требований // *Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 1998. – № 2. – С. 111-116.
22. Gordon V., Werner F., Yanushkevich O. *Scheduling with deadlines and nested processing intervals for a single machine* // *Operations Research Proceedings 1999.* – Berlin: Springer, 2000. – P. 378-382.
23. Гордон В.С., Вернер Ф., Янушкевич О.А. О задаче минимизации взвешенного числа запаздывающих требований с жесткими директивными сроками и вложенными интервалами обслуживания // *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* – 2000. – Т. 44. – № 1. – С. 39-42.
24. Gordon V., Werner F., Yanushkevich O. Single machine preemptive scheduling to minimize the weighted number of late jobs with deadlines and nested release/due date intervals // *RAIRO Operations Research.* – 2001. – V. 35. – P. 71-83.
25. Kravchenko S.A. On the complexity of minimizing the number of late jobs in unit time open shop // *Discrete Applied Mathematics.* – 2000. – V. 100. – P. 127-132.

26. Brucker P., Kravchenko S.A. Scheduling equal processing time jobs to minimize the weighted number of late jobs. – Osnabrück, 2004. – 24 p. (Preprints / Universität Osnabrück; Heft 254).
27. Brucker P., Kravchenko S.A. Complexity of mean flow time scheduling problems with release dates. – Osnabrück, 2004. – 24 p. (Preprints / Universität Osnabrück; Heft 251).
28. Гордон В.С. Детерминированные одностадийные системы обслуживания с прерываниями // Вычислительная техника в машиностроении. – Мн.: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1973, июнь. – С. 30-38.
29. Гордон В.С., Танаев В.С. Директивные сроки в однофазных детерминированных системах обслуживания // Оптимизация систем сбора, передачи и обработки аналоговой и дискретной информации в локальных ИВС. – Мн.: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1973. – С. 51-58.
30. Гордон В.С., Танаев В.С. Прерывания в детерминированных системах с параллельными приборами и одновременным поступлением требований на обслуживание // Оптимизация систем сбора, передачи и обработки аналоговой и дискретной информации в локальных ИВС. – Мн.: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1973. – С. 36-50.
31. Танаев В.С. Прерывания в детерминированных системах обслуживания с параллельными идентичными приборами // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1973. – № 6. – С. 44-48.
32. Tuzikov A., Makhaniok M., Männer R. Bicriterion scheduling of identical processing time jobs by uniform processors // Computers and Operations Research. – 1998. – V. 25. – № 1. – P. 31-35.
33. Ковалев М.Я. Эффективные ε -приближенные алгоритмы оптимизации мультипликативных функционалов // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1985. – № 4. – С. 13-20.
34. Ковалев М.Я., Шафранский Я.М. Построение ε -приближенных алгоритмов оптимизации функций на последовательно конструируемых множествах // ЖВМ и МФ. – 1986. – № 7. – С. 1006-1018.
35. Ковалев М.Я. Интервальные ε -приближенные алгоритмы для задач отыскания оптимального пути в графе // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1988. – № 2. – С. 15-20.
36. Kovalyov M.Y. A rounding technique to construct approximation algorithms for knapsack and partition type problems // Applied Mathematics and Computer Science. – 1996. – V. 6. – № 4. – P. 101-113.
37. Kovalyov M.Y. Improving the complexities of approximation algorithms for optimization problems // Operations Research Letters. – 1995. – V. 17. – P. 85-87.
38. Ковалев М.Я. Минимизация взвешенной суммы запаздывающих требований при обслуживании одним прибором // ЖВМ и МФ. – 1991. – Т. 31. – № 1. – С. 1731-1739.
39. Kovalyov M.Y., Potts C.N., Van Wassenhove L.N. A fully polynomial approximation scheme for scheduling a single machine to minimize total weighted late work // Mathematics of Operations Research. – 1994. – V. 19. – № 1. – P. 86-94.
40. Janiak A., Kovalyov M.Y. Single machine scheduling subject to deadlines and resource dependent processing times // European Journal of Operational Research. – 1996. – V. 94. – P. 284-291.
41. Kovalyov M.Y., Kubiak W. A fully polynomial approximation scheme for minimizing makespan of deteriorating jobs // Journal of Heuristics. – 1997. – V. 20. – P. 75-79.
42. Kovalyov M.Y., Kubiak W. A fully polynomial approximation scheme for the weighted earliness-tardiness problem // Operations Research. – 1999. – V. 47. – № 5. – P. 757-761.
43. Kubiak W., Cheng J., Kovalyov M.Y. Fast fully polynomial approximation schemes for minimizing completion time variance // European Journal of Operational Research. – 2002. – V. 137. – P. 303-309.
44. Ковалев М.Я., Тузиков А.В. Построение ε -аппроксимации множества Парето некоторых двухкритериальных задач // Математические вопросы автоматизации проектирования и испытаний. – Мн.: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1986. – С. 126-130.
45. Cheng T.C.E., Janiak A., Kovalyov M.Y. Bicriterion single machine scheduling with resource dependent processing times // SIAM Journal on Optimization. – 1998. – V. 8. – P. 617-630.
46. Ковалев М.Я. Построение ε -приближенных алгоритмов решения некоторых NP-трудных задач // Теория и методы автоматизации проектирования сложных систем и автоматизации научных исследований. – Мн.: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1985. – С. 15-18.

