ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)
УДК 519.816

Поступила в редакцию 15.02.2019
Received 15.02.2019

Принята к публикации 20.06.2019
Accepted 20.06.2019

Математическая модель независимых альтернатив в теории рейтингов

В. М. Романчак

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
E-mail: Romanchak@bntu.by

Аннотация. Рассматривается альтернативный вариант теории измерений – теория рейтингов. Существуют два определения рейтинга. В классическом случае, если величина некоторых объектов изменяется равномерно, рейтинг объекта равен его порядковому номеру. Аксиоматическое определение рейтинга основывается на понятиях теории категорий. В этом случае областью определения рейтинга является множество объектов и множество упорядоченных пар объектов. Рейтинг – это преобразование, которое отображает множество объектов на множество числовых значений и множество упорядоченных пар объектов – на разности соответствующих числовых значений. Нахождение рейтинга методом субъективного измерения требует особого контроля получаемой информации. С этой целью можно использовать метод альтернатив для проверки адекватности экспериментальных данных аксиоматическому определению рейтинга.
Дается определение независимости двух переменных по величине. Предполагается, что для независимых переменных существует аддитивное или мультипликативное представление рейтинга. Рассматривается пример субъективного измерения с помощью многокритериальной теории полезности (Multi-Attribute Utility Theory, MAUT), метода анализа иерархий (МАИ) и теории рейтингов. Эвристический МАИ может приводить к ошибкам в классификации. Математическая модель функции полезности в аксиоматическом методе MAUT является мультипликативной или аддитивной и в целом соответствует модели рейтинга с независимыми переменными.

Ключевые слова: теория категорий, репрезентативная теория измерений, законы Фехнера и Стивенса, функция полезности, метод анализа иерархий Саати, метод многофакторной теории полезности

Для цитирования. Романчак, В. М. Математическая модель независимых альтернатив в теории рейтингов / В. М. Романчак // Информатика. – 2019. − Т. 16, № 4. – С. 40–50.

Mathematical model of independence of alternatives in the theory of ratings

Vasily M. Romanchak

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus
E-mail: Romanchak@bntu.by

Abstract. This paper considers the alternative theory of measurement – theory of ratings. The axiomatic definition of ranking is based on definitions from category theory. The scope of the rating definition is the set of objects and the set of ordered pairs of objects. The rating is the transformation that maps the set of objects to the set of numeric values and the set of ordered pairs of objects to the difference of the corresponding numeric values. Finding the rating by subjective measurement requires special control of the information received. The method of alternatives can be used to verify the adequacy of experimental data to the axiomatic definition of the rating.
In the paper the definition of the independence of two variables in magnitude is formulated. It is assumed that for independent variables there is an additive or multiplicative representation of the rating. An example of subjective measurement using multi-criteria utility theory (MAUT), hierarchy analysis (AHP) and rating theory is considered. The AHP heuristic method can lead to classification errors. The mathematical model of the utility function in the axiomatic method MAUT is multiplicative or additive and generally corresponds to the rating model with independent variables.

Keywords: category theory, representational measurement theory, the laws of Fechner and Stevens, the utility function, analytic hierarchy process Saaty, multi-attribute utility theory

For citation. Romanchak, V. M. Mathematical model of independence of alternatives in the theory of ratings. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 40−50 (in Russian).

Введение. В настоящее время в теории измерений выделяют классическую и репрезентативную теории [1, 2]. В классической теории измерений задают операцию физического объединения (сложения) и аддитивную функцию. Например, для объектов A_1, A_2 и A_3 определена операция объединения $A_3 = A_1 + A_2$ и функция $q_i = q(A_i) > 0$, при этом выполняется равенство $q(A_1 + A_2) = q(A_1) + q(A_2)$. Понятия классической теории измерений обобщаются в теории меры. Классическую теорию измерений применяют при измерении аддитивных физических величин.

Для измерения неаддитивных величин была разработана теория репрезентативных измерений, базирующаяся на теории систем с отношениями. В процессе измерения объекты эмпирической системы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ отображаются функцией $q_i = q(A_i)$ на множество значений $q_1, q_2, \ldots, q_n$ числовой системы таким образом, что отношения между числами сохраняют отношения между объектами. Например, бинарное отношение B состоит из упорядоченных пар (A_i, A_j) и отображается в бинарное отношение на множестве чисел B^* так, что выполняется выражение

$$(A_i, A_j) \in B \Leftrightarrow (q(A_i), q(A_i)) \in B^*.$$

Тип шкалы определяется видом и свойствами функции q. Универсальная теория репрезентативных измерений на практике используется редко. Отмечается, что абстрактные математические понятия репрезентативной теории не имеют реальной интерпретации и не воспринимаются прикладными специалистами как инструмент измерения и анализа [3]. Применение теории репрезентативных измерений должно включать в себя валидацию метода измерения, что в некоторых случаях может быть затруднительным. Поэтому в настоящей работе рассматривается альтернативный вариант теории измерений – теория рейтингов [4, 5]. В теории рейтингов отмеченная проблема сводится к проверке соответствия математической модели рейтинга результатам измерений.

