ИНФОРМАТИКА

2004 январь-март №1

УДК 62.519

Ю.В. Поттосин, Е.А. Шестаков

О ТАБЛИЧНОМ ЗАДАНИИ СИСТЕМ ПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

На основе понятия покрытия секционированной троичной матрицы предлагается способ представления систем полностью определенных булевых функций в виде таблиц, названных компактными. Эти таблицы составляют основу аппарата, применяемого для декомпозиции булевых функций. Они аналогичны картам Карно, но имеют меньшие размеры, чем последние. Рассматриваются способы вычисления покрытий секционированной троичной матрицы.

Введение

Представление булевых функций в виде карт Карно [1] широко применяется при решении различных задач логического проектирования, например, для целей декомпозиции булевых функций [2-5], однако они оказываются слишком громоздкими даже для булевых функций, зависящих от сравнительно небольшого числа переменных.

Компактная таблица, аналогичная картам Карно, строