ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING

УДК 517.958:537.8

Поступила в редакцию 04.03.2019
Received 04.03.2019

Принята к публикации 01.04.2019
Accepted 01.04.2019

Математическая модель экранирования монохроматических электромагнитных полей плоскими экранами из пермаллоя

В. Т. Ерофеенко

Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики и информатики», Минск, Беларусь
E-mail: bsu_erofeenko@tut.by

Аннотация. Разработана методика решения краевой задачи проникновения плоских монохроматических электромагнитных полей через плоский однослойный экран, выполненный из пермаллоя. Постановка краевой задачи экранирования основывается на применении уравнений Максвелла и дополнительного нелинейного дифференциального уравнения для поля намагниченности, характеризующего пермаллой. Используются классические граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих полей и дополнительные дифференциальные граничные условия для поля намагниченности на лицевых поверхностях экрана. Для упрощения решения задачи в результате исключения величин второго порядка малости, входящих в нелинейное уравнение, нелинейная задача преобразована в линейную. Построены корни (волновые числа) дисперсионного алгебраического уравнения четвертого порядка, которые характеризуют электромагнитные поля в слое из пермаллоя. Построена полная система четырех прямых и четырех обратных электромагнитных волн, распространяющихся в противоположных направлениях в слое пермаллоя. Получены двухсторонние граничные условия, связывающие электромагнитные поля по обе стороны экрана. Выполнено аналитическое решение краевой задачи с двухсторонними граничными условиями. Аналитически вычислены амплитуды отраженного и прошедшего через экран плоских электромагнитных полей.

Ключевые слова: математические модели, двухсторонние граничные условия, краевая задача, задача экранирования, поле намагниченности, дисперсионное уравнение, плоские электромагнитные волны, пермаллой, аналитическое моделирование, экран

Для цитирования. Ерофеенко, В. Т. Математическая модель экранирования монохроматических электромагнитных полей плоскими экранами из пермаллоя / В. Т. Ерофеенко // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 2. – С. 7–18.

Mathematical model of shielding monochromatic electromagnetic fields by means of plane screens made of permalloy

Viktor T. Erofeenko

Establishment of the Belarusian State University "Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics", Minsk, Belarus
E-mail: bsu_erofeenko@tut.by

Abstract. A method for solving a boundary-value problem of penetration of plane monochromatic electromagnetic fields through the plane screen made of permalloy is developed. Setting the boundary-value problem is based on the use of differential Maxwell equations and complementary nonlinear differential equation for the field of magnetization, characterizing permalloy. The classical boundary conditions of continuity of the tangential components of the fields and complementary boundary conditions for the field of magnetization on the front surfaces of the screen are used. To simplify the solution of the boundary-value problem as a result of exclusion of the values of the second infinitesimal order, included in nonlinear equation, the nonlinear task is transformed into linear one. The roots (wave numbers) of dispersion algebraic equation of a fourth-order, characterizing the electromagnetic fields in the layer made of permalloy, are constructed. A complete system of four forward and four backward counter-propagating electromagnetic waves in the permalloy layer is formed. The two-sided boundary conditions connecting electromagnetic fields on both sides of the screen are obtained. An analytical solution of the boundary-value problem with two-sided boundary conditions is performed. The amplitudes of reflected and transmitted through the screen electromagnetic fields are analytically calculated.

Keywords: mathematical models, two-sided boundary conditions, boundary-value problem, shielding task, field of magnetization, dispersing equation, plane electromagnetic waves, permalloy, analytical modeling, screen

For citation. Erofeenko V. T. Mathematical model of shielding monochromatic electromagnetic fields by means of plane screens made of permalloy. *Informatics,* 2019, vol. 16, no. 2, pp. 7–18 (in Russian).

Введение. Разработка математических методов моделирования распространения излучений электромагнитных волн в композитных материалах является актуальным направлением исследований в математической физике. Как правило, композиты представляют собой однородные матрицы, содержащие материальные неоднородности (частицы), которые отличаются большим разнообразием. Анализ таких материалов требует применения специальных математических моделей, адекватно описывающих их электрические и магнитные свойства. В настоящее время актуально исследование экранирующих свойств пленок из пермаллоя [1]. Важным для приложений является внедрение пленочных экранов: однослойных [2, 3] и многослойных [4], биизотропных с использованием атомарных функций [5], с линейными и нелинейными [3, 6] свойствами материала, для моделирования которых применяются двухсторонние граничные условия, связывающие поля по обе стороны экрана [7, 8]. Материал из пермаллоя обладает свойством намагниченности, которое описывается дополнительным дифференциальным уравнением для поля намагниченности [1]. Для упрощения модели нелинейное уравнение намагниченности преобразовано в линейное уравнение. Чтобы обеспечить единственность решения краевой задачи для пермаллойных материалов, требуются дополнительные граничные условия на поверхностях экрана. Такие граничные условия используются для моделирования электродинамического контакта двух материалов [9–11].

В настоящей статье разработана методика решения краевой задачи для системы уравнений Максвелла и дифференциального уравнения с частными производными второго порядка для поля намагниченности, в которой описывается экранирование плоских монохроматических полей плоским однослойным экраном из пермаллоя. В качестве плоского первичного поля, воздействующего на экран, выбрана комбинация базисных TE- и TH-поляризованных плоских полей, распространяющихся под произвольным углом к экрану. Использованы двухсторонние граничные условия, которые позволяют построить аналитическое решение сформулированной задачи экранирования.

Система электродинамических уравнений. Для моделирования процессов распространения электромагнитных волн в слое пермаллоя воспользуемся системой дифференциальных уравнений

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{M}}\right); \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{H}} = \dot{\sigma}\vec{\mathbf{E}}; \tag{2}$$

$$\frac{1}{\dot{\gamma}}\frac{\partial\vec{\mathbf{M}}}{\partial t} = \vec{\mathbf{M}} \times \left(\vec{\mathbf{H}} + \dot{a}\Delta\vec{\mathbf{M}} - \dot{g}\vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{H}}\right), \tag{3}$$

где постоянные имеют физические размерности $[\dot{\gamma}] = \frac{\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}}$, $[\dot{a}] = \text{м}^2$, $[\dot{g}] = \frac{\text{м}}{\text{А}}$, $\dot{\sigma} = \frac{\text{См}}{\text{м}}$, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$; $\times$ – векторное произведение.