Теория рейтингов опирается на теорию категорий [6]. Рейтинг (R) – это отображение объектов A_i и упорядоченных пар (A_i, A_j) в числовые значения $R(A_i)$ и $R(A_i, A_j)$ [4, 5]. Рейтинг упорядоченных пар по определению является аддитивным:

$$R(A_i, A_j) = R(A_i, A_k) + R(A_k, A_i).$$

Значения рейтинга $R_i = R(A_i)$ определены как решение системы линейных уравнений $R_{ij} = R_i - R_j$. Значения величины являются функцией рейтинга: $q_i = q(R_i) = q(R(A_i))$ [4, 5]. Теория рейтингов может иметь некоторое преимущество перед классическим методом измерения и теорией репрезентативных измерений. Так, в ходе измерения получаем значения рейтинга, которые должны удовлетворять аксиоматическому определению рейтинга. Это позволяет выполнить проверку адекватности математической модели результатам измерения. Значения величины находят на основании значений рейтинга, тем самым процесс измерения отделяется от выбора шкалы измерений и нахождения значений величины. Отделение процесса измерения является конструктивным. Используя рейтинг, можно доказать эквивалентность психофизических законов Фехнера и Стивенса.

Цель настоящего исследования – сформулировать понятие независимости переменных в теории рейтингов.

Классическое определение рейтинга. Если в классической теории вероятностей аксиоматически определяются эквивалентные по вероятности элементарные события, то в классическом определении рейтинга [4, 5] таким образом рассматриваются эквивалентные по величине упорядоченные пары объектов (A_1, A_2), (A_2, A_3), …, (A_{n-1}, A_n). Тогда упорядоченное множество объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обладает особым свойством: значения величины объектов изменяются равномерно от объекта к объекту. Поскольку в первую очередь интерес вызывают субъективные измерения, приведем примеры таких объектов. Фехнер в своих опытах использовал «едва заметные различия» субъективных ощущений и считал их равными [7]. Терстоун предложил шкалу «равнокажущихся» интервалов для измерения субъективной величины, которая изменяется равномерно вместе с номером интервала [8]. Астроном Гиппарх, наблюдая за звездами, разделил их на шесть классов, одинаково отличающихся по яркости [9].

В случае если определены эквивалентные по величине упорядоченные пары объектов (A_1, A_2), (A_2, A_3), …, (A_{n-1}, A_n), будем говорить, что величина объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ изменяется равномерно. Для таких объектов зададим отображение на множество действительных чисел. В основном используют два способа численного сравнения: по разности и отношению размеров величины. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – конечное число объектов, для которых существует величина Q, принимающая значения q_i, $q_i = q(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Будем считать, что если величина Q изменяется равномерно от объекта к объекту, то разности и отношения последовательных значений величины постоянны. Для определенности считаем, что значения величины Q расположены в порядке возрастания. Это означает, что для первого способа сравнения выполняется равенство

$$q_{i+1} - q_i = \lambda, \ \ q_i, q_{i+1} \in \Re, \lambda > 0,$$

для второго способа – равенство

$$q_{i+1}/q_i = \lambda, \ \ q_i, q_{i+1} \in \Re^+, \lambda > 1,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n-1$; λ – неизвестная постоянная; $\Re$ – множество всех действительных чисел; $\Re^+$ – множество всех положительных чисел. Следовательно, если выбран первый способ сравнения, выполняется равенство

$$q_i - q_j = \lambda(i - j), \ \ q_i, q_j \in \Re; \tag{1}$$

если второй способ, – равенство

$$\ln(q_i/q_j) = \lambda(i - j), \ \ q_i, q_j \in \Re^+, \tag{2}$$

где λ – неизвестная постоянная, $\lambda > 0$. Обозначим правую часть выражений (1) и (2) как преобразование $R(A_i, A_j) = \lambda(i - j)$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть величина объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ изменяется равномерно. Рейтинг пары объектов $R(A_i, A_j) = \lambda(i - j)$ и рейтинг объектов $R(A_i) = \lambda i + C$, которые обозначим одинаковой буквой R, будем называть рейтингом, где C, λ – постоянные. Для рейтинга выполняется свойство $R(A_i, A_j) = R(A_i) - R(A_j)$.

Определение 1 рейтинга назовем классическим. В частном случае значения рейтингов равны разнице порядковых номеров объектов и номеру объекта $r(A_i, A_j) = i - j$, $r(A_i) = i$. Если величина объектов не изменяется, то $r(A_i, A_{i+1}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $r(A_i) = C$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 1. Пусть в качестве объектов $A_1, A_2, \ldots, A_6$ выбраны круги, площади которых, с точки зрения респондента, изменяются равномерно (табл. 1). Тогда в качестве значения рейтинга $r_i = R(A_i)$ можно выбрать номер круга: $r_i = i$, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Рейтинг площади объекта характеризует субъективный размер площади объекта. Значения рейтинга $R(A_i)$ можно рассматривать как аналог делений на шкале прибора измерения, а значения $R(A_i, A_j)$ – как расстояние между делениями шкалы.

Таблица 1

Равномерное изменение площади

r_i	1	2	3	4	5	6
A_i	●	●	●	●	●	●

Прямое измерение означает сравнение величины объекта с единицей измерения. Для этого шкала должна содержать фиксированный ноль. Если единица измерения отсутствует, единственным способом получения измерительной информации является сравнение объектов между собой. В результате сравнения двух объектов по величине получаем разницу значений величины (рейтинг) с точностью до неизвестного масштаба измерения. В рассматриваемом примере это означает, что возможны эквивалентные оценки рейтинга, например 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 3, 5, 7, 9, 11, 13. В общем случае рейтинг можно рассматривать, ориентируясь на определение функтора в теории категорий [6]. Ради простоты изложения непосредственно определения теории категорий не используются.

Аксиоматическое определение рейтинга. Областью определения рейтинга является множество объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и множество упорядоченных пар (A_i, A_j), причем выполняются условия:

1) для каждой пары объектов A_i, A_j определена единственная упорядоченная пара (A_i, A_j), $i > j$;

2) для упорядоченных пар (A_i, A_k) и (A_k, A_i) существует упорядоченная пара (A_i, A_j), которая называется суммой (композицией) упорядоченных пар $(A_i, A_k) + (A_k, A_j) = (A_i, A_j)$;

3) для каждого объекта A_i существует тождественная пара (A_i, A_i).

Определение 2. Рейтинг R – это отображение объектов A_i и упорядоченных пар объектов (A_i, A_j) в числовые значения $R(A_i)$ и $R(A_i, A_j)$, которое обладает следующими свойствами:

$$R(A_i, A_j) = R(A_i, A_k) + R(A_k, A_j), \tag{3}$$

$$R(A_i, A_j) = R(A_i) - R(A_j), \tag{4}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$. Чтобы сравнивать объекты в любом порядке, дополнительно считаем, что выполняется соотношение

$$R(A_i, A_j) = -R(A_j, A_i). \tag{5}$$

Если рейтинг пары объектов $R(A_i, A_j)$ получают сравнением объектов по величине, будем называть его *рейтингом величины*. В предлагаемой схеме измерения экспериментально сравнивают пары объектов (A_i, A_j) по величине и в результате находят рейтинг величины $R(A_i, A_j)$. Далее проверяют выполнение равенства (3) и находят значения рейтинга $R(A_i)$, используя формулу (4). Возможен альтернативный способ, при котором в результате эксперимента получают значения рейтинга $R(A_i)$. В этом случае равенство (3) выполняется тождественно и для проверки модели измерения необходимо сопоставлять отношения, которые состоят из упорядоченных пар (A_i, A_j) и $(R(A_i), R(A_j))$. Такой анализ соответствует репрезентативной теории измерения и в настоящей работе не рассматривается.

Пусть для объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ получены числовые значения рейтинга $R_{ij} = R(A_i, A_j)$, которые удовлетворяют равенству (3), где $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда значения λR_{ij} также удовлетворяют равенству (3), где λ – положительное действительное число. В дальнейшем будем считать, что $R(A_i, A_j) = \lambda r_{ij}$, где r_{ij} – численное значения рейтинга, λ – неизвестная положительная постоянная. Тогда система линейных уравнений для нахождения рейтинга объектов $R(A_i)$ примет вид

$$\lambda r_{ij} = R_i - R_j, \tag{6}$$

где λ – неизвестная положительная постоянная; r_{ij} – частные значения рейтинга, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$; R_i – значения $R_i = R(A_i)$ рейтинга объектов. Система уравнений (6) разрешима, поскольку выполняются равенства (3), (5) и в качестве решения системы (6) можно взять $R_i = \lambda r_{i1}$. Решение системы уравнений (6) определено с точностью до линейного преобразования $R_i = \lambda r_i + C$, где r_i – частное решение системы уравнений (6), C – постоянная. Для доказательства достаточно рассмотреть различные решения системы (6) R_{1i} и R_{2i}, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $\lambda_2(R_{1i} - R_{1j}) = \lambda_1(R_{2i} - R_{2j})$, где λ_1, λ_2 – неизвестные постоянные. Следовательно, $\lambda_2(R_{1i} - R_{11}) = \lambda_1(R_{2i} - R_{21})$. Утверждение доказано, т. е. рейтинг объектов $R(A_i)$ определен с точностью до линейного преобразования, а рейтинг пары объектов $R(A_i, A_j)$ – с точностью до постоянной. Если величина объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ изменяется равномерно, то $R(A_i, A_{i+1}) = \lambda$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, и аксиоматическое определение рейтинга совпадает с классическим определением.

Критерий существования рейтинга. Субъективное измерение имеет свои особенности. Например, если повторять вопросы, то респондент может просто повторять неправильные ответы, чтобы не выглядеть некомпетентным. В методе альтернатив вопросы не повторяют, а задают по-разному: в первом случае все объекты сравнивают с объектом A_1, во втором случае – с объектом A_2. В итоге получают две альтернативные системы уравнений:

$$\lambda r_{i1} = R_i - R_1, \tag{7}$$

$$\lambda r_{i2} = R_i - R_2, \tag{8}$$

где R_i – рейтинг объектов, $i = 1, 2, \ldots, n$; λ – постоянная; r_{i1}, r_{i2} – частные значения рейтинга пар объектов, которые оценивают экспериментально. Система уравнений (7) является подсистемой системы линейных уравнений (6), любое уравнение системы (6) является линейной комбинацией строк системы уравнений (7). Следовательно, система (7) эквивалентна системе уравнений (6). Также можно показать, что система (8) эквивалентна системе уравнений (6). Если для экспериментальных данных альтернативные системы уравнений (7) и (8) эквивалентны, то это может служить подтверждением существования рейтинга субъективного измерения. Запишем для частного случая $j = 1$, $k = 2$ равенство (3):

$$R_{i1} = R_{i2} + R_{21}, \tag{9}$$

где $R_{i1} = R(A_i, A_1)$, $R_{i2} = R(A_i, A_2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $R_{21} = -R_{12}$. Тогда для некоторых λ_1, λ_2 выполняется $R_{i1} = \lambda_1 r_{i1}$ и $R_{i2} = \lambda_2 r_{i2}$, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, где r_{i1}, r_{i2} – частные рейтинги. Считаем, что $r_{i1} = r_{i1}^1 + \nu_i^1$, $r_{i2} = r_{i2}^2 + \nu_i^2$, где r_{i1}^1, r_{i2}^2 – экспертные оценки рейтингов, ν_i^1, ν_i^2 – случайные ошибки (значения случайной величины). Тогда из равенства (9) следует выражение

$$\lambda_1 r_{i1}^1 = \lambda_2 r_{i2}^2 - \lambda_2 r_{1,2}^2 - \lambda_1 \nu_i^1 + \lambda_2 \nu_i^2. \tag{10}$$

Подставив экспертные оценки рейтинга r_{i1}^1, r_{i2}^2 в левую часть альтернативных систем (7), (8) для $\lambda = 1$ (можно выбрать любое другое число с $\lambda \neq 0$), получим альтернативные системы уравнений M_1 и M_2:

$$r_{i1}^1 = r_i^1 - r_1^1, \tag{11}$$

$$r_{i2}^2 = r_i^2 - r_2^2, \tag{12}$$

где r_i^1, r_i^2 – решения альтернативных систем (11) и (12), $i = 1, 2, \ldots, n$. Будем считать, что r_1^1, r_2^2 – произвольные постоянные. Из выражений (10)–(12) следует соотношение

$$\lambda_1 r_i^1 = \lambda_2 r_i^2 + \left(\lambda_1 r_1^1 - \lambda_2 r_2^2\right) + \left(\lambda_2 \nu_i^2 - \lambda_1 \nu_i^1\right), \tag{13}$$

где λ_1 и λ_2 – постоянные, ν_i^1, ν_i^2 – случайные величины; r_i^1, r_i^2 – частные решения систем (11) и (12), $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда в первых скобках в выражении (13) находится неизвестная постоянная, а во вторых – нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией (если предположить, что ν_i^1, ν_i^2 – независимые и нормально распределенные случайные величины с равным нулю математическим ожиданием и постоянной дисперсией). Когда эксперт отвечает на вопросы двух различных тестов так, что случайные величины r_i^1 и r_i^2 оказываются коррелированными, есть основание считать, что построена хорошая математическая модель. В этом случае между частными решениями систем (11) и (12) существует линейная зависимость (13) с точностью до неизвестной постоянной и случайных ошибок. Сформулируем критерий существования рейтинга.

Критерий K_1. Значения $r_{ij} = r(A_i, A_j)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, являются оценками рейтинга, если решения альтернативных систем M_1 и M_2 связаны адекватной линейной зависимостью

$$r_i^2 = kr_i^1 + C + \varepsilon_i, \tag{14}$$

где коэффициент регрессии k положителен и значим; $i = 1, \ldots, n$; C – неизвестная постоянная; ε_i – случайные ошибки, независимые нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием $E(\varepsilon_i) = 0$ и постоянной дисперсией; r_i^1 и r_i^2 – частные решения альтернативных систем (11) и (12).

Таким образом, выполнение равенства (14) означает, что значения r_{ij} являются оценками рейтинга и для них выполняются равенства (3).

Пример 2. Психологи выяснили, что индивидуальные предпочтения в выборе цвета субъективны. Для нахождения рейтинга цвета можно взять за основу метод парных сравнений. Пусть испытуемому в случайном порядке предъявляют шесть объектов (цветные карты $A_1, A_2, \ldots, A_6$) и просят в каждой паре выбрать наиболее красивый цвет. Каждая пара предъявляется по 50 раз. В результате для каждой пары (A_i, A_j) можно получить разность частот, которую обозначим r_{ij}. (табл. 2). Например, если в 50 испытаниях 30 раз была выбрана карта A_i и 20 раз карта A_j, то $r_{ij} = 30 - 20 = 10$. Если разность частот r_{ij}, $i, j = 1, \ldots, 6$, удовлетворяет условиям (3) и (5), то значения r_{ij} можно рассматривать как рейтинг упорядоченных пар $r_{ij} = r(A_i, A_j)$, $i, j = 1, \ldots, 6$. Поскольку данные в табл. 2 могут содержать случайные ошибки, применим статистический критерий K_1.

Таблица 2

Результаты парных сравнений, r_{ij}

A_i \ A_j	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	0	4	10	17	21	24
A_2	–4	0	1	8	17	20
A_3	–10	–1	0	1	7	18
A_4	–17	–8	–1	0	3	9
A_5	–21	–17	–7	–3	0	3
A_6	–24	–20	–18	–9	–3	0

Выбрав два столбца в табл. 2, r_{i1}, r_{i4}, $i = 1, 2, \ldots, 6$, получим две альтернативные системы уравнений M_1 и M_2, аналогичные системам (7) и (8). Альтернативные значения рейтинга $\mathbf{r}^1$ и $\mathbf{r}^2$ (для $r_6 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$) приведены в табл. 3.

Таблица 3

Рейтинг альтернатив

$\mathbf{r}^1$	24	20	14	7	3	0
$\mathbf{r}^2$	26	17	10	9	6	0
$\mathbf{r}^3$	8,0	6,7	4,7	2,3	1,0	0,0

Критерий K_1 позволяет показать, что значения $r_{ij} = r(A_i, A_j)$ можно считать оценками рейтинга. Значение статистики Фишера $F(1,4) = 39{,}8$ с уровнем $p < 0{,}0033$ подтверждает гипотезу об адекватности модели $r^2 = -0{,}083 + 1{,}007r^1$. Кроме того, коэффициент регрессии $k = 1{,}007$ статистически значим с уровнем $p < 0{,}0033$. На основании критерия K_1 делаем вывод о существовании рейтинга. В третьей строке табл. 3 приведены значения рейтинга, полученные преобразованием $\mathbf{r}^3 = \frac{1}{3}\mathbf{r}^1$.

Независимость переменных. Переменной может быть как реальная физическая, так и некоторая абстрактная величина. В данной работе ограничимся случаем двух переменных. Пусть X и Y – две дискретные переменные, которые принимают значения $x_1, x_2, \ldots, x_L$ и $y_1, y_2, \ldots, y_M$.

