ИНФОРМАТИКА

2004 апрель-июнь №2

УДК 62.519

Ю.В. Поттосин, Е.А. Шестаков

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМ ПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПО ИХ ЗАДАНИЮ В ВИДЕ КОМПАКТНЫХ ТАБЛИЦ

Рассматривается ряд табличных методов декомпозиции систем полностью определенных булевых функций. Особенностью этих методов является то, что исходная система задается в виде или компактной таблицы, или компактной таблицы с мнимыми значениями, которые, как правило, имеют меньшие размеры, чем карты Карно. Приводятся также результаты экспериментального исследования некоторых из этих методов на типовых примерах.

Введение

Алгебра пар разбиений и систем множеств, разработанная Хартманисом и Стернзом [1], успешно используется для решения разнообразных задач декомпозиции последовательного автомата. Однако этот подход не был распространен на комбинационный автомат, который часто представляется системой булевых функций. Для декомпозиции систем булевых функций наряду с традиционными методами [2] используются также и карты Карно. Представление булевых функций в виде карт Карно широко применяется при решении различных задач логического проектирования. Впервые это представление было привлечено для решения задачи декомпозиции как полностью определенных, так и частичных булевых функций в работах [3–6]. Эти результаты легко обобщаются и на системы булевых функций [7–10].

Разбиение и система множеств [1], используемые в алгебре пар, являются частными случаями такого понятия, как покрытие, которое вполне применимо для целей декомпозиции систем булевых функций. Впервые покрытие, представленное в виде булевой матрицы, получившей в более поздних работах [11–13] название «матрицы пересечений», было применено А.Д. Закревским для решения задачи декомпозиции в работе [7]. Этот метод, предложенный для декомпозиции ПЛМ и названный методом тождественных отображений, в дальнейшем был развит в работах [14–17]. Матрица пересечений также успешно используется и для решения некоторых задач кодирования [11]. На основе понятия «blanket», являющегося очень близким к понятию покрытия троичной матрицы, в работах [17, 18] был разработан оригинальный подход к декомпозиции систем частично определенных как булевых, так и многозначных функций. Понятие покрытия троичной матрицы было введено в работе [8] и обобщено на секционированные троичные матрицы в работах [19, 20].

Компактная таблица, аналогичная картам Карно, строится на основе покрытия секционированной троичной матрицы, а также операции произведения этих покрытий [19, 20]. Компактные таблицы во многих случаях дают возможность задать исходную систему булевых функций посредством таблицы, имеющей меньшие размеры, чем карты Карно.

На основе понятия покрытия секционированной троичной матрицы и компактных таблиц, как показано в настоящей работе, возможно построение различных декомпозиций полностью определенных булевых функций. Приводятся также результаты экспериментального исследования некоторых из этих методов на типовых примерах (benchmarks).

Настоящая работа является продолжением [20], поэтому за всеми недостающими определениями и утверждениями нужно обращаться к этой работе.

1. Декомпозиция по компактной таблице

Пусть система полностью определенных булевых функций $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задана секционированной троичной матрицей $C=(U,\alpha)$ и булевой матрицей V [20]. Каждая секция матрицы U задает элементарные конъюнкции, входящие в одни и те же ДНФ, представляемые строкой матрицы V. Пусть также заданы подмножества W, Z множества $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ аргументов системы, удовлетворяющие условиям $X=W\cup Z$, $|W|<n$, $|Z|<n$. Рассматривая секции матрицы U как задание ДНФ некоторых функций $v_1(\boldsymbol{x})$, $v_2(\boldsymbol{x})$, …, $v_s(\boldsymbol{x})$, представим каждую из этих функций в виде $v_i(\boldsymbol{x}) = v_i^1(\boldsymbol{w}) \wedge v_i^2(\boldsymbol{z})$. Полученные таким образом последовательности можно записать как $v_1^1(\boldsymbol{w})$, $v_2^1(\boldsymbol{w})$, …, $v_s^1(\boldsymbol{w})$ и $v_1^2(\boldsymbol{z})$, $v_2^2(\boldsymbol{z})$, …, $v_s^2(\boldsymbol{z})$, где векторная переменная $\boldsymbol{w}$ составлена из переменных множества W, а векторная переменная $\boldsymbol{z}$ – из переменных множества Z.

Рассмотрим следующую задачу декомпозиции систем полностью определенных булевых функций и покажем, как она может быть решена с использованием компактных таблиц.

Для заданной системы полностью определенных булевых функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ найти суперпозицию $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$, такую, что число булевых компонент в векторной переменной $\boldsymbol{g}$ минимально и сумма чисел компонент в векторных переменных $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{z}$ меньше n.

В предлагаемом приближенном методе [19] решения этой задачи первый шаг, с которого начинается поиск решения, связан с построением по последовательностям $v_1^1(\boldsymbol{w})$, $v_2^1(\boldsymbol{w})$, …, $v_s^1(\boldsymbol{w})$ и $v_1^2(\boldsymbol{z})$, $v_2^2(\boldsymbol{z})$, …, $v_s^2(\boldsymbol{z})$ и матрице V компактной таблицы, задающей исходную систему $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Этот шаг подробно рассмотрен в работе [20].

Пусть $\pi^1=\{\pi_1^1, \pi_2^1, \ldots,\pi_p^1\}$ – покрытие последовательности $v_1^1(\boldsymbol{w})$, $v_2^1(\boldsymbol{w})$, …, $v_s^1(\boldsymbol{w})$, а π^2 – покрытие последовательности $v_1^2(\boldsymbol{z})$, $v_2^2(\boldsymbol{z})$, …, $v_s^2(\boldsymbol{z})$.

Полагаем, что система $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задана компактной таблицей M. Напомним, что i-й строке таблицы M приписана булева функция $\pi_i^1(\boldsymbol{w})$, $1\le i\le p$, связанная с блоком π_i^1 покрытия π^1, а j-му столбцу – булева функция $\pi_j^2(\boldsymbol{z})$, $1\le j\le|\pi^2|$. Обозначим через h наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $h\ge\log_2 p$. Очевидно, что рассматриваемая задача декомпозиции будет иметь решение, если $h+|Z|<n$.

Припишем i-й строке ($1\le i\le p$) таблицы M код $\boldsymbol{g}_i$*, являющийся значением булевой векторной переменной $\boldsymbol{g}=(g_1, g_2, \ldots, g_h)$. Разобьем все множество значений векторной переменной $\boldsymbol{g}=(g_1, g_2, \ldots, g_h)$ на p непустых классов W_1, W_2, …, W_p таким образом, чтобы всякий код $\boldsymbol{g}_i$* оказался элементом класса W_i.

Определим систему булевых функций $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$, положив, что для любого значения $\boldsymbol{w}$* векторной переменной $\boldsymbol{w}$ выполняется равенство $\boldsymbol{g}_i^*=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w}^*)$, если и только если $\pi_i^1(\boldsymbol{w}^*)=1$.

Зададим множество булевых функций $B=\{b_1(\boldsymbol{g}), b_2(\boldsymbol{g}), \ldots,b_p(\boldsymbol{g})\}$ так, что $b_i(\boldsymbol{g}^*)=1$, если и только если $\boldsymbol{g}^*\in W_i$.

Построим по таблице M таблицу M'', заменив всякую булеву функцию $\pi_i^1(\boldsymbol{w})$, приписанную i-й строке таблицы M, на булеву функцию $b_i(\boldsymbol{g})$, где $1\le i\le p$. Полученная таблица M'' в общем случае задает частичную систему булевых функций $\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$. Любое доопределение ее неопределенных элементов, обозначенных символом «–», задает систему полностью определенных булевых функций $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$.

У т в е р ж д е н и е 1. *Для суперпозиции* $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$, *построенной приведенным способом по компактной таблице M, выполняется* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$.

Точно также можно построить декомпозицию и по компактной таблице M^T, полученной сжатием таблицы M по строкам. В этом случае длина кода может быть значительно меньше, чем при декомпозиции по таблице M.

Пример 1. Пусть система $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задана компактной таблицей M^T, взятой из табл. 5 примера 5 работы [20]. В этом случае $\boldsymbol{w}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\boldsymbol{z}=(x_4,x_5,x_6)$, $p=4$, $h=2$. Построим по этой таблице вышеописанным способом суперпозицию $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$. Положим, что $\boldsymbol{g}_1^*=(0,0)$, $\boldsymbol{g}_2^*=(0,1)$, $\boldsymbol{g}_3^*=(1,0)$, $\boldsymbol{g}_4^*=(1,1)$. Существует единственный вариант разбиения множества {(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)} значений векторной переменной $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2)$ на классы $W_1=\{(0,0)\}$, $W_2=\{(0,1)\}$, $W_3=\{(1,0)\}$, $W_4=\{(1,1)\}$. Построим по этим классам булевы функции $b_1(\boldsymbol{g})=\bar{g}_1\bar{g}_2$, $b_2(\boldsymbol{g})=\bar{g}_1 g_2$, $b_3(\boldsymbol{g})=g_1\bar{g}_2$, $b_4(\boldsymbol{g})=g_1 g_2$. В искомой суперпозиции система $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$ задается матрицами

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & - \\ 0 & 1 & - & 1 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ - & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & - & 1 \\ 0 & - & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad R = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g_1 & g_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

а система $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},z)$ – табл. 1. Первые три строки матрицы T задают булеву функцию $\sigma_2(\boldsymbol{w})=\pi_2^1(\boldsymbol{w})$. Строки с номерами 4, 5, 6 задают булеву функцию $\sigma_3(\boldsymbol{w})=\pi_3^1(\boldsymbol{w})\vee\pi_4^1(\boldsymbol{w})\vee\pi_7^1(\boldsymbol{w})$, а строки 7, 8 – булеву функцию $\sigma_4(\boldsymbol{w})=\pi_5^1(\boldsymbol{w})\vee\pi_6^1(\boldsymbol{w})$. Согласно правилу формирования системы $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$, если $\sigma_i(\boldsymbol{w}^*)=1$, где $(1\le i\le 4)$, то $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w}^*)=\boldsymbol{g}_i^*$. Поэтому первые три строки матрицы R равны $\boldsymbol{g}_2^*$, последующие три строки – $\boldsymbol{g}_3^*$ и последние две строки – $\boldsymbol{g}_4^*$. В матрице T не присутствуют строки, задающие булеву функцию $\sigma_1(\boldsymbol{w})$, так как если $\sigma_1(\boldsymbol{w}^*)=1$, то $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w}^*)=(0,0)$.

Таблица 1

	$\pi_1^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_2^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_3^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_4^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_5^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_6^2(\boldsymbol{x})$
$b_1(\boldsymbol{g})$	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
$b_2(\boldsymbol{g})$	(0,0)	(0,1)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,1)
$b_3(\boldsymbol{g})$	(0,0)	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(1,1)
$b_4(\boldsymbol{g})$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,0)	(0,1)	(0,1)

2. Декомпозиция по сжатой компактной таблице с мнимыми значениями

Пусть система $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задана сжатой компактной таблицей с мнимыми значениями N^T, состоящей из p строк. Пусть также доступны матрицы $C=(U,\alpha)$, V, по которым была получена таблица N^T, а также последовательность $v^2{}_1(z)$, $v^2{}_2(z)$, …, $v^2{}_s(z)$, покрытием которой является π^2. Напомним, что строкам таблицы N^T приписаны блоки $\varphi_1{}^1$, $\varphi_2{}^1$, …, $\varphi_p{}^1$ покрытия φ, столбцам – блоки покрытия π^2. Соответственно число строк в таблице N^T равно p. Строкам и столбцам таблицы приписаны также булевы функции, соответствующие блокам рассматриваемых покрытий.

Так же, как и в предыдущем случае, обозначим через h наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $h\ge\log_2 p$. Рассматриваемая задача декомпозиции имеет решение, если $h+|Z|<n$.

Припишем каждой i-й строке таблицы N^T $(1\le i\le p)$ код $\boldsymbol{g}_i^*$, являющийся значением векторной булевой переменной $\boldsymbol{g}=(g_1, g_2, …, g_h)$. Разобьем все 2^h значений векторной переменной $\boldsymbol{g}=(g_1, g_2, …, g_h)$ на непустые классы W_1, W_2, …, W_d, где $p\le d\le 2^h$. Разбиение проведем таким образом, что всякий код $\boldsymbol{g}_i^*$ $(1\le i\le p)$ окажется элементом класса W_i.

Систему полностью определенных булевых функций $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$ построим по этим кодам и по булевым функциям, приписанным строкам таблицы N^T, точно так же, как это сделано в предыдущем методе, и так же по классам W_1, W_2, …, W_d найдем множество булевых функций $B=\{b_1(\boldsymbol{g}), b_2(\boldsymbol{g}), …, b_d(\boldsymbol{g})\}$.

Построим по покрытию φ и множеству B покрытие ρ. Покрытие ρ состоит из d блоков, где $p\le d\le 2^h$. Блок ρ_i $(1\le i\le p)$ покрытия ρ равен блоку φ_i покрытия φ. Оставшиеся $d–p$ блоков выбираются произвольно как подмножества множества $S=\{1,2,…,s\}$. Выбранные подмножества должны быть различны и не совпадать с первыми p блоками формируемого покрытия. Всякому блоку ρ_j $(1\le j\le d)$ припишем булеву функцию $b_j(\boldsymbol{g})$. Полагаем, что система булевых функций $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},z)$ задается покрытием $\rho\times\pi^2$ и булевой матрицей V.

У т в е р ж д е н и е 2. *Пусть в суперпозиции* $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},z)$, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$ *система* $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$ *формируется точно так же, как в предыдущем методе, а система* $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},z)$ *задается покрытием* $\rho\times\pi^2$ *и булевой матрицей V. В этом случае* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},z)$.

По произведению $\rho\times\pi^2$ несложно найти последовательность булевых функций $\varepsilon_1(\boldsymbol{g},z)$, $\varepsilon_2(\boldsymbol{g},z)$, …, $\varepsilon_s(\boldsymbol{g},z)$, покрытием которой является $\rho\times\pi^2$. Последовательность булевых функций $\varepsilon_1(\boldsymbol{g},z)$, $\varepsilon_2(\boldsymbol{g},z)$, …, $\varepsilon_s(\boldsymbol{g},z)$ задается секционированной троичной матрицей $C'=(T', \alpha')$. В этом случае матрицы $C'=(T',\alpha')$, V задают систему $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},z)$. Для поиска последовательности $\varepsilon_1(\boldsymbol{g},z)$, $\varepsilon_2(\boldsymbol{g},z)$, …, $\varepsilon_s(\boldsymbol{g},z)$ построим по покрытию ρ последовательность булевых функций $\kappa_1(\boldsymbol{g})$, $\kappa_2(\boldsymbol{g})$, …, $\kappa_s(\boldsymbol{g})$. Для получения булевой функции $\kappa_j(\boldsymbol{g})$ $(1\le j\le s)$ выпишем номера блоков покрытия ρ, которые содержат номер j в качестве элемента. Булева функция $\kappa_j(\boldsymbol{g})$ равна дизъюнкции булевых функций, приписанных блокам покрытия ρ, номера которых были выписаны.

У т в е р ж д е н и е 3. *Покрытием последовательности булевых функций* $\kappa_1(\boldsymbol{g})$, $\kappa_2(\boldsymbol{g})$, …, $\kappa_s(\boldsymbol{g})$ *является* ρ.

У т в е р ж д е н и е 4. *Пусть* ρ, π^2 *являются покрытиями соответственно последовательностей булевых функций* $\kappa_1(\boldsymbol{g})$, $\kappa_2(\boldsymbol{g})$, …, $\kappa_s(\boldsymbol{g})$; $v^2{}_1(z)$, $v^2{}_2(z)$, …, $v^2{}_s(z)$. *Тогда секционированная троичная матрица* $C'=(T', \alpha')$ *задает последовательность булевых функций* $\varepsilon_1(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$, $\varepsilon_2(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$, …, $\varepsilon_l(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$, *где* $\varepsilon_i(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})=\kappa_i(\boldsymbol{g})\wedge v^2{}_i(z)$, $1\le i\le s$, *покрытием которой является* $\rho\times\pi^2$.

Данную декомпозицию точно так же можно проводить и по компактной таблице N.