Представляют практический интерес [1] решения уравнений (1)–(3) вида

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{H}_0 + \vec{H}e^{-i\omega t},\ \vec{\mathbf{M}} = \vec{M}_0 + \vec{M}e^{-i\omega t},\ \vec{\mathbf{E}} = \vec{E}e^{-i\omega t}, \tag{4}$$

где $\vec{H}_0 = \dot{H}_0\vec{e}_z$, $\vec{M}_0 = \dot{M}_0\vec{e}_z$; $\dot{H}_0, \dot{M}_0 - \text{const}$, $\left[\dot{H}_0\right] = \left[\dot{M}_0\right] = \frac{\text{А}}{\text{м}}$, $\left|\vec{H}\right| << \dot{H}_0$, $\left|\vec{M}\right| << \dot{M}_0$, $\omega = 2\pi f$ – круговая частота поля, $\vec{\mathbf{M}}$ – поле намагниченности.

Подставим (4) в (1)–(3) и преобразуем нелинейное уравнение (3) в линейное, пренебрегая величинами второго порядка малости: $\vec{M}\times\vec{H} \approx 0$, $\vec{M}\times\vec{M} \approx 0$.

В результате получим уравнения

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -i\omega\mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right); \tag{5}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \dot{\sigma}\vec{E}; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} i\frac{\omega}{\dot{\gamma}}\vec{M} &= \dot{H}_0\vec{e}_z\times\vec{M} - \dot{M}_0\vec{e}_z\times\vec{H} - \dot{a}\dot{M}_0\vec{e}_z\times\Delta\vec{M} - \\ &- \dot{g}\dot{M}_0^2\left(\vec{e}_z\times\vec{H}\right)\times\vec{e}_z + \dot{g}\dot{H}_0\dot{M}_0\left(\vec{e}_z\times\vec{M}\right)\times\vec{e}_z. \end{aligned} \tag{7}$$

Исключим из уравнения (5) вектор $\vec{E}$ с помощью (6) и применим оператор div к уравнению (5). Получим систему линейных уравнений для $\vec{M}$ и $\vec{H}$:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H} - \Delta\vec{H} = i\sigma k_0^2\left(\vec{H} + \vec{M}\right); \tag{8}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = -\operatorname{div}\vec{M}; \tag{9}$$

$$i\Omega\vec{M} = \eta\vec{e}_z\times\vec{M} - \vec{e}_z\times\vec{H} - \frac{a}{k_0^2}\vec{e}_z\times\Delta\vec{M} - g\left(\vec{e}_z\times\vec{H}\right)\times\vec{e}_z + \eta g\left(\vec{e}_z\times\vec{M}\right)\times\vec{e}_z, \tag{10}$$

где σ, η, a, g – безразмерные постоянные, Ω – безразмерная частота; $\sigma = \mu_0\dot{\sigma}c^2/\omega$, $\eta = \dot{H}_0/\dot{M}_0$, $a = \dot{a}k_0^2$, $g = \dot{g}\dot{M}_0$, $\Omega = \frac{\omega}{\dot{M}_0\dot{\gamma}}$, $k_0 = \frac{\omega}{c}$, c – скорость света в вакууме.

Плоские электромагнитные поля и поля намагниченности. Построим плоские электромагнитные поля с экспоненциальной зависимостью от пространственных координат x, y, z, которые удовлетворяют уравнениям (8)–(10):

$$\vec{E} = \left(e_1\vec{e}_x + e_2\vec{e}_y + e_3\vec{e}_z\right)\Phi F,\ \vec{H} = \left(h_1\vec{e}_x + h_2\vec{e}_y + h_3\vec{e}_z\right)\Phi F,\ \vec{M} = \left(m_1\vec{e}_x + m_2\vec{e}_y\right)\Phi F, \tag{11}$$

$$\Phi = \exp\left(ik_0\left(\alpha_1 x + \alpha_2 y\right)\right),\ F = \exp\left(k_0 v z\right),$$

где α_1, α_2 – произвольные постоянные; $e_s, h_s\ (s = 1, 2, 3)$, $m_j\ (j = 1, 2)$, v – величины, подлежащие определению.

После подстановки (11) в (6) определим компоненты вектора электрической напряженности поля:

$$e_1 = \dot{Z}\left(i\alpha_2 h_3 - vh_2\right),\ e_2 = \dot{Z}\left(vh_1 - i\alpha_1 h_3\right),\ e_3 = i\dot{Z}\left(\alpha_1 h_2 - \alpha_2 h_1\right), \qquad (12)$$

где $\dot{Z} = \dfrac{k_0}{\dot{\sigma}}$, $\left[\dot{Z}\right] = \text{Ом}$.

Подставим (11) в уравнение (9) и определим коэффициент вектора $\vec{H}$:

$$h_3 = -\frac{i}{v}\left(\alpha_1\left(m_1 + h_1\right) + \alpha_2\left(m_2 + h_2\right)\right). \qquad (13)$$

Таким образом, определение полей (11) свелось к определению величин h_1, h_2, m_1, m_2 для полей $\vec{M}, \vec{H}$, которые удовлетворяют уравнениям (8), (10). Подставим (11) в уравнение (8). Учитывая соотношение (9) и формулы $\Delta\vec{H} = k_0^2\left(v^2 - \lambda^2\right)\vec{H}$, $\lambda^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, выразим компоненты вектора магнитной напряженности $\vec{H}$ через компоненты вектора намагниченности $\vec{M}$:

$$h_1 = \frac{1}{K}\left(\left(\alpha_1^2 - i\sigma\right)m_1 + \alpha_1\alpha_2 m_2\right),\ h_2 = \frac{1}{K}\left(\alpha_1\alpha_2 m_1\left(\alpha_2^2 - i\sigma\right)m_2\right); \qquad (14)$$

$$h_3 = -\frac{iv}{K}\left(\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2\right),\ K = v^2 - \lambda^2 + i\sigma. \qquad (15)$$

После подстановки (14) в (13) получим соотношение (15). Это означает, что уравнения (13), (15) эквивалентны.

Для преобразования уравнения (10) введем векторы и матрицы:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},\ \vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix},\ \hat{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 - i\sigma & \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 - i\sigma \end{pmatrix},$$

тогда $\vec{e}_z \times \vec{M} = \hat{S}\vec{m}$, $\vec{e}_z \times \vec{H} = \hat{S}\vec{h}$, $\left(\vec{e}_z \times \vec{M}\right) \times \vec{e}_z = \hat{J}\vec{m}$, $\left(\vec{e}_z \times \vec{H}\right) \times \vec{e}_z = \hat{J}\vec{h}$, $\vec{e}_z \times \Delta\vec{M} = k_0^2\left(K - i\sigma\right)\hat{S}\vec{m}$.