47. Ковалев М.Я. Построение ε -приближенного решения задачи обслуживания требований в заданные сроки // *Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.* – 1990. – № 1. – С. 88-92.
48. Ковалев М.Я. Приближенное решение задачи минимизации суммарного запаздывания требований // *Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.* – 1985. – № 5. – С. 110.
49. Kovalyov M.Y., Werner F. Approximation schemes for scheduling jobs with common due date to minimize total tardiness // *Journal of Heuristics.* – 2002. – V. 8. – P. 415-428.
50. Ковалев М.Я. ε -приближенный алгоритм решения задачи «минимум суммы квадратов» // *Сложность и методы решения задач оптимизации.* – Мн.: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1984. – С. 21-27.
51. Тузиков А.В. О двухкритериальной задаче теории расписаний с учетом изменения длительностей обслуживания // *ЖВМ и МФ.* – 1984. – № 10. – С. 1585-1590.
52. Approximation scheduling algorithms: a survey / M.Y. Kovalyov, Y.M. Shafransky, V.A. Strusevich et al. // *Optimization.* – 1989. – № 6. – P. 859-878.
53. Гордон В.С. Минимизация стоимости, связанной с переменными директивными сроками, в задаче теории расписаний с одним прибором // *Автоматика и телемеханика.* – 1992. – № 2. – С. 105-112.
54. Gordon V.S. A note on optimal assignment of slack due-dates in single-machine scheduling // *European Journal of Operational Research.* – 1993. – V. 70. – P. 311-315.
55. Cheng T.C.E., Gordon V.S. Optimal assignment of due-dates for preemptive single-machine scheduling // *Mathl. Comput. Modelling.* – 1994. – V. 20. – P. 33-40.
56. Gordon V.S., Strusevich V.A. Earliness penalties on a single machine subject to precedence constraints: SLK due date assignment // *Comp. Oper. Res.* – 1999. – V. 26. – P. 157-177.
57. Gordon V.S., Proth J.-M., Strusevich V. Single machine scheduling with precedence constraints and SLK due date assignment // *Operations Research Proceedings 2003.* – Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. – P. 157-163.
58. Gordon V.S., Kubiak W. Single machine scheduling with release and due date assignment to minimize the weighted number of late jobs // *Information Processing Letters.* – 1999. – V. 68. – № 3. – P. 153-159.
59. Cheng T.C.E., Chen Z-L., Shakhlevich N.V. Common due date assignment and scheduling with ready times // *Comp. Oper. Res.* – 2002. – V. 29. – P. 1957-1967.
60. Chu C., Gordon V. TWK due date determination and scheduling: NP-hardness and polynomially solvable case // *Int. J. Mathl. Algorithms.* – 2001. – V. 2. – P. 251-267.
61. Cheng T.C.E., Kovalyov M.Y. Complexity of parallel machine scheduling with processing-plus-wait due dates to minimize maximum absolute lateness // *European Journal of Operational Research.* – 1999. – V. 114. – № 2. – P. 403-410.
62. Gordon V.S., Proth J.-M., Chu C. A survey of the state-of-the-art of common due date assignment and scheduling // *European Journal of Operational Research.* – 2002. – V. 139. – P. 1-25.
63. Gordon V.S., Proth J.-M., Chu C. Due date assignment and scheduling: SLK, TWK and other due date assignment models // *Production Planning & Control.* – 2002. – V. 13. – P. 117-132.
64. Gordon V., Proth J.-M., Strusevich V. Scheduling with due date assignment // *Handbook of Scheduling: Algorithms, Models and Performance Analysis.* – Boca Raton: CRC Press, 2004. – P. 21-1– 21-22.
65. Гордон В.С., Смотряев В.Н., Тарасевич А.А. Построение оптимальных расписаний при назначении директивных сроков // *Информатика.* – 2004. – № 1. – С. 17-27.
66. Kovalyov M.Y., Tuzikov A.V. Sequencing groups of jobs on a single machine subject to precedence constraints // *Applied Mathematics and Computer Science.* – 1994. – V. 4. – P. 635-641.
67. Cheng T.C.E., Kovalyov M.Y., Tuzikov A.V. Single machine group scheduling with two ordered criteria // *Journal of the Operational Research Society.* – 1996. – V. 47. – P. 315-320.
68. Janiak A., Kovalyov M.Y. Single machine group scheduling with ordered criteria // *Annals of Operations Research.* – 1995. – V. 57. – P. 191-201.
69. Janiak A., Shafransky Y.M., Tuzikov A.V. Sequencing with ordered criteria, precedence and group technology constraints // *Informatica.* 2001. – V. 12. – № 1. – P. 61-88.
70. Blazewicz J., Kovalyov M.Y. Complexity of two group scheduling problems // *Journal of Scheduling.* – 2002. – V. 5. – P. 477-485.