Областями определения рейтинга являются множество объектов (x_i, y_j), $i = 1, 2, \dots, L$, $j = 1, 2, \dots, M$, и множество упорядоченных пар объектов $((x_i, y_j), (x_k, y_l))$, $i, k = 1, 2, \dots, L$, $j, l = 1, 2, \dots, M$. В соответствии с общей схемой измерения считаем, что определен рейтинг объектов как функция двух переменных $R_{ij} = R(x_i, y_j)$, $i = 1, 2,\dots, L$, $j = 1, 2,\dots, M$, с точностью до линейного преобразования $R(x_i, y_j) = \lambda r(x_i, y_j) + C$, где $r(x_i, y_j)$ – частные значения рейтинга, $\lambda > 0$, λ, C – постоянные.

Определение 3. Пусть определен рейтинг двух переменных $R(x_i, y_i) = \lambda r(x_i, y_i) + C$. Переменные X и Y независимы, если для рейтинга $R(x_i, y_j)$ существуют частные значения рейтинга $r_{ij} = r(x_i, y_j)$, для которых верно выражение

$$r(x_i, y_j) = r(x_i, y_1) + r(x_1, y_j) \tag{15}$$

или

$$r(x_i, y_j) = r(x_i, y_1)r(x_1, y_j), \tag{16}$$

где $r(x_i, y_1)$, $r(x_1, y_j)$ – условные значения рейтинга объектов $i = 1, 2, \dots, L$, $j = 1, 2, \dots, M$. В первом случае необходимо выполнить условие $r(x_1, y_1) = 0$, а во втором случае – условие $r(x_1, y_1) = 1$.

Если в равенстве (15) $i = j = 1$, то $r(x_1, y_1) = 2r(x_1, y_1)$ и, соответственно, выполняется условие $r(x_1, y_1) = 0$. Если в равенстве (16) $i = j = 1$, то $r(x_1, y_1) = (r(x_1, y_1))^2$. Следовательно, выполняется условие $r(x_1, y_1) = 1$ или $r(x_1, y_1) = 0$. Если $r(x_1, y_1) = 0$ и выполняется равенство (16), то $r(x_i, y_j) = r(x_i, y_1)r(x_1, y_j)r(x_1, y_1) = 0$ и модель становится вырожденной. Вырожденную модель можно рассматривать как частный случай аддитивной модели (15).

Если известны условные рейтинги $r_{i1} = r(x_i, y_1)$ и $r_{1j} = r(x_1, y_j)$, то рейтинг $r_{ij} = r(x_i, y_j)$ находится по формуле (15) или (16) в предположении, что переменные X и Y независимы по величине. В общем случае значения рейтинга $r'_{ij} = r'(x_i, y_j)$ определены с точностью до линейного преобразования. Пусть $r'_{ij} = \lambda r_{ij} + \gamma$, где $i = 1, 2, \dots, L$, $j = 1, 2, \dots, M$; r_{ij} – нормализованные значения рейтинга, $r_{ij} = r(x_i, y_j)$, для которых выполняется условие $r_{11} = 0$; λ, γ – неизвестные постоянные. Из формулы (16) получаем равенство

$$\lambda r_{ij} + \gamma = (\lambda r_{i1} + \gamma)(\lambda r_{1j} + \gamma). \tag{17}$$

Так как $r_{11} = 0$, то из уравнения (17) следует, что $\gamma = 1$ или $\gamma = 0$. Тогда если $\gamma = 1$, то на основании формулы (17) получаем равенство

$$\lambda r_{ij} + 1 = (\lambda r_{i1} + 1)(\lambda r_{1j} + 1). \tag{18}$$

Если $\gamma = 0$, модель (17) сводится к вырожденной: $r_{ij} = \lambda r_{i1}r_{1j} = (\lambda r_{i1})^2 r_{1j}r_{11} = 0$. Сделав аналогичные замены переменных во втором соотношении (15): $r'_{ij} = \lambda r_{ij} + \gamma$, где $i = 1, 2, \dots, L$, $j = 1, 2, \dots, M$ и $\lambda \neq 0$, $r_{11} = 0$, получим $\gamma = 0$ и аддитивное представление

$$r_{ij} = r_{i1} + r_{1j}. \tag{19}$$

Мультипликативная модель (18) при малых λ становится аддитивной (19). Действительно, пусть r_{i1} и r_{1j} фиксированы и $\lambda \to 0$, тогда выполняется равенство

$$r_{ij} = (\lambda r_{i1} + 1)(\lambda r_{1j} + 1) - 1)/\lambda \to r_{i1} + r_{1j}.$$

Сравним теорию рейтингов с MAUT [10] и МАИ [11]. Общим для всех трех методов является возможность субъективно оценивать величину. В МАИ математическая модель строится эвристически, в MAUT – аксиоматически. Рассмотрим пример, представленный в работе [12]. Чтобы получить рейтинг величины, можно использовать вербальную шкалу различий [5] (табл. 4), где r_{ij} – результат субъективного сравнения объектов A_i и A_j по величине.

Таблица 4

Вербальная шкала различий

Степень проявления	Числовая оценка r_{ij}
Отсутствует	0
Малая	2
Средняя	4
Большая	6
Максимальная	8
Промежуточных значений	1, 3, 5, 7
$r(A_j, A_j)$	$r_{ji} = -r_{ji}$

Пример 3. Эксперт оценивает качество подготовки четырех респондентов с помощью двух эквивалентных по сложности тестов. Пусть респонденты получили оценки

$$(5, 4), (3, 5), (4, 4), (5, 3). \tag{20}$$

Запись (5, 4) означает, что первый респондент по первому тесту получил оценку 5, а по второму тесту – 4. Требуется дать комплексную оценку качества подготовки каждого респондента.

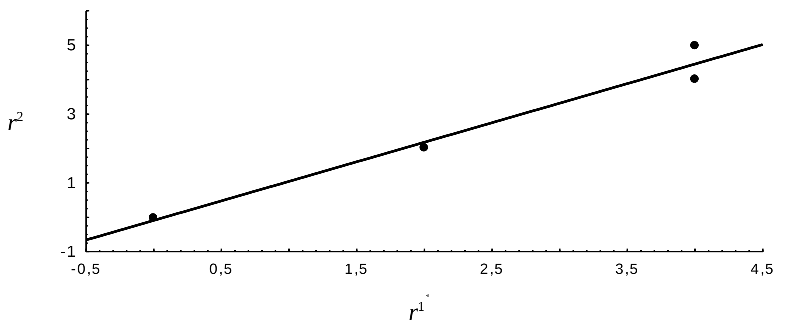
Теория рейтингов. Пусть переменная X принимает значения $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, а переменная Y – значения $y_1 = 3$, $y_2 = 4$, $y_3 = 5$. Определим объекты $A_{ij} = (x_i, y_j)$ и зададим значения рейтинга пары объектов $r_{ij,kl} = r(A_{ij}, A_{kl})$ и значения рейтинга объектов $r_{ij} = r(A_{ij})$, $r_{kl} = R(A_{kl})$, $i, j = 1, 2, 3$, $k, l = 1, 2, 3$. Рассмотрим пример планирования эксперимента, представленный в табл. 5. Сравнивая объекты $A_{21} = (4,3)$ и $A_{11} = (3,3)$, эксперт считает, что объект A_{21} имеет малое преимущество перед объектом A_{11}. Согласно табл. 4 рейтинг пары объектов (A_{21}, A_{11}) равен двум, $r_{21,11} = 2$, ему соответствует уравнение альтернативной системы M_1. В табл. 5 приводятся значения вектора $\mathbf{r^1}$, являющегося частным решением системы M_1 при $\lambda_1 = 1$, $r_{11} = 0$, планы эксперимента, уравнения альтернативной системы M_2 и значения вектора $\mathbf{r^2}$ (частного решения системы M_2) для $\lambda_2 = 1$, $r_{11} = 0$.

Таблица 5

Планирование эксперимента

План	Система M_1	$\mathbf{r^1}$	План	Система M_2	$\mathbf{r^2}$
(A_{21}, A_{11})	$r_{21} - r_{11} = 2$	$r_{21} = 2$	(A_{21}, A_{11})	$r_{11} - r_{31} = -4$	$r_{21} = 2$
(A_{31}, A_{11})	$r_{31} - r_{11} = 4$	$r_{31} = 4$	(A_{31}, A_{21})	$r_{21} - r_{31} = -2$	$r_{31} = 4$
(A_{33}, A_{11})	$r_{33} - r_{11} = 4$	$r_{33} = 4$	(A_{33}, A_{31})	$r_{33} - r_{31} = 1$	$r_{33} = 5$

Для подтверждения линейной зависимости между решениями систем M_2 и M_1 отметим на рисунке точки (r_i^2, r_i^1) и построим уравнение регрессии $r^2 = -0{,}091 + 1{,}13r^1$.



Линейная регрессия r^2 на r^1

Визуальный анализ графика показывает, что данные сгруппированы вблизи линии регрессии. Значение статистики Фишера $F(1, 2) = 52{,}1$ с уровнем $p < 0{,}019$ подтверждает гипотезу об адекватности модели. Кроме того, коэффициент детерминации R^2 показывает, что на 96,3 % значения переменной r^2 обусловлены вариацией переменной r^1. Статистика Стьюдента $t(2) = 7{,}22$ с уровнем $p = 0{,}019$ подтверждает статистическую значимость коэффициента регрессии $k = 1{,}13$. Поэтому можно сделать вывод, что измерение рейтинга надежно.

Значения рейтинга r_{13} и r_{31} совпадают в силу симметрии, поскольку оба теста считаются одинаково важными. Если известны значения рейтинга r_{1i}, r_{i1} и r_{33}, то можно найти рейтинг r_{ij}. Рассмотрим два случая, которые отличаются только значениями r_{33}.

1. Выбираем значения рейтинга из третьего столбца в табл. 5 и на основании равенства (18) получаем уравнение для определения параметра λ:

$$\lambda r_{33} + 1 = (\lambda r_{31} + 1)(\lambda r_{13} + 1). \tag{21}$$

Решая уравнение (21), находим значение параметра $\lambda = -0{,}25$. Тогда на основании соотношения (18) рейтинг произвольного объекта (табл. 6) рассчитывается по формуле

$$r_{ij} = 4 - (4 - r_{i1})(4 - r_{1j})/4. \tag{22}$$

2. Выбираем значения рейтинга из третьего столбца в табл. 5, но считаем, что $r_{33} = 8$. Тогда из уравнения (21) следует, что $8\lambda + 1 = (4\lambda + 1)(4\lambda + 1)$ и $\lambda = 0$. Следовательно, надо использовать аддитивное представление (19).

Рейтинги, найденные по мультипликативной (табл. 6) и аддитивной (табл. 7) формулам, отличаются существенно. Жирным шрифтом в табл. 6 и 7 выделены значения, найденные экспериментально.

Таблица 6

Мультипликативная модель рейтинга r_{ij}

i \ j	1	2	3
1	**0,00**	**2,00**	**4,00**
2	**2,00**	3,00	4,00
3	**4,00**	4,00	**4,00**

Таблица 7

Аддитивная модель рейтинга r_{ij}

i \ j	1	2	3
1	**0,0**	**2,0**	**4,0**
2	**2,0**	4,0	6,0
3	**4,0**	6,0	**8,0**

Многокритериальная теория полезности **[10].** Функция полезности имеет аксиоматическое обоснование, с ее помощью можно представить предпочтения на некотором множестве альтернатив. В частности, если факторы $X = (x_1, x_2, x_3)$ и $Y = (y_1, y_2, y_3)$ независимы по полезности, то функция полезности $u(x_i, y_j)$ от двух аргументов x_i и y_j является полилинейной и может быть записана для $k \neq 0$ и $k = 0$ соответственно в виде

$$ku(x_i, y_j) + 1 = (1 + ku(x_i, y_1))(1 + ku(x_1, y_j)) \tag{23}$$

и

$$u(x_i, y_j) = u(x_i, y_1) + u(x_1, y_j). \tag{24}$$

Здесь $u(x_i, y_1)$, $u(x_1, y_j)$ – частные функции полезности, где $i = 1, 2, 3$ и $j = 1, 2, 3$, k – постоянные, которые находят, используя дополнительную информацию. При этом $u(x_1, y_1) = 0$, $u(x_3, y_3) = 1$. Неизвестные значения $u(x_2, y_3)$ и $u(x_3, y_2)$ находятся из равенств

$$u(x_1, y_3) = (1 - p_1)u(x_1, y_1) + p_1 u(x_3, y_3), \tag{25}$$

$$u(x_1, y_2) = (1 - p_2)u(x_1, y_1) + p_2 u(x_3, y_3). \tag{26}$$

Чтобы найти вероятность p_1 в уравнении (25), эксперту предлагается сделать выбор из двух вариантов: сразу получить альтернативу (x_1, y_3) либо участвовать в лотерее, в которой можно получить самую лучшую альтернативу (x_3, y_3) с вероятностью p_1 или самую худшую (x_1, y_1) с вероятностью $1 - p_1$. Последовательно уточняя, подбирают вероятность p_1 таким образом, чтобы оба предложенных варианта казались эксперту одинаково полезными, тогда будет выполняться равенство (25). Аналогично находим вероятность p_2, тогда $u(x_1, y_3) = p_1$, $u(x_1, y_2) = p_2$

и в силу симметрии $u(x_1, y_3) = u(x_3, y_1)$, $u(x_1, y_2) = u(x_2, y_1)$. Из равенства (23) для $i = 3$ и $j = 3$ следует уравнение

$$k + 1 = (1 + kp_1)(1 + kp_1),\ k \neq 0, \tag{27}$$

где k – постоянная масштаба. Рассмотрим два случая:

1. Пусть $p_1 = 1$, $p_2 = 1/2$, тогда $k = -1$, $u(x_1, y_3) = 1$, $u(x_1, y_2) = ½$. На основании (23) получим

$$u(x_i, y_j) = 1 - (1 - u(x_i, y_1))(1 - u(x_1, y_j)).$$

Следовательно, выполняется равенство $u(x_i, y_j) = r(x_i, y_j)/4$, где $r(x_i, y_j)$ находится на основании мультипликативной модели (16) (см. табл. 6).

2. Пусть теперь $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/4$, $u(x_1, y_3) = 1/2$ и $u(x_1, y_2) = 1/4$. Тогда в уравнении (27) $k = 0$, функцию полезности находим по формуле (24). В этом случае выполняется $u(x_i, y_j) = r(x_i, y_j)/8$, где $r(x_i, y_j)$ находится из аддитивной модели рейтинга (15) (табл. 7).

В данном примере вероятность p_1 является величиной, определяемой субъективно. Объективные и субъективные значения вероятности не совпадают (парадокс Алле). Запишем равенство (25) в виде $u(x_2, y_3) - u(x_1, y_1) = p_1(u(x_3, y_3) - u(x_1, y_1))$. Следовательно, чтобы найти вероятность p_1, оценим разности $u(x_2, y_3) - u(x_3, y_3)$ и $u(x_2, y_2) - u(x_3, y_3)$. Для этого достаточно выполнить парные сравнения с помощью табл. 4.

Метод анализа иерархий. Варианты сравнивают с помощью аддитивной функции ценности

$$u(x_i, y_j) = w_1p_1(x_i) + w_2p_2(y_j), \tag{28}$$

где w_1 и w_2 – коэффициенты, приоритеты критериев X и Y (их относительные веса); $p_1(x_i)$ и $p_2(y_j)$ – приоритеты варианта (x_i, y_j) относительно критериев X и Y соответственно. Величина $u(x_i,y_j)$ называется интегральным приоритетом варианта (x_i, y_j). В статье [12] рассматривается применение МАИ к подмножеству вариантов (20). Показано, что он приводит к противоречивым результатам. В работе [13] предпринята попытка реабилитировать МАИ, используя общую аддитивную модель в виде (28) для всех возможных вариантов (x_i, y_j), $i, j = 1, 2, 3$. В статье [14] доказано, что и в этом случае может возникнуть противоречие.

Анализ выражений (28) и (19) показывает, что модель МАИ может совпадать с аддитивным вариантом метода рейтинга. Предположим, что оба критерия имеют одинаковую важность, а результатом парного сравнения вариантов x_1, x_2, x_3 с вариантом x_3 является вектор (1/3, 2/3,1) и матрица парных сравнений согласована [11]. Тогда вектор приоритетов $(p_1(x_1), p_1(x_2), p_1(x_3)) =$ (1/6, 1/3, 1/2) и в силу симметрии выполняются равенства $p_1(x_i) = p_2(y_j)$ и $w_1 = w_2 = 1/2$. В этом случае функция ценности (28) с точностью до линейного преобразования совпадает с аддитивной моделью рейтинга $u(x_i, y_j) = (r(x_i, y_j) + 4)/24$, где $r(x_i, y_j)$ находятся по табл. 7.