Запишем уравнения (14), (10) в матричном виде:

$$\vec{h} = \frac{1}{K}\hat{G}\vec{m}; \qquad (16)$$

$$i\Omega\hat{J}\vec{m} = \eta\hat{S}\vec{m} - \hat{S}\vec{h} - a\left(K - i\sigma\right)\hat{S}\vec{m} - g\hat{J}\vec{h} + \eta g\hat{J}\vec{m} = 0. \qquad (17)$$

Подставим (16) в (17) и получим уравнение для определения вектора $\vec{m}$:

$$\hat{b}\vec{m} = 0, \qquad (18)$$

где

$$\hat{b} = aK^2\hat{S} + K\left(\bar{\Omega}\hat{J} - \bar{\sigma}\hat{S}\right) + \hat{Z} = \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{pmatrix},\ \hat{Z} = \begin{pmatrix} z_{11}, & z_{12} \\ z_{21}, & z_{22} \end{pmatrix},$$

$$z_{11} = g\left(\alpha_1^2 - i\sigma\right) - \alpha_1\alpha_2,\ z_{12} = g\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2 + i\sigma,$$

$$z_{21} = g\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2 - i\sigma,\ z_{22} = g\left(\alpha_1^2 - i\sigma\right) + \alpha_1\alpha_2,$$

$$b_{11}=\bar{\Omega}K+z_{11},\ b_{12}=-aK^2+\bar{\sigma}K+z_{12},\ \bar{\Omega}=i\Omega-\eta g,$$

$$b_{21}=aK^2-\bar{\sigma}K+z_{21},\ b_{22}=\bar{\Omega}K+z_{22},\ \bar{\sigma}=\eta+ia\sigma.$$

Нетривиальное решение уравнения (18) существует, когда определитель матрицы $\hat{b}$ равен нулю: $\left|\hat{b}\right|=b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}=0$. В результате получим дисперсионное уравнение для определения величины K:

$$b_4K^4+b_3K^3+b_2K^2+b_1K+b_0=0, \tag{19}$$

где $b_4=a^2,\ b_3=-2a\bar{\sigma},\ b_2=\bar{\sigma}^2+\bar{\Omega}^2+a\left(\lambda^2-2i\sigma\right),\ b_1=\left(\bar{\Omega}g-1\right)\left(\lambda^2-2i\sigma\right),\ b_0=-\sigma\left(i\lambda^2+\sigma\right)\left(1+g^2\right).$

Алгебраическое уравнение (19) имеет четыре комплексных корня $K_s\ (s=1,2,3,4)$.

Определим величину $v=\pm v_s$, где $v_s=\sqrt{K_s+\lambda^2-i\sigma},\ -\dfrac{\pi}{2}\le\arg v_s<\dfrac{\pi}{2}.$

Из уравнения (18) найдем компоненты вектора $\vec{M}$: $m_1=-b_{12},\ m_2=b_{11}.$

В результате получим восемь линейно независимых плоских решений системы уравнений (5)–(7) в виде (11):

$$\vec{M}=\dot{m}_0\vec{M}^{(\pm s)},\ \vec{H}=\dot{m}_0\vec{H}^{(\pm s)},\ \vec{E}=\dot{m}_0\dot{Z}\vec{E}^{(\pm s)},\ s=1,2,3,4, \tag{20}$$

где $\dot{m}_0$ – амплитуда, $\left[\dot{m}_0\right]=\dfrac{\text{А}}{\text{м}}$, $\vec{M}^{(\pm s)},\vec{H}^{(\pm s)},\vec{E}^{(\pm s)}$ – безразмерные поля;

$$\vec{M}^{(\pm s)}=\left(m_1^{(s)}\vec{e}_x+m_2^{(s)}\vec{e}_y\right)\Phi F^{(\pm s)},\ \vec{H}^{(\pm s)}=\left(h_1^{(s)}\vec{e}_x+h_2^{(s)}\vec{e}_y\pm h_3^{(s)}\vec{e}_z\right)\Phi F^{(\pm s)},$$

$$\vec{E}^{(\pm s)}=\left[\pm\left(e_1^{(s)}\vec{e}_x+e_2^{(s)}\vec{e}_y\right)+e_3^{(s)}\vec{e}_z\right]\Phi F^{(\pm s)};$$

$$m_1^{(s)}=K_s\left(aK_s-\bar{\sigma}\right)-z_{12},\ m_2^{(s)}=\bar{\Omega}K_s+z_{11},\ F^{(\pm s)}=\exp\left(\pm k_0v_sz\right),$$

$$h_1^{(s)}=\frac{1}{K_s}\left(\left(\alpha_1^2-i\sigma\right)m_1^{(s)}+\alpha_1\alpha_2m_2^{(s)}\right),\ h_2^{(s)}=\frac{1}{K_s}\left(\alpha_1\alpha_2m_1^{(s)}+\left(\alpha_2^2-i\sigma\right)m_2^{(s)}\right),$$

$$h_3^{(s)}=\frac{v_s}{iK_s}\left(\alpha_1m_1^{(s)}+\alpha_2m_2^{(s)}\right),$$

$$e_1^{(s)}=\frac{i\sigma v_s}{K_s}m_2^{(s)},\ e_2^{(s)}=-\frac{i\sigma v_s}{K_s}m_1^{(s)},\ e_3^{(s)}=\frac{i\sigma}{K_s}\left(\alpha_2m_1^{(s)}-\alpha_1m_2^{(s)}\right).$$

Введем векторы

$$\vec{m}^{(s)}=\begin{pmatrix}m_1^{(s)}\\ m_2^{(s)}\end{pmatrix},\ \vec{h}^{(s)}=\begin{pmatrix}h_1^{(s)}\\ h_2^{(s)}\end{pmatrix},\ \vec{e}^{(s)}=\begin{pmatrix}e_1^{(s)}\\ e_2^{(s)}\end{pmatrix},$$

тогда

$$\begin{gathered}\vec{h}^{(s)}=\frac{1}{K_s}\hat{G}\vec{m}^{(s)},\ \vec{e}^{(s)}=\frac{\sigma v_s}{iK_s}\hat{S}\vec{m}^{(s)},\\ \vec{M}^{(\pm s)}=\vec{m}^{(s)}\Phi F^{(\pm s)},\ \vec{H}_\tau^{(\pm s)}=\vec{h}^{(s)}\Phi F^{(\pm s)},\ \vec{E}_\tau^{(\pm s)}=\pm\vec{e}^{(s)}\Phi F^{(\pm s)}.\end{gathered} \tag{21}$$

Постановка краевой задачи экранирования. В пространстве E^3 с электрической и магнитной постоянными ε_0,μ_0 расположен плоский экран $D\left(0<z<\Delta\right)$ толщиной Δ, заполненный пермаллоем. Из полупространства $D_1\left(z<0\right)$ на слой D воздействует первичное электромагнитное поле $\vec{E}_0,\vec{H}_0$ с временной зависимостью $\exp\left(-i\omega t\right)$ [8, с. 96]:

$$\vec{E}_0 = A\vec{W}^{(-1)} + B\vec{W}^{(-2)},\ \vec{H}_0 = h_0\left(A\vec{W}^{(-2)} + B\vec{W}^{(-1)}\right), z < 0, \tag{22}$$

где A, B – заданные амплитуды, $\vec{h}_0 = \dfrac{1}{iZ_0}$, $Z_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$,

$$\begin{gathered}\vec{W}^{(\mp1)} = \frac{i}{\sin\theta_0}\left(\alpha_2\vec{e}_x - \alpha_1\vec{e}_y\right)\Phi\exp\left(\pm ik_0\cos\theta_0\, z\right),\\ \vec{W}^{(\mp2)} = \left(\mp\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\left(\alpha_1\vec{e}_x + \alpha_2\vec{e}_y\right) + \sin\theta_0\,\vec{e}_z\right)\Phi\exp\left(\pm ik_0\cos\theta_0\, z\right),\end{gathered} \tag{23}$$

$$\Phi = \exp\left(ik_0\left(\alpha_1 x + \alpha_2 y\right)\right).$$

Выберем постоянные $\alpha_1 = \cos\phi_0\sin\theta_0$, $\alpha_2 = \sin\phi_0\sin\theta_0$, $\alpha = \cos\theta_0$, $0 \le \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le \phi_0 < 2\pi$; θ_0, ϕ_0 – углы, характеризующие направление распространения плоского поля.

В результате взаимодействия поля (22) с экраном D образуются поля: $\vec{E}_1', \vec{H}_1'$ – отраженное поле в D_1; $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}'$, $\vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \vec{H}_1'$ – суммарное поле в D_1; $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ – поле, проникшее в область $D_2\left(z > \Delta\right)$.

В слое D образуется высокочастотное электромагнитное поле $\vec{E}, \vec{H}$ и поле намагниченности $\vec{M}$. На слой D также воздействует внешнее постоянное магнитное поле $\vec{H}_0 = \dot{H}_0\vec{e}_z$, которое создает постоянную намагниченность слоя $\vec{M}_0 = \dot{M}_0\vec{e}_z$, $\dot{M}_0 = \chi_0\dot{H}_0$.

Сформулируем краевую задачу проникновения поля (22) через экран D, используя специальные граничные условия на плоскостях $\Gamma_1\left(z = 0\right), \Gamma_2\left(z = \Delta\right)$.

Краевая задача 1. Для заданного поля (22) требуется определить поля $\vec{E}_1', \vec{H}_1'$, $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ соответственно в областях D_1, D_2 и поля $\vec{H}, \vec{M}$ в области D, которые удовлетворяют следующим условиям:

– уравнениям Максвелла

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\vec{E}_1' = i\omega\mu_0\vec{H}_1',\ \operatorname{rot}\vec{H}_1' = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_1',\quad z < 0,\\ \operatorname{rot}\vec{E}_2 = i\omega\mu_0\vec{H}_2,\ \operatorname{rot}\vec{H}_2 = -i\,\omega\varepsilon_0\,\vec{E}_2,\quad z > \Delta;\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right),\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dot{\sigma}\vec{E},\quad 0 < z < \Delta,\\ \left(i\Omega - \eta g\right)\vec{M} = \eta\left[\vec{n}, \vec{M}\right] - \left[\vec{n}, \vec{H}\right] - \frac{a}{k_0^2}\left[\vec{n}, \Delta\vec{M}\right] - g\vec{H}_\tau,\end{gathered} \tag{25}$$

где $\vec{n} = \vec{e}_z$, $\vec{H}_\tau = \left[\left[\vec{n}, \vec{H}\right], \vec{n}\right]$;

– граничным условиям сопряжения на плоскости Γ_1

$$\left.\left(\vec{E}_\tau - \vec{E}_{1\tau}\right)\right|_{z=0} = 0,\ \left.\left(\vec{H}_\tau - \vec{H}_{1\tau}\right)\right|_{z=0} = 0; \tag{26}$$

$$\left.\left(\frac{d\vec{M}}{k_0 dz} + p\vec{M}\right)\right|_{z=0} = 0; \tag{27}$$

– граничным условиям сопряжения на плоскости Γ_2

$$\left.\left(\vec{E}_\tau - \vec{E}_{2\tau}\right)\right|_{z=\Delta} = 0,\ \left.\left(\mathrm{H}_\tau - \mathrm{H}_{2\tau}\right)\right|_{z=\Delta} = 0; \tag{28}$$

$$\left.\left(\frac{d\vec{M}}{k_0 dz} - q\vec{M}\right)\right|_{z=\Delta} = 0 \tag{29}$$

и условиям излучения на бесконечности.