71. Cheng T.C.E., Kovalyov M.Y. Single machine batch scheduling with deadlines and resource dependent processing times // *Operations Research Letters*. – 1995. – V. 17. – P. 243-249.
72. Brucker P., Kovalyov M.Y. Single machine batch scheduling to minimize the weighted number of late jobs // *Mathematical Methods of Operations Research*. – 1996. – V. 43. – P. 1-8.
73. Cheng T.C.E., Gordon V. S., Kovalyov M.Y. Single machine scheduling with batch deliveries // *European Journal of Operational Research*. – 1996. – V. 94. – P. 277-283.
74. Cheng T.C.E., Gordon V. Batch delivery scheduling on a single machine // *Journal of the Operational Research Society*. – 1994. – V. 45. – № 10. – P. 1211-1215.
75. Cheng T.C.E., Kovalyov M.Y., Lin B.M.T. Single machine scheduling to minimize batch delivery and job earliness penalties // *SIAM Journal on Optimization*. – 1997. – V. 7. – P. 547-559.
76. Parallel-machine batching and scheduling to minimize total completion time / T.C.E. Cheng, Z.-L. Chen, M.Y. Kovalyov, B.M.T. Lin // *IIE Transactions*. – 1996. – V. 28. – P. 953-956.
77. Cheng T.C.E., Kovalyov M.Y. Batch scheduling and common due date assignment on a single machine // *Discrete Applied Mathematics*. – 1996. – V. 70. – P. 231-245.
78. Kovalyov M.Y., Shafransky Y.M. Batch scheduling with deadlines on parallel machines: an NP-hard case // *Information Processing Letters*. – 1997. – V. 64. – P. 69-74.
79. Kovalyov M.Y. Batch scheduling and common due date assignment problem: an NP-hard case // *Discrete Applied Mathematics*. – 1997. – V. 80. – P. 251-254.
80. Parallel machine batch scheduling with deadlines and sequence-independent setup times / P. Brucker, M.Y. Kovalyov, Y.M. Shafransky, F. Werner // *Annals of Operations Research*. – 1998. – V. 83. – P. 23-40.
81. Pattloch M., Schmidt G., Kovalyov M.Y. Heuristic algorithms for lotsize scheduling with application in the tobacco industry // *Computers and Industrial Engineering*. – 2001. – V. 39. – P. 235-253.
82. Cheng T.C.E., Janiak A., Kovalyov M. Single machine batch scheduling with resource dependent setup and processing times // *European Journal of Operational Research*. – 2001. – V. 135. – P. 177-183.
83. Kovalyov M.Y., Pattloch M., Schmidt G. A polynomial algorithm for lot-size scheduling of two task types // *Information Processing Letters*. – 2002. – V. 83. – P. 229-235.
84. Cheng T.C.E., Liu Z., Shafransky Y.M. A note on the complexity of family scheduling to minimize the number of late jobs // *Journal of Scheduling*. – 2001. – V. 4. – P. 225-229.
85. Cheng T.C.E., Kovalyov M.Y. An exact algorithm for batching and scheduling two part types in a mixed shop: a technical note // *International Journal of Production Economics*. – 1998. – V. 55. – № 1. – P. 53-56.
86. Cheng T.C.E., Kovalyov M.Y. Parallel machine batching and scheduling with deadlines // *Journal of Scheduling*. – 2000. – V. 3. – P. 109-123.
87. Cheng T.C.E., Kovalyov M.Y. Single machine batch scheduling with sequential job processing // *IIE Transactions*. – 2001. – V. 33. – P. 413-420.
88. Cheng T.C.E., Kovalyov M.Y. Single supplier scheduling for multiple deliveries // *Annals of Operations Research*. – 2001. – V. 107. – P. 51-63.
89. Ng C.T., Cheng T.C.E., Kovalyov M. Batch scheduling with controllable setup and processing times to minimize total completion time // *Journal of the Operational Research Society*. – 2003. – V. 54. – P. 499-506.
90. Ng C.T., Cheng T.C.E., Kovalyov M.Y. Single machine batch scheduling with jointly compressible setup and processing times // *European Journal of Operational Research*. – 2003. – V. 153. – P. 211-219.
91. Kovalyov M.Y., Potts C.N., Strusevich V.A. Batching decisions for assembly production systems // *European Journal of Operational Research*. – 2004. – V. 157. – P. 620-642.
92. Cheng T.C.E., Kovalyov M.Y., Chakhlevitch K.N. Batching in a two-stage flowshop with dedicated machines in the second stage // *IIE Transactions*. – 2004. – V. 36. – P. 87-93.
93. Scheduling a batching machine / P. Brucker, A. Gladky, H. Hoogeveen et al. // *Journal of Scheduling*. – 1998. – V. 1. – P. 31-54.
94. Potts C.N., Kovalyov M.Y. Scheduling with batching: a review // *European Journal of Operational Research*. – 2000. – V. 120. – P. 228-249.

95. Шафранский Я.М. Оптимизация детерминированных систем обслуживания с древовидным частичным порядком // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1978. – № 2. – С. 119.
96. Танаев В.С. Некоторые оптимизируемые функции одностадийного производства // Доклады АН БССР. – 1965. – Т. IX. – № 1. – С. 11-14.
97. Гордон В.С., Танаев В.С. Детерминированные системы обслуживания с одним прибором, древовидным упорядочением требований и экспоненциальными функциями штрафа // Вычислительная техника в машиностроении. – Мн.: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1973, июнь. – С. 3-10.
98. Танаев В.С. К теории расписаний // Доклады АН БССР. – 1964. – Т. VIII. – № 12. – С. 792-794.
99. Шафранский Я.М. Об оптимальном упорядочении в детерминированных системах с древовидным частичным порядком обслуживания // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1978. – № 2. – С. 120.
100. Гордон В.С., Шафранский Я.М. Оптимальное упорядочение при последовательно-параллельных ограничениях предшествования // Доклады АН БССР. – 1978. – Т. XXII. – № 3. – С. 244-247.
101. Гордон В.С., Шафранский Я.М. Об оптимальном упорядочении при последовательно-параллельных ограничениях предшествования // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1978. – № 5. – С. 135.
102. Шафранский Я.М. О задаче минимизации функций на множестве перестановок частично упорядоченных элементов. // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – № 5. – I. – С. 132; 1982. – № 1. – II. – С. 113.
103. Шафранский Я.М. Об одном свойстве приоритето-порождающих функций // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1981. – № 6. – С. 15-18.
104. Шафранский Я.М. Об алгоритме отыскания минимума приоритето-порождающих функций на специальных множествах перестановок. I, II // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1982. – № 3. – С. 38-42; 1983. – № 1. – С. 15-20.
105. Ковалев М.Я. Область сходимости одного алгоритма минимизации приоритето-порождающих функционалов // Алгоритмы и программы решения задач оптимизации. – Мн.: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1983. – С. 21-35.
106. Shafransky Y.M., Tuzikov A.V. Construction of all optimal permutations under precedence constraints // Тр. Института математики НАН Беларуси. Дискретная математика. – 2001. – Т. 8. – С. 106-113.
107. Complexity results for parallel machine problems with a single server / P. Brucker, C. Dhaenens-Flipo, S.A. Kravchenko et al. // Journal of Scheduling. – 2002. – V. 5. – P. 429-457.
108. Glass C.A., Shafransky Y.M., Strusevich V.A. Scheduling for parallel dedicated machines with a single server // Naval Research Logistics. – 2000. – V. 47. – P. 304-328.
109. Cheng T.C.E., Kovalyov M.Y. Scheduling a single server in a two-machine flow shop // Computing. – 2003. – V. 70. – P. 167-180.

Поступила 15.11.04

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: gordon@newman.bas-net.by*

V.S. Gordon, M.Y. Kovalyov, Y.M. Shafransky

SCHEDULING FOR SINGLE-STAGE SYSTEMS

The paper gives the results of the research in the Laboratory of Mathematical Cybernetics of the United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus, in the field of scheduling for single-stage deterministic systems.