Заключение. В работе уточнено определение рейтинга величины и дано определение независимых переменных. Теория рейтингов может применяться в задачах принятия решений, распознавания образов при оценке качества и нахождении функции полезности. Методы MAUT и методы теории рейтингов с разных позиций подходят к определению функцию полезности, но могут приводить к одинаковым математическим моделям. Функция ценности МАИ может совпадать только с аддитивной моделью в теории рейтингов. Такое ограничение является существенным недостатком МАИ.

Список использованных источников

1. Кнорринг, В. Г. Развитие репрезентационной теории измерений / В. Г. Кнорринг // Измерения. Контроль. Автоматизация. – 1980. – № 11–12. – С. 3–9.

2. Толстова, Ю. Н. Краткая история развития репрезентативной теории измерений / Ю. Н. Толстова // Заводская лаборатория. – 1999. – № 3. – С. 49–57.

3. Cliff, N. Abstract measurement theory and the revolution that never happened / N. Cliff // Psychological Science. – 1992. – Vol. 3(3). – P. 186–190.

4. Романчак, В. М. Измерение нефизической величины / В. М. Романчак // Системный анализ и прикладная информатика. – 2017. – № 4. – С. 39–44.

5. Романчак, В. М. Субъективное оценивание вероятности / В. М. Романчак // Информатика. – 2018. − Т. 15, № 2. – С. 74–82.

6. Маклейн, С. Категории для работающего математика : пер. с англ. / С. Маклейн. – М. : Физматлит, 2004. – 352 с.

7. Fechner, G. T. Elemente der Psychophysik / G. T. Fechner. – Leipzig : Breitkopf & Hartel, 1860. – 336 p. (in German).

8. Thurstone, L. L. Attitudes can be measurement / L. L. Thurstone // American Journal of Sociology. – 1928. – Vol. 33. – P. 523–554.

9. Сурдин, В. Г. Звезды / В. Г. Сурдин. – М. : Физматлит, 2008. – 428 с.

10. Кини, Р. Л. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения : пер. с англ. / Р. Л. Кини, Х. Райфа. – М. : Радио и связь, 1981. – 560 с.

11. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий : пер. с англ. / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1989. – 316 с.

12. Подиновский, В. В. О некорректности метода анализа иерархий / В. В. Подиновский, О. В. Подиновская // Проблемы управления. – 2011. – № 1. – С. 8–13.

13. Митихин, В. Г. Об одном контрпримере для метода анализа иерархий / В. Г. Митихин // Проблемы управления. – 2012. – № 3. – С. 77–79.

14. Подиновский, В. В. Еще раз о некорректности метода анализа иерархий / В. В. Подиновский, О. В. Подиновская // Проблемы управления. – 2012. – № 4. – С. 75–78.

References

1. Knorring V. G. Razvitie reprezentacionnoj teorii izmerenij [The development of the representational theory of measurement]. Izmerenija, kontrol', avtomatizacija [*Measurement, Control and Automation*], 1980. no. 11–12, pp. 3–9 (in Russian).

2. Tolstova Yu. N. Kratkaja istorija razvitija reprezentativnoj teorii izmerenij [A brief history of the development of representative measurement theory]. Zavodskaja laboratorija [*Industrial Laboratory*], 1999, no. 3, pp. 49–57 (in Russian).

3. Cliff N. Abstract measurement theory and the revolution that never happened. *Psychological Science*, 1992, vol. 3(3), pp. 186–190.

4. Romanchak V. M. Izmerenie nefizicheskoj velichiny [Measurement of non-physical quantity]. Sistemnyj analiz i prikladnaja informatika [*System Analysis and Applied Informatics*], 2017, no. 4, pp. 39–44 (in Russian).

5. Romanchak V. M. Sub"ektivnoe ocenivanie verojatnosti [The measurement of subjective probability]. Informatika [*Informatics*], 2018, vol. 15, no. 2, pp. 74–82 (in Russian).

6. Mac Lane S. *Categories for the Working Mathematician*. New York, Springer-Verlag, 1978, 317 p.

7. Fechner G. T. *Elemente der Psychophysik*. Leipzig, Breitkopf & Hartel, 1860, 336 p. (in German).

8. Thurstone L. L. Attitudes can be measurement. *American Journal of Sociology*, 1928, vol. 33, pp. 523–554.

9. Surdin V. G. Zvjozdy. *The Stars*. Moscow, Fizmatlit, 2008, 428 p. (in Russian).

10. Keeney R. L., Raiffa H. *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. New York, Wiley, 1976, 569 p.

11. Saaty T. L. *The Analytic Hierarchy Process*. New York, McGraw Hill, 1980.

12. Podinovski V. V., Podinovskaya O. V. O nekorrektnosti metoda analiza ierarhij [On the theoretical incorrectness of the analytic hierarchy]. Problemy upravlenija [*Control Sciences*], 2011, no. 1, pp. 8–13 (in Russian).

13. Mitikhin V. G. Ob odnom kontrprimere dlja metoda analiza ierarhij [On a counterexample for the analytic hierarchy process]. Problemy upravlenija [*Control Sciences*], 2012, no. 3, pp. 77–79 (in Russian).

14. Podinovski V. V., Podinovskaya O. V. Eshhe raz o nekorrektnosti metoda analiza ierarhij [Another note on the incorrectness of the analytic hierarchy]. Problemy upravlenija [*Control Sciences*], 2012, no. 4, pp. 75–78 (in Russian).

Информация об авторе

Романчак Василий Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерной математики, Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь.
E-mail: Romanchak@bntu.by

Information about the author

Vasily M. Romanchak, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof. of the Department of Engineering Mathematics, Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus.
E-mail: Romanchak@ bntu.by