Двухсторонние граничные условия на плоском экране. Решение задачи (24)–(29) представим в виде суперпозиции базисных полей (23):

$$\vec{E}_1' = x_1\vec{W}^{(+1)} + x_2\vec{W}^{(+2)},\ \vec{H}_1' = \frac{1}{iZ_0}\left(x_1\vec{W}^{(+2)} + x_2\vec{W}^{(+1)}\right), \quad z<0; \tag{30}$$

$$\vec{E}_2 = y_1\vec{W}^{(-1)} + y_2\vec{W}^{(-2)},\ \vec{H}_2 = \frac{1}{iZ_0}\left(y_1\vec{W}^{(-2)} + y_2\vec{W}^{(-1)}\right), \quad z>\Delta; \tag{31}$$

$$\begin{gathered}\vec{E} = \dot{Z}\sum_{s=1}^{4}\left(z_s\vec{E}^{(+s)} + z_{-s}\vec{E}^{(-s)}\right),\ \vec{H} = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s\vec{H}^{(+s)} + z_{-s}\vec{H}^{(-s)}\right),\\ \vec{M} = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s\vec{M}^{(+s)} + z_{-s}\vec{M}^{(-s)}\right), \quad 0<z<\Delta,\end{gathered} \tag{32}$$

где поля (30)–(32) удовлетворяют уравнениям (24), (25); коэффициенты x_j, y_j, z_s, z_{-s} $\left(j=1,2;\ s=1,2,3,4\right)$ подлежат определению из условий (26)–(29). Удовлетворим граничному условию (27). Подставляя (32) в (27), получим соотношение

$$\left.\left(\frac{d\vec{M}}{k_0 dz} + p\vec{M}\right)\right|_{z=0} = \sum_{s=1}^{4}\left(\left(v_s + p\right)z_s - \left(v_s - p\right)z_{-s}\right)\vec{m}^{(s)}\Phi = 0. \tag{33}$$

Аналогично из граничного условия (29) получим соотношение

$$\left.\left(\frac{d\vec{M}}{k_0 dz} - q\vec{M}\right)\right|_{z=\Delta} = \sum_{s=1}^{4}\left(\left(v_s - q\right)F_0^{(+s)}z_s - \left(v_s + q\right)F^{(-s)}z_{-s}\right)\vec{m}^{(s)}\Phi = 0. \tag{34}$$

Введем векторы $\vec{z}_+ = \left(z_1, z_2, z_3, z_4\right)^{\mathrm{T}}$, $\vec{z}_- = \left(z_{-1}, z_{-2}, z_{-3}, z_{-4}\right)$ и запишем систему уравнений (33), (34) в матричном виде:

$$\hat{R}\vec{z}_+ = \hat{G}\vec{z}_-,\ \vec{z}_- = \hat{G}^{-1}\hat{R}\vec{z}_+, \tag{35}$$

где $\hat{R} = \left\{R_{sl}\right\}$, $\hat{G} = \left\{G_{sl}\right\}$ – матрицы размерности 4×4 $\left(s, l = 1, 2, 3, 4\right)$;

$$R_{1s} = \left(v_s + p\right)m_1^{(s)},\ R_{2s} = \left(v_s + p\right)m_2^{(s)},\ R_{3s} = \left(v_s - q\right)F_0^{(+s)}m_1^{(s)},\ R_{4s} = \left(v_s - q\right)F^{(+s)}m_2^{(s)};$$

$$G_{1s} = \left(v_s - p\right)m_1^{(s)},\ G_{2s} = \left(v_s - p\right)m_2^{(s)},\ G_{3s} = \left(v_s + q\right)F^{(-s)}m_1^{(s)},\ G_{4s} = \left(v_s + q\right)F^{(-s)}m_2^{(s)};$$

$F_0^{(\pm s)} = \exp\left(\pm k_0 v_s \Delta\right)$, т – знак транспонирования.

Вычислим тангенциальные составляющие полей $\vec{E}, \vec{H}$ (32) в сечении z = const:

$$\begin{gathered}\vec{E}_\tau\left(z\right) = \dot{Z}\sum_{s=1}^{4}\left(z_s F^{(+s)}\left(z\right) - z_{-s}F^{(-s)}\left(z\right)\right)\vec{e}^{(s)}\Phi,\\ \vec{H}_\tau\left(z\right) = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s F^{(+s)}\left(z\right) + z_{-s}F^{(-s)}\left(z\right)\right)\vec{h}^{(s)}\Phi.\end{gathered} \tag{36}$$

Запишем соотношения (36) в матричном виде, вводя матрицы $\hat{P}\left(z\right) = \left\{P_{sl}\left(z\right)\right\}$, $\hat{M}\left(z\right) = \left\{M_s\left(z\right)\right\}$ и вектор $\vec{W}\left(z\right) = \left(\vec{E}_x\left(z\right), \vec{E}_y\left(z\right), \vec{H}_x\left(z\right), \vec{H}_y\left(z\right)\right)^{\mathrm{T}}$:

$$\vec{W}(z)=\left(\hat{P}(z)\vec{z}_{+}+\hat{M}(z)\vec{z}_{-}\right)\Phi, \tag{37}$$

где

$$P_{1s}(z)=\dot{Z}F^{(+s)}(z)e_1^{(s)},\ P_{2s}=\dot{Z}F^{(+s)}(z)e_2^{(s)},\ P_{3s}=F^{(+s)}(z)h_1^{(s)},\ P_{4s}=F^{(+s)}(z)h_2^{(s)},$$

$$M_{1s}(z)=-\dot{Z}F^{(-s)}(z)e_1^{(s)},\ M_{2s}(z)=-\dot{Z}F^{(-s)}(z)e_2^{(s)},$$

$$M_{3s}(z)=F^{(-s)}(z)h_1^{(s)},\ M_{4s}(z)=F^{(-s)}(z)h_2^{(s)}.$$

Удовлетворим граничным условиям (25). Учитывая (37), получим

$$\hat{P}_2\vec{z}_{+}+\hat{M}_2\vec{z}_{-}=\frac{1}{\Phi}\vec{W}_2, \tag{38}$$

где

$$\hat{P}_2=\hat{P}(\Delta),\ \hat{M}_2=\hat{M}(\Delta),\ \vec{W}_2=\vec{W}(\Delta)=\left(E_{2x},E_{2y},H_{2x},H_{2y}\right)^{\mathrm{T}}.$$

С помощью (35) исключим из равенств (37), (38) вектор $\vec{z}_{-}$ и вычислим векторы

$$\vec{W}(z)=\left(\hat{P}(z)+\hat{M}(z)\hat{G}^{-1}\hat{R}\right)\vec{z}_{+}\Phi; \tag{39}$$

$$\vec{z}_{+}=\frac{1}{\Phi}\left(\hat{P}_2+\hat{M}_2\hat{G}^{-1}\hat{R}\right)^{-1}\vec{W}_2. \tag{40}$$

Подставляя (40) в (39), зададим поле в слое D в виде формулы

$$\vec{W}(z)=\left(\hat{P}(z)+\hat{M}(z)\hat{G}^{-1}\hat{R}\right)\left(\hat{P}_2(z)+\hat{M}_2(z)\hat{G}^{-1}\hat{R}\right)^{-1}\vec{W}_2,\quad 0<z<\Delta. \tag{41}$$