Пример 2. Пусть система $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задана компактной таблицей N^T, взятой из табл. 6 примера 5 работы [20]. В этом случае так же, как и в предыдущем примере, $\boldsymbol{w}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\boldsymbol{z}=(x_4,x_5,x_6)$, $p=4$, $h=2$. Построим по этой таблице суперпозицию $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$. Положим, что $\boldsymbol{g}_1^*=(0,0)$, $\boldsymbol{g}_2^*=(1,0)$, $\boldsymbol{g}_3^*=(0,1)$, $\boldsymbol{g}_4^*=(1,1)$. Так как d не может быть больше или меньше 4, то $d=4$. Разобьем множество {(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)} значений векторной булевой переменной $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2)$ на классы $W_1=\{(0,0)\}$, $W_2=\{(1,0)\}$, $W_3=\{(0,1)\}$, $W_4=\{(1,1)\}$. В этом случае $b_1(\boldsymbol{g})=\bar g_1\bar g_2$, $b_2(\boldsymbol{g})=g_1\bar g_2$, $b_3(\boldsymbol{g})=\bar g_1 g_2$, $b_4(\boldsymbol{g})=g_1g_2$. Сформируем покрытие ρ. Так как $\varphi=\{\varphi_1=\varnothing,\ \varphi_2=\overline{1},\ \varphi_3=\overline{2,4},\ \varphi_4=\overline{1,2,3}\}$, то $\rho=\{\rho_1=\varnothing,\ \rho_2=\overline{1},\ \rho_3=\overline{2,4},\ \rho_4=\overline{1,2,3}\}$, $\rho_1(\boldsymbol{g})=\bar g_1\bar g_2$, $\rho_2(\boldsymbol{g})=g_1\bar g_2$, $\rho_3(\boldsymbol{g})=\bar g_1g_2$, $\rho_4(\boldsymbol{g})=g_1g_2$. Вычислим булевы функции последовательности $\kappa_1(\boldsymbol{g})$, $\kappa_2(\boldsymbol{g})$, $\kappa_3(\boldsymbol{g})$, $\kappa_4(\boldsymbol{g})$. Номер 1 входит в блоки ρ_2, ρ_4, следовательно, $\kappa_1(\boldsymbol{g})=\rho_2(\boldsymbol{g})\vee\rho_4(\boldsymbol{g})=g_1$. Номер 2 входит в блоки ρ_3, ρ_4, поэтому $\kappa_2(\boldsymbol{g})=\rho_3(\boldsymbol{g})\vee\rho_4(\boldsymbol{g})=g_2$. Номера 3 и 4 входят только в блоки ρ_4 и ρ_3 соответственно. Из этого следует, что $\kappa_3(\boldsymbol{g})=\rho_4(\boldsymbol{g})=g_1g_2$, $\kappa_4(\boldsymbol{g})=\rho_3(\boldsymbol{g})=\bar g_1g_2$. Для рассматриваемой системы булевых функций $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ покрытие π^2 построено по последовательности $v^2{}_1(\boldsymbol{x})=x_5\bar x_6$, $v^2{}_2(\boldsymbol{x})=x_4\bar x_5$, $v^2{}_3(\boldsymbol{x})=\bar x_4x_6\vee\bar x_4x_5$, $v^2{}_4(\boldsymbol{x})=\bar x_4\bar x_6$ (см. пример 3 из работы [20]). Отсюда несложно найти, что $\varepsilon_1(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})=\kappa_1(\boldsymbol{g})\wedge v^2{}_1(\boldsymbol{z})=g_1x_5\bar x_6$, $\varepsilon_2(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})=\kappa_2(\boldsymbol{g})\wedge v^2{}_2(\boldsymbol{z})=g_2x_4\bar x_5$, $\varepsilon_3(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})=\kappa_3(\boldsymbol{g})\wedge v^2{}_3(\boldsymbol{z})=g_1g_2\bar x_4x_6\vee g_1g_2\bar x_4x_5$, $\varepsilon_4(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})=\kappa_4(\boldsymbol{g})\wedge v^2{}_4(\boldsymbol{z})=\bar g_1g_2\bar x_4\bar x_6$. Система $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$ задается матрицами $C'=(T', \alpha')$ и V, где

$$T'=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g_1 & g_2 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & - & - & 1 & 0 \\ - & 1 & 1 & 0 & - \\ 1 & 1 & 0 & - & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & - \\ 0 & 1 & 0 & - & 0 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}, \quad V=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array},$$

i	$\alpha'(i)$
1	1
2	2
3	3
4	3
5	4

.

Система $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$ формируется по покрытию φ и выбранным кодам точно так же, как в предыдущем методе и задается матрицами

$$T=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} - & 1 & 0 & - \\ 0 & 1 & - & 1 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ 1 & 0 & 0 & - \\ - & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & - & 1 \\ 0 & - & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}, \quad R=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} g_1 & g_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

3. Отношение включения покрытий

Непосредственно по построению покрытия ρ видно, что $\varphi\subseteq\rho$ (в этом случае будем говорить, что покрытие φ включено в покрытие ρ). Пользуясь этим обстоятельством, декомпозицию можно осуществлять по некоторой последовательности булевых функций $\tau_1(\boldsymbol{g})$, $\tau_2(\boldsymbol{g})$, …, $\tau_s(\boldsymbol{g})$, покрытие τ которой включает в себя покрытие φ. В этом случае коды, приписываемые строкам таблицы N^T (соответственно блокам покрытия φ), находятся следующим образом.

Пусть блок φ_i покрытия φ равен блоку τ_j покрытия τ. Тогда строке с номером i таблицы N^T (блоку φ_i покрытия φ) приписывается код $\boldsymbol{g}^*$, если $\tau_j(\boldsymbol{g}^*)=1$.

Система $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$ суперпозиции $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$ строится по полученным кодам и покрытию φ точно так же, как это было сделано в предыдущем методе. Последовательность булевых функций $\varepsilon_1'(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$, $\varepsilon_2'(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$, …, $\varepsilon_s'(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$, где $\varepsilon_i'(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})=\tau_i(\boldsymbol{g})\wedge v^2{}_i(\boldsymbol{z})$, $1\le i\le s$, вместе с матрицей V задает систему $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$. Несложно показать, что в этом случае выполняется равенство $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$. Заметим, что существуют «универсальные» последовательности $\psi_1(\boldsymbol{g})$, $\psi_2(\boldsymbol{g})$, …, $\psi_s(\boldsymbol{g})$, покрытия которых включают любое покрытие φ. В частности, такая последовательность задается квадратной тривиально-секционированной троичной матрицей, состоящей из s строк и столбцов. На главной диагонали этой матрицы находятся единичные элементы. Остальные элементы принимают значение «–».

В работах [10,16] рассматриваются способы выбора кода таким образом, чтобы каждая из булевых функций последовательности $\kappa_1(\boldsymbol{g})$, $\kappa_2(\boldsymbol{g})$, …, $\kappa_s(\boldsymbol{g})$ задавалась одной конъюнкцией. В этом случае число строк в троичной матрице T', входящей в секционированную троичную матрицу $C'=(T', \alpha')$, оказывается наименьшим. Такой код можно найти всегда, однако его длина может быть больше h.

Пример 3. Рассмотрим тривиально секционированную троичную матрицу

$$K=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & - & 1 & - \\ - & - & - & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}.$$

Эта матрица имеет «универсальное» покрытие $\psi=\{\psi_1=\varnothing$, $\psi_2=\overline{1}$, $\psi_3=\overline{2}$, $\psi_4=\overline{3}$, $\psi_5=\overline{4}$, $\psi_6=\overline{1,2}$, $\psi_7=\overline{1,3}$, $\psi_8=\overline{1,4}$, $\psi_9=\overline{2,3}$, $\psi_{10}=\overline{2,4}$, $\psi_{11}=\overline{3,4}$, $\psi_{12}=\overline{2,3,4}$, $\psi_{13}=\overline{1,3,4}$, $\psi_{14}=\overline{1,2,4}$, $\psi_{15}=\overline{1,2,3}$, $\psi_{16}=\overline{1,2,3,4}\}$ и соответствующие функции $\psi_1(\boldsymbol{g})=\bar g_1\bar g_2\bar g_3\bar g_4$, $\psi_2(\boldsymbol{g})=g_1\bar g_2\bar g_3\bar g_4$, $\psi_3(\boldsymbol{g})=\bar g_1 g_2\bar g_3\bar g_4$, $\psi_4(\boldsymbol{g})=\bar g_1\bar g_2 g_3\bar g_4$, $\psi_5(\boldsymbol{g})=\bar g_1\bar g_2\bar g_3 g_4$, $\psi_6(\boldsymbol{g})=g_1 g_2\bar g_3\bar g_4$, $\psi_7(\boldsymbol{g})=g_1\bar g_2 g_3\bar g_4$, $\psi_8(\boldsymbol{g})=g_1\bar g_2\bar g_3 g_4$, $\psi_9(\boldsymbol{g})=\bar g_1 g_2 g_3\bar g_4$, $\psi_{10}(\boldsymbol{g})=\bar g_1 g_2\bar g_3 g_4$, $\psi_{11}(\boldsymbol{g})=\bar g_1\bar g_2 g_3 g_4$, $\psi_{12}(\boldsymbol{g})=\bar g_1 g_2 g_3 g_4$, $\psi_{13}(\boldsymbol{g})=g_1\bar g_2 g_3 g_4$, $\psi_{14}(\boldsymbol{g})=g_1 g_2\bar g_3 g_4$, $\psi_{15}(\boldsymbol{g})=g_1 g_2 g_3\bar g_4$, $\psi_{16}(\boldsymbol{g})=g_1 g_2 g_3 g_4$. Покрытие ψ содержит все различные подмножества множества $S=\{1, 2, 3, 4\}$, поэтому оно включает в себя любое другое покрытие этого множества, в том числе и покрытие φ. Определим коды, приписываемые строкам таблицы N^T (см. табл. 6 из примера 5 работы [20]). Так как $\psi_1=\varphi_1$, то $\boldsymbol{g}_1{}^*=(0,0,0,0)$; $\psi_2=\varphi_2$, следовательно, $\boldsymbol{g}_2{}^*=(1,0,0,0)$. Аналогично определим, что $\boldsymbol{g}_3{}^*=(0,1,0,1)$, $\boldsymbol{g}_4{}^*=(1,1,1,0)$. Система $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$ искомой суперпозиции задается матрицами $C''=(T'', \alpha')$ и V, где

$$T''=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & - & - & - & - & 1 & 0 \\ - & 1 & - & - & 1 & 0 & - \\ - & - & 1 & - & 0 & - & 1 \\ - & - & 1 & - & 0 & 1 & - \\ - & - & - & 1 & 0 & - & 0 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}, \quad V=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c} i & \alpha'(i) \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{array}.$$

Система $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$ формируется по покрытию φ и выбранным кодам точно так же, как в предыдущем примере и задается матрицами

$$T''=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & - \\ 0 & 1 & - & 1 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ 1 & 0 & 0 & - \\ - & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & - & 1 \\ 0 & - & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad R''=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Хотя полученная суперпозиция не является решением рассматриваемой в данной работе задачи декомпозиции, тем не менее она служит хорошей иллюстрацией возможностей рассматриваемого подхода к решению декомпозиционных задач.

4. Дизъюнктивное кодирование

Выбор кода оказывает существенное влияние на число строк в матрицах, задающих систему $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$ искомой суперпозиции $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$. Код, дающий возможность находить менее громоздкое матричное представление системы $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$, называется дизъюнктивным. Этот способ кодирования впервые был предложен в работе [21] для решения задачи декомпозиции ПЛМ. Также его описание имеется в работе [7]. Дизъюнктивное кодирование вполне применимо и для методов декомпозиции, рассматриваемых в настоящей работе.

Идея метода дизъюнктивного кодирования основана на следующем утверждении.

Пусть система полностью определенных булевых функций $\boldsymbol{y}$=$\boldsymbol{f}$($\boldsymbol{x}$) задана матрицами C=(U,α), V. Секционированная матрица C задает последовательность булевых функций $v_1(\boldsymbol{x})$, $v_2(\boldsymbol{x})$, …, $v_s(\boldsymbol{x})$. Матрица V имеет размерность $s\times m$. Положим, что $\pi=\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p\}$ является покрытием матрицы C. Представим это покрытие в виде булевой матрицы $W(\pi)$. Эта матрица состоит из s строк и p столбцов. Элемент w_{ij} ($1\le i\le s$, $1\le j\le p$) матрицы $W(\pi)$ принимает единичное значение, если и только если номер i включен в блок π_j в качестве элемента. Иначе элемент w_{ij} принимает нулевое значение. Столбец с номером j матрицы $W(\pi)$ задает своими единичными элементами блок π_j покрытия π.

По матрице V построим множество $\chi=\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m\}$ подмножеств множества $S=\{1, 2, \ldots, s\}$. Номер a ($a\in S$) включается в подмножество χ_t ($1\le t\le m$), если и только если элемент матрицы V, находящийся на пересечении строки с номером a со столбцом с номером t, равен единице.