Теорема 1. *На поверхности плоского экрана из пермаллоя при воздействии плоского поля (22) выполнены двухсторонние нелокальные граничные условия, связывающие электромагнитные поля по обе стороны экрана D:*

$$\vec{W}_1(M_1)=\hat{B}\vec{W}_2(M_2), \tag{42}$$

где

$$M_1(x,y,0)\in\Gamma_1,\ M_2(x,y,\Delta)\in\Gamma_2,\ W_j=\left(E_{jx},E_{jy},H_{jx},H_{jy}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{B}=\hat{B}\left(\theta_0,\phi_0,\omega;\dot{a},\dot{g},\dot{\gamma},\dot{\sigma},\Delta;\dot{H}_0,\dot{M}_0\right)=\left(\hat{P}_1+\hat{M}_1\hat{G}^{-1}\hat{R}\right)\left(\hat{P}_2+\hat{M}_2\hat{G}^{-1}\hat{R}\right)^{-1},\ \hat{P}_1=\hat{P}(0),\quad \hat{M}_1=\hat{M}(0),$$

$$\hat{B}=\{B_{sl}\},\ s,\ l=1,2,3,4.\ \blacksquare$$

Для доказательства воспользуемся преобразованиями данного раздела, применяя формулу (41), и удовлетворим граничным условиям (26). Получим требуемую формулу (41) $\vec{W}_1=\vec{W}(0)=\hat{B}\vec{W}_2$.

Аналитическое решение задачи экранирования. Решение краевой задачи (24)–(29) предполагает определение полей в слое D. Наибольший практический интерес представляет определение полей, отраженных от экрана, и полей, прошедших через экран. В связи с этим сформулируем краевую задачу экранирования с использованием двухстороннего граничного условия (42). При такой формулировке поле в слое D исключается из рассмотрения.

Краевая задача 2. Для заданного поля (22) требуется определить поля (30), (31), которые удовлетворяют уравнениям (24), граничным условиям (42) и условиям излучения на бесконечность. ■

Сформулированная задача решается аналитически в соответствии с методикой [8].

Теорема 2. *Амплитуды отраженного поля (30) и амплитуды поля (31), прошедшего через экран D, при воздействии плоского первичного поля (22) определяются выражениями*

$$y_1 = \frac{2}{FQ}\left(Q_{22}A - Q_{12}B\right),\ y_2 = \frac{2}{FQ}\left(Q_{11}B - Q_{21}A\right); \tag{43}$$

$$\begin{gathered} x_1 = \frac{1}{Q}\left[\left(Q_{22}Q'_{11} - Q_{21}Q'_{12}\right)A + \left(Q_{11}Q'_{12} - Q_{12}Q'_{11}\right)B\right], \\ x_2 = \frac{1}{Q}\left[\left(Q_{22}Q'_{21} - Q_{21}Q'_{22}\right)A + \left(Q_{11}Q'_{22} - Q_{12}Q'_{21}\right)B\right], \end{gathered} \tag{44}$$

где $Q = Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21}$,

$$\begin{gathered} Q_{11} = \left(\hat{B}\vec{b}_1, \vec{a}_1\right),\ Q_{12} = \left(\hat{B}\vec{b}_2, \vec{a}_1\right),\ Q_{21} = \left(\hat{B}\vec{b}_1, \vec{a}_2\right),\ Q_{22} = \left(\hat{B}\vec{b}_2, \vec{a}_2\right), \\ Q'_{11} = \left(\hat{B}\vec{b}_1, \vec{a}'_1\right),\ Q'_{12} = \left(\hat{B}\vec{b}_2, \vec{a}'_1\right),\ Q'_{21} = \left(\hat{B}\vec{b}_1, \vec{a}'_2\right),\ Q'_{22} = \left(\hat{B}\vec{b}_2, \vec{a}'_2\right); \end{gathered} \tag{45}$$

базисные векторы:

$$\begin{gathered} \vec{a}_1 = i\left(-\bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_1, -Z_0\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha}, -Z_0\frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha}\right)^{\mathrm{T}},\ \vec{a}_2 = \left(-\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha}, -\frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha}, Z_0\bar{\alpha}_2, -Z_0\bar{\alpha}_1\right)^{\mathrm{T}}, \\ \vec{a}'_1 = i\left(-\bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_1, Z_0\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha}, Z_0\frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha}\right)^{\mathrm{T}},\ \vec{a}'_2 = \left(\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha}, \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha}, Z_0\bar{\alpha}_2, -Z_0\bar{\alpha}_1\right)^{\mathrm{T}}, \\ \vec{b}_1 = i\left(\bar{\alpha}_2, -\bar{\alpha}_1, \frac{\alpha\bar{\alpha}_1}{Z_0}, \frac{\alpha\bar{\alpha}_2}{Z_0}\right)^{\mathrm{T}},\ \vec{b}_2 = \left(-\alpha\bar{\alpha}_1, \alpha\bar{\alpha}_2, \frac{\bar{\alpha}_2}{Z_0}, -\frac{\bar{\alpha}_1}{Z_0}\right)^{\mathrm{T}}, \\ \vec{b}'_1 = i\left(\bar{\alpha}_2, -\bar{\alpha}_1, -\frac{\alpha\bar{\alpha}_1}{Z_0}, -\frac{\alpha\bar{\alpha}_2}{Z_0}\right)^{\mathrm{T}},\ b'_2 = \left(\alpha\bar{\alpha}_1, \alpha\bar{\alpha}_2, \frac{\bar{\alpha}_2}{Z_0}, -\frac{\bar{\alpha}_1}{Z_0}\right)^{\mathrm{T}}, \\ \bar{\alpha}_1 = \cos\phi_0,\ \bar{\alpha}_2 = \sin\phi_0.\ \blacksquare \end{gathered} \tag{46}$$

Доказательство. Искомые поля (30), (31) краевой задачи 2 удовлетворяют уравнениям (24). Для удовлетворения нелокальному граничному условию (42) вычислим касательные компоненты векторов (22), (30) на плоскости $z = 0$.

Для первичного поля

$$E_{ox}\big|_{z=0} = \left(i\alpha_2 A - \alpha\alpha_1 B\right)\bar{\Phi},\ E_{oy}\big|_{z=0} = \left(-i\alpha_1 A - \alpha\alpha_2 B\right)\bar{\Phi},$$

$$H_{ox}\big|_{z=0} = \frac{1}{iZ_0}\left(-\alpha\alpha_1 A + i\alpha_2 B\right)\bar{\Phi},\ H_{oy}\big|_{z=0} = \frac{1}{iZ_0}\left(-\alpha\alpha_2 A - i\alpha_1 B\right)\bar{\Phi},$$

где $\bar{\Phi} = \Phi/\sin\theta_0$.

Для отраженного поля

$$E'_{1x}\big|_{z=0} = \left(i\alpha_2 x_1 + \alpha\alpha_1 x_2\right)\bar{\Phi},\ E'_{1y}\big|_{z=0} = \left(-i\alpha_1 x_1 + \alpha\alpha_2 x_2\right)\bar{\Phi},$$

$$H'_{1x}\big|_{z=0} = \frac{1}{iZ_0}\left(\alpha\alpha_1 x_1 + i\alpha_2 x_2\right)\bar{\Phi},\ H'_{1y}\big|_{z=0} = \frac{1}{iZ_0}\left(\alpha\alpha_2 x_1 - i\alpha_1 x_2\right)\bar{\Phi}.$$

В терминах базисных векторов (46) получим

$$\vec{W}_1(M_1) = \vec{W}_0 + \vec{W}_1',$$
$$\vec{W}_0 = \left(A\vec{b}_1 + B\vec{b}_2\right)\Phi,\ \vec{W}_1' = \left(x_1\vec{b}_1' + x_2\vec{b}_2'\right)\Phi. \tag{47}$$

Касательные компоненты векторов (31) на плоскости $z = \Delta$ определяются формулами

$$E_{2x}\big|_{z=\Delta} = (i\alpha_2 y_1 - \alpha\alpha_1 y_2)F\bar{\Phi},\ \ E_{2y}'\big|_{z=\Delta} = (-i\alpha_1 y_1 - \alpha\alpha_2 y_2)F\bar{\Phi},$$

$$H_{2x}\big|_{z=\Delta} = \frac{1}{iZ_0}(-\alpha\alpha_1 y_1 + i\alpha_2 y_2)F\bar{\Phi},\ \ H_{2y}\big|_{z=\Delta} = \frac{1}{iZ_0}(-\alpha\alpha_2 y_1 - i\alpha_1 y_2)F\bar{\Phi},$$

где $F = \exp\left(ik_0\alpha\Delta\right)$.

В результате вектор $\vec{W}_2$ в терминах базисных векторов (46) примет вид

$$\vec{W}_2(M_2) = \left(y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2\right)F\Phi. \tag{48}$$

После подстановки векторов (47), (48) в граничное условие (42) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения амплитуд x_1, x_2, y_1, y_2:

$$\hat{B}\left(y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2\right)F = A\vec{b}_1 + B\vec{b}_2 + x_1\vec{b}' + x_2\vec{b}_2'. \tag{49}$$

Для аналитического решения системы (49) воспользуемся свойствами векторов (46).

Лемма. Для базисных векторов (46) выполнены условия ортогональности. Скалярные произведения векторов определяются следующими формулами:

$$\left(\vec{b}_1, \vec{a}_1\right) = 2,\ \left(\vec{b}_2, \vec{a}_1\right) = 0,\ \left(\vec{b}_1', \vec{a}_1\right) = 0,\ \left(\vec{b}_2', \vec{a}_1\right) = 0,$$
$$\left(\vec{b}_2, \vec{a}_2\right) = 2,\ \left(\vec{b}_1, \vec{a}_2\right) = 0,\ \left(\vec{b}_1', \vec{a}_2\right) = 0,\ \left(\vec{b}_2', \vec{a}_2\right) = 0,$$
$$\left(\vec{b}_1', \vec{a}'_1\right) = 2,\ \left(\vec{b}_2', \vec{a}'_1\right) = 0,\ \left(\vec{b}_1, \vec{a}'_1\right) = 0,\ \left(\vec{b}_2, \vec{a}'_1\right) = 0,$$
$$\left(\vec{b}_2', \vec{a}'_2\right) = 2,\ \left(\vec{b}_2', \vec{a}'_2\right) = 0,\ \left(\vec{b}_1, \vec{a}'_2\right) = 0,\ \left(\vec{b}_2, \vec{a}_2'\right) = 0. \tag{50}$$

Используя условия ортогональности (50) и умножая равенство (49) скалярно на векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, придем к системе алгебраических уравнений

$$Q_{11}y_1 + Q_{12}y_2 = 2\frac{A}{F},\ \ Q_{21}y_1 + Q_{22}y_2 = 2\frac{B}{F}.$$

Решая систему уравнений, вычислим коэффициенты y_1, y_2 (43). Аналогично, умножая (49) скалярно на векторы $\vec{a}_1'$ и $\vec{a}_2'$, определим коэффициенты

$$x_1 = \left(y_1Q_{11}' + y_2Q_{12}'\right)\frac{F}{2},\ x_2 = \left(y_1Q_{21}' + y_2Q_{22}'\right)\frac{F}{2}. \tag{51}$$

После подстановки в (51) выражений (43) получим требуемые формулы (44), (45) для амплитуд отраженного поля, что завершает доказательство теоремы 2. ■

Заключение. В статье разработана методика моделирования процессов проникновения плоских монохроматических электромагнитных полей, распространяющихся под произвольным углом, через пленочный плоский однослойный экран, выполненный из пермаллоя. Построены двухсторонние граничные условия, связывающие поля по обе стороны экрана. Метод двухсторонних граничных условий применен для аналитического вычисления амплитуд отраженного и прошедшего через экран электромагнитных полей. Новизна работы состоит в том, что амплитуды отраженного и прошедшего через экран полей вычислены с использованием восьми четырехмерных векторов, которые удовлетворяют условиям ортогональности. Также применены дополнительные граничные условия второго рода на поверхностях экрана для поля намагниченности, которые позволили увеличить степень дисперсионного уравнения. С помощью четырех комплексных корней дисперсионного уравнения определены четыре независимых плоских электромагнитных поля, распространяющихся в слое пермаллоя в прямом направлении, и четыре поля – в обратном направлении. Результаты работы могут быть использованы для практического создания экранов с намагниченностью.

Список использованных источников

1. Закономерности проникновения электромагнитных волн через металлические магнитные пленки / А. Б. Ринкевич [и др.] // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79, вып. 9. – С. 96–106.

2. Методы исследования тонких диэлектрических пленок миллиметрового диапазона / С. Н. Власов [и др.] // Журнал технической физики. – 2010. – Т. 80, вып. 12. – С. 73–79.

3. Громыко, Г. Ф. Численное исследование структуры магнитного поля в цилиндрическом пленочном экране / Г. Ф Громыко, В. Т. Ерофеенко, Г. М. Заяц // Информатика. – 2016. – № 2(50). – С. 5–18.

4. Ерофеенко, В. Т. Экранирование магнитного импульса пленочным многослойным экраном с чередующимися магнитными и немагнитными слоями / В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко // Журнал технической физики. – 2017. – Т. 87, вып. 6. – С. 831–836.

5. Ерофеенко, В. Т. Искажение узкополосных электромагнитных сигналов при прохождении через биизотропный экран / В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко // Электроника ИНФО. – 2013 – № 6. – С. 176–180.

6. Эффективность экранирования постоянных магнитных полей цилиндрическим экраном с учетом нелинейных эффектов / Г. Ф. Громыко [и др.] // Физические основы приборостроения. – 2015. – Т. 4, № 4. – С. 30–39.

7. Аполлонский, С. М. Эквивалентные граничные условия в электродинамике / С. М. Аполлонский, В. Т. Ерофеенко. – СПб. : Безопасность, 1998. – 416 с.

8. Ерофеенко, В. Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская. – М. : Либроком, 2014. – 304 с.

9. Шевченко, В. В. О прохождении плоских волн через границу двух поглощающих сред / В. В. Шевченко // Радиотехника и электроника. – 2004. – Т. 49, № 9. – С. 1048–1053.

10. Резинкина, М. М. Использование численных расчетов для выбора средств экранирования от действия магнитного поля / М. М. Резинкина // Журнал технической физики. – 2007. – Т. 77, вып. 11. – С. 17–24.

11. Ерофеенко, В. Т. Моделирование электродинамического контакта двух материалов при воздействии электромагнитных волн / В. Т. Ерофеенко // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 3. – С. 314–319.

References

1. Rinkevich A. B., Perov D. V., Vas‘kovskiy V. O., Lepalovskiy V. N. Zakonomernosti proniknovenija jelektromagnitnyh voln cherez metallicheskie magnitnye plenki [Regularitys of a penetration electromagnetic waves across the metallic magnetic films]. Zhurnal tehnicheskoj fiziki [*Technical Physics*], 2009, vol. 79, no. 9, pp. 96–106 (in Russian).

2. Vlasov S. N., Parschin V. V., Serov E. A., Vas‘kovskiy V. O., Lepalovskiy V. N. Metody issledovanija tonkih dijelektricheskih pljonok millimetrovogo diapazona [Methods investigation of a thin dielectric films of the millimeter range]. Zhurnal tehnicheskoj fiziki [*Technical Physics*], 2010, vol. 80, no. 12, pp. 73–79 (in Russian).

3. Gromyko G. F., Erofeenko V. T., Zayats G. M. Chislennoe issledovanie struktury magnitnogo polja v cilindricheskom plenochnom jekrane [Numerical simulation of magnetic field structure in cylindrical film screen]. Informatika [*Informatics*], 2016, no. 2(50), pp. 5–18 (in Russian).

4. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. Jekranirovanie magnitnogo impul'sa plenochnym mnogoslojnym jekranom s cheredujushhimisja magnitnymi i nemagnitnymi slojami [Shielding of a magnetic pulse by the multilayer film shield with alternating magnetic and nonmagnetic layers]. Zhurnal tehnicheskoj fiziki [*Technical Physics*], 2017, vol. 87, no. 6, pp. 831–836 (in Russian).

5. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. Iskazhenie uzkopolosnyh jelektromagnitnyh signalov pri prohozhdenii cherez biizotropnyoj jekran. [Distortion narrow-band electromagnetic signal at pass through a biisotropic screen]. Jelektronika INFO [*Electronics INFO*], 2013, no. 6, pp. 176–180 (in Russian).

6. Gromyko G. F., Grabchikov S. S., Erofeenko V. T., Zayats G. M. Jeffektivnost' jekranirovanija postojannych magnitnyh poleoj cilindricheskim jekranom s uchjotom nelineojnyh jeffektov [The shielding effectiveness of static magnetic fields by cylindrical screen taking into account nonlinear effects]. Fizicheskie osnovy priborostroeniaj [*Physikal Base of the Apparatus Construction*], 2015, vol. 4, no. 4, pp. 30–39 (in Russian).

7. Apollonskij S. M., Erofeenko V. T. Jekvivalentnye granichnye uslovija v jelektrodinamike. *Equivalent Boundary Conditions in Electrodynamics*. Saint-Petersburg, Bezopasnost', 1998, 416 p. (in Russian).

8. Erofeenko V. T., Kozlovskaja I. S. Analiticheskoe modelirovanie v jelektrodinamike. *Analytical Modeling in Electrodynamics*. Moscow, Librocom, 2014, 304 p. (in Russian).

9. Schevchenko V. V. O prohozhdenii ploskih voln cherez granicu dvuh pogloshhajushhih sred [About pass of a plane waves through a boundary of the two absorbing medium]. Ragiotehnika i jelektronika [*Journal of Communications Technology and Electronics*], 2004, vol. 49, no. 9, pp. 1048–1053 (in Russian).

10. Rezinkina M. M. Ispol'zovanie chislennyh raschjotov dlja vybora sredstv jekranirovanija ot deojstvija magnitnogo polja [Use of the numerical calculations for choice means of shielding against action magnetic field]. Zhurnal tehnicheskoj fiziki [*Technical Physics*], 2007, vol. 77, no. 11, pp. 17–24 (in Russian).

11. Erofeenko V. T. Modelirovanie jelektrodinamicheskogo kontacta dvuh materialov pri vozdeojstvii electromagnitnyh voln [Modeling of the elektrodynamic contact of two materials at the action of electromagnetic waves]. Radiotehnika i jelektronika [*Journal of Communications Technology and Electronics*], 2012, vol. 57, no. 3, pp. 314–319 (in Russian).

Информация об авторах

Ерофеенко Виктор Тихонович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории математических методов защиты информации, Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики и информатики».
E-mail: bsu_erofeenko@tut.by

Information about the authors

Viktor T. Erofeenko – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher Associate of the Research Laboratory of Mathematical Methods of Information Security, Establishment of the Belarusian State University "Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics", Minsk, Belarus.
E-mail: bsu_erofeenko@tut.by