По покрытию π и матрице V построим булеву матрицу L размерностью $m\times p$. Столбец с номером j ($1\le j\le p$) матрицы L получается посредством транспонирования булева вектора $\boldsymbol{y}^*=\vee(V,\pi_j)$.

У т в е р ж д е н и е 5. *Строка t ($1\le t\le m$) матрицы L равна покомпонентной дизъюнкции строк матрицы W(π), номера которых содержатся в подмножестве χ_t множества χ.*

Пример 4. Рассмотрим систему булевых функций из примера 1 работы [20]:

$$
U=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
- & 1 & - & - & 1 & 0\\
1 & - & 1 & 1 & 0 & -\\
- & 0 & 0 & 1 & 0 & -\\
0 & - & 1 & 0 & - & 1\\
0 & - & 1 & 0 & 1 & -\\
1 & 0 & 0 & 0 & - & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array},
\quad
V=\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1\\
1 & 0\\
1 & 1\\
0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array},
\quad
\begin{array}{c|c}
i & \alpha(i)\\
\hline
1 & 1\\
2 & 2\\
3 & 2\\
4 & 3\\
5 & 3\\
6 & 4
\end{array}.
$$

Покрытие секционированной матрицы C=(U,α) представим матрицей

$$
W(\pi)=
\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

По матрице V сформируем покрытие $\chi=\{\chi_1=\overline{2,3}, \chi_2=\overline{1,3,4}\}$, а по покрытию π и матрице V – матрицу

$$
L=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}.
$$

Первый столбец этой матрицы получается транспонированием булева вектора $\vee(V,\pi_1)=(0,0)$, второй столбец – транспонированием булева вектора $\vee(V,\pi_2)=(0,1)$ и т.д. Легко проверить, что условия утверждения 5 выполняются. Первый блок $\chi_1=\overline{2,3}$, следовательно, первая строка матрицы L равна покомпонентной дизъюнкции второй и третьей строк матрицы $W(\pi)$. Второй блок $\chi_2=\overline{1,3,4}$, поэтому вторая строка матрицы L равна покомпонентной дизъюнкции первой, третьей и четвертой строк матрицы $W(\pi)$.

Рассмотренное выше свойство можно использовать для формирования матричного представления системы $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$ при выполнении декомпозиции по компактной таблице с мнимыми значениями.

Пусть задано покрытие π^1, а также коды, приписанные его блокам. Представим покрытие π^1 булевой матрицей $W(\pi^1)$. Транспонированные коды, приписываемые строкам компактной таблицы (блокам покрытия π^1), запишем в виде матрицы L. Столбец с номером j матрицы L задает транспонированный код, приписанный блоку π^1_j покрытия π^1. Рассматриваемые коды назовем дизъюнктивными, если и только если каждую строку полученной матрицы L можно получить посредством покомпонентной дизъюнкции некоторых строк матрицы $W(\pi^1)$.

Пусть коды, задаваемые матрицей L, являются дизъюнктивными. Сформируем по матрицам L, $W(\pi^1)$ булеву матрицу V'' следующим образом.

Для каждой i-й строки матрицы L в матрице $W(\pi^1)$ найдем некоторое подмножество строк, покомпонентная дизъюнкция которых равна этой строке. Из номеров строк, входящих в данное подмножество, сформируем подмножество χ_i множества $S=\{1,2,\ldots,s\}$. Все полученные подмножества объединяем в множество χ. В искомой матрице V'' столбец с номером i строится по элементу χ_i множества χ. Элемент с номером j этого столбца равен единице, если $j\in\chi_i$, иначе этот элемент равен нулю.

Утверждение 6. *Пусть* $\boldsymbol{g}_i$* *является кодом, приписанным блоку* π^1_i *покрытия* π^1, *т.е. транспонированный вектор* $\boldsymbol{g}_i$* *является i-м столбцом матрицы L. Тогда, если коды, задаваемые матрицей L, являются дизъюнктивными, то для булевой матрицы V'', построенной вышеуказанным способом, выполняется равенство* $\vee(V'',\pi^1_i)=\boldsymbol{g}_i{*}$.

Положим, что известна секционированная троичная матрица $C^1=(U^1,\alpha^1)$, покрытием которой является π^1. Если она не известна, то эту матрицу можно найти по покрытию π^1 способом, предложенным в предыдущем разделе. Опираясь на утверждение 6, нетрудно доказать, что если коды, приписанные блокам покрытия π^1, являются дизъюнктивными и по этим кодам и покрытию π^1 найдена матрица V'', то система булевых функций $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$, построенная по способу, приведенному в разделе 1, равна системе булевых функций $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{w})$, задаваемой секционированной троичной матрицей $C^1=(U^1,\alpha^1)$ и матрицей V''.

Процесс дизъюнктивного кодирования состоит в последовательном формировании строк булевой матрицы L посредством матрицы $W(\pi^1)$. Для формирования первой строки этой матрицы выполняется перебор различных подмножеств (в том числе и одноэлементных) строк матрицы $W(\pi^1)$. Из просмотренных подмножеств выбирается одно, по которому посредством покомпонентной дизъюнкции находится первая строка матрицы L. Если коды, представленные столбцами сформированной матрицы L, удовлетворяют предъявленным им требованиям, то процесс формирования матрицы L завершается. Иначе, аналогично тому, как была получена первая строка, находится вторая строка этой матрицы и т.д. Процесс построения матрицы L является конечным, так как в качестве этой матрицы всегда можно выбрать саму матрицу $W(\pi^1)$. Более подробно задача дизъюнктивного кодирования рассматривается в работах [21, 22].

Дизъюнктивное кодирование можно использовать при выполнении декомпозиции по другим компактным таблицам. При декомпозиции по компактной таблице M необходимо восстановить блоки покрытия, приписанные ее строкам. Если декомпозиция выполняется по сжатой компактной таблице M^T, то необходимо по восстановленному покрытию, приписанному строкам таблицы M, а также разбиению строк, по которому по таблице M строится таблица M^T, найти покрытие, приписанное строкам таблицы M^T. Способ получения этого покрытия такой же, как и при получении покрытия, приписанного строкам таблицы N^T (см. разд. 4 работы [20]).

Заметим, что код, полученный по «универсальной» последовательности $\psi_1(\boldsymbol{g})$, $\psi_2(\boldsymbol{g})$, …, $\psi_s(\boldsymbol{g})$ (см. разд. 3), является всегда дизъюнктивным.

Пример 5. Посредством дизъюнктивного кодирования выполним декомпозицию системы $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, заданной таблицей, взятой из примера 5 работы [20] (табл. 6). По покрытию φ, блоки которого приписаны строкам таблицы N^T, найдем булеву матрицу

$$W(\varphi)=\begin{array}{c c}
\begin{array}{cccc}\varphi_1&\varphi_2&\varphi_3&\varphi_4\end{array} & \\
\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix} & \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}
\end{array}.$$

Видно, что в качестве дизъюнктивного кода можно взять первые две строки этой матрицы. Получим матрицу кодирования L. По матрицам $W(\varphi)$, L построим матрицу V''. Эти матрицы имеют следующий вид:

$$L=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix},\quad V''=\begin{array}{c c}
\begin{array}{cc}g_1&g_2\end{array} & \\
\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix} & \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}
\end{array}.$$

Секционированная троичная матрица J=(Q,ξ), покрытием которой является φ, неизвестна. Построим эту матрицу. Для этого найдем булевы функции $v_1^1(z) = \varphi_2(z) \vee \varphi_4(z) = x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4$, $v_2^1(z) = \varphi_3(z) \vee \varphi_4(z) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4$, $v_3^1(z) = \varphi_4(z) = \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3x_4$, $v_4^1(z) = \varphi_3(z) = \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. Данная последовательность булевых функций задается секционированной матрицей J=(Q,ξ), где

$$
Q = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
- & 1 & - & - \\
0 & - & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & - \\
1 & - & 1 & 1 \\
0 & - & 1 & 0 \\
- & 0 & 0 & 1 \\
0 & - & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
- & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & - & 1 \\
1 & 0 & 0 & -
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array}, \quad
\begin{array}{c|c}
i & \xi(i) \\ \hline
1 & 1 \\
2 & 1 \\
3 & 2 \\
4 & 2 \\
5 & 2 \\
6 & 2 \\
7 & 3 \\
8 & 3 \\
9 & 4 \\
10 & 4 \\
11 & 4
\end{array}.
$$

Эта секционированная матрица вместе с матрицей V'' задает систему $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$ искомой суперпозиции. Заметим, что последним двум секциям в матрице J соответствуют нулевые коды в матрице V'', поэтому их можно удалить. Также удаляются при этом и нулевые коды из матрицы V''. Окончательно получим

$$
Q' = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
- & 1 & - & - \\
0 & - & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & - \\
1 & - & 1 & 1 \\
0 & - & 1 & 0 \\
- & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}, \quad
V''' = \begin{array}{c}
\begin{array}{cc} g_1 & g_2 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}, \quad
\begin{array}{c|c}
i & \xi(i) \\ \hline
1 & 1 \\
2 & 1 \\
3 & 2 \\
4 & 2 \\
5 & 2 \\
6 & 2
\end{array}.
$$

Система $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$ задается матрицами J'=(Q', ξ'), V'''. Дизъюнктивные коды, полученные в этом примере, совпадают с кодами из примера 2. Поэтому система $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},z)$ искомой суперпозиции задается матрицами C'=(T', α'), V из этого примера.

5. Результаты экспериментальных исследований

Часть методов декомпозиции, описанных в этой работе, запрограммирована. Результаты применения этих методов на подборке практических примеров, известных среди специалистов как «benchmarks», приведены в табл. 2.

Таблица 2

Имя системы	n	m	l	$\|W\|$	$\|Z\|$	Метод 1			Метод 2			Метод 3		
						d	r	S	d	r	s	D	R	s
New-tpla1.pla	10	2	4	6	4	3	4	9	3	4	9	3	4	9
New-tpla2.pla	10	4	9	6	4	3	6	27	3	6	27	3	6	27
Sao2.pla	10	4	58	6	4	*	*	*	4	61	104	4	42	49
Sam5.pla	10	6	167	6	4	*	*	*	4	63	239	4	63	41
Alu	12	8	19	9	3	*	*	*	*	*	*	*	*	*
T3_d.pla	12	8	148	7	5	*	*	*	4	123	135	4	64	49
Sum6.pla	12	7	355	7	5	*	*	*	5	127	735	5	127	163
M181_d.pla	15	9	303	12	3	11	1198	9122	7	1154	888	7	573	369
B12.pla	15	9	431	8	7	*	*	*	6	167	4992	6	89	247
Cary.pla	15	11	214	8	7	7	111	5864	6	114	2900	6	76	212
In0.pla	15	11	138	9	6	6	60	3344	6	64	2864	6	64	144
T481.pla	16	1	481	9	7	*	*	*	3	232	382	3	128	50
Ex7.pla	16	5	123	9	7	*	*	*	8	363	21172	8	351	446
Cordic.pla	23	2	1206	12	11	11	4095	3108600	4	4032	22452	4	2240	232
Misex2.pla	25	18	29	12	13	6	71	5145	5	72	3900	5	67	38
Vg2.pla	25	8	110	12	13	10	1663	1096704	7	1662	140940	7	950	406

Декомпозиция выполнялась по разбиению аргументов, т. е. множества *W, Z* выбирались так, что $W \cap Z = \varnothing$. При выборе разбиения мощность множества *W* задавалась. Выбор булевых аргументов, входящих в множество *W*, осуществлялся таким образом, чтобы число блоков покрытия π^1 было как можно меньше. Все булевы аргументы, не вошедшие в множество *W*, включались в множество *Z*.

В первой графе таблицы с результатами исследования приводятся имена систем, декомпозиция которых была проведена. Во второй, третьей и четвертой графах указываются соответственно числа *n*, *m* аргументов и функций системы, а также число *l* строк матриц, которыми эти системы задаются. В пятой и шестой графах таблицы приводятся мощности множеств *W, Z*; в седьмой, восьмой, девятой графах – результаты декомпозиции соответственно по трем методам. В первом методе декомпозиция выполнялась по компактной таблице, во втором – по сжатой по строкам компактной таблице, в третьем – по сжатой по строкам компактной таблице с мнимыми значениями. В первом и втором методах матрицы, задающие системы декомпозиции, строились непосредственно по таблицам. Никаких упрощений этих матриц не проводилось. В третьем методе проводилось упрощение систем с использованием простейших приемов (склеивание, поглощение). Для задания системы $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$ декомпозиции строилась секционированная троичная матрица *C'*. Результат декомпозиции по каждому методу представлен тремя числами: *d*, *r*, *s*. Число *d* задает длину кода, *r*, *s* – числа строк матриц, представляющих системы $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{z})$ соответственно. Если в результате декомпозиции по одному из указанных методов не удалось найти решение рассматриваемой задачи декомпозиции, то вместо всех этих чисел ставится символ «звездочка».

Заключение

Результаты исследований, приведенные в табл. 2, связаны с декомпозицией по разбиению аргументов. Это один из наиболее простых видов декомпозиции, не отражающий всех достоинств и недостатков рассмотренных методов. Тем не менее, результаты исследования этих методов дают интересные результаты, связанные с размерами матриц, посредством которых представляются системы декомпозиции.

Список литературы

1. Hartmanis J., Stearns R.E. Algebraic Structure Theory of Sequential Machines. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

2. Бибило П.Н., Енин С.В. Синтез комбинационных схем методом функциональной декомпозиции. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 189 с.

3. Ashenhurst R.L. The decomposition of switching functions // Proceedings of on International Symposium on the Theory of Switching. April 2-5, 1957. – V.29. – Harvard Univ., 1959. – P. 74-116.

4. Curtis H.A. Generalized tree circuit – the basic building block of an extended decomposition theory // J. Assoc. Comput. Mach. – 1963. – № 10. – P. 562-581.

5. Curtis H.A. Simplified decomposition of Boolean function // IEEE Trans. on Comput. – V. 25, October 1967. – P. 1033-1044.

6. Karp R.M. Functional decomposition and switching circuit design // J. Soc. Industr. Appl. Math. – 1963. – V. 11. – №. 2. – P. 291-335.

7. Закревский А.Д. Логический синтез каскадных схем. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

8. Шестаков Е.А. Декомпозиция системы полностью определенных булевых функций по покрытию аргументов // АВТ. – 1994. – №1. – С.12-20.

9. Поттосин Ю.В., Шестаков Е.А. Декомпозиция системы частичных булевых функций по ее табличному заданию // АВТ. – 1999. – №3. – С.36-47.

10. Шестаков Е.А. О декомпозиции систем полностью определенных булевых функций методом тождественных отображений // Идентификация образов. – Мн.: Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 1999. – С. 129-148.

11. Saucier G., Duff C., Poirot F. State assignment using a new embedding method based on an intersecting cube theory // Proceedings of the Design Automation Conference, June 1989. – P. 321-326.

12. Goldberg E.I. Methods of Boolean encoding of predicate arguments values. – Minsk, 1991. – 26 p. (Preprint / Inst. of engineering cybernetics, the Academy of Sciences of Belarus; № 3).

13. Goldberg E.I. Face embedding by componentwise construction of intersecting cubes. – Minsk, 1995. – 43 p. (Preprint / Inst. of Engineering Cybernetics, the Academy of Sciences of Belarus; № 1).

14. Кардаш С.Н. Декомпозиция системы булевых функций методом тождественных отображений // Проектирование систем логического управления: Сб. науч. тр. – Мн.: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1986. – С. 22-31.

15. Шестаков Е.А. О декомпозиции систем булевых функций методом тождественных отображений. – Мн., 1988. – 16 с. (Препринт / Ин-т техн. кибернетики АН БССР; № 42).

16. Гольдберг Е.И. Декомпозиция ПЛМ. – Мн., 1991. – 32 с. (Препринт / Ин-т техн. кибернетики АН БССР; № 6).

17. Brzozowski J.A., Luba T. Decomposition of Boolean functions specified by cubes // Research Report CS-97-01. – Waterloo, Canada: University of Waterloo, 1997. – 36 p.

18. Brzozowski J.A., Lou J.J. Blanket algebra for multiple-valued function decomposition // Proceedings of the International Workshop on Formal Languages and Computer Systems. – Kyoto, Japan, March 18–21, 1997.

19. Pottosin Yu.V., Shestakov E.A. Decomposition of system of completely specified Boolean functions using their compact table representation // 4th International Workshop «Boolean Problems». – Freiberg (Sachsen), 2000. – P. 135-142.

20. Поттосин Ю.В., Шестаков Е.А. О табличном задании систем полностью определенных булевых функций // Информатика. – № 1. – 2004. – С. 139-147.

21. Закревский А.Д. О минимальном дизъюнктивном коде // Докл. АН БССР. – 1978. – Т.22. – № 6. – С. 516-518.

22. Кардаш С.Н. Алгоритм решения задачи о минимальном дизъюнктивном коде // Логическое проектирование дискретных устройств: Сб. науч. тр. – Мн.: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1984. – С. 68-72.

Поступила 16.02.04

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: pott@newman.bas-net.by

Yu.V. Pottosin, E.A. Shestakov

DECOMPOSITION OF SYSTEMS OF COMPLETELY SPECIFIED BOOLEAN FUNCTIONS USING COMPACT TABLES

A set of table methods for decomposition of systems of completely specified Boolean functions are considered. The peculiarity of these methods is that an initial system is given in the compact table or virtual value compact table form. As a rule, such a form has a smaller size than a Karnaugh map. The experimental results of investigations on benchmarks of some of the methods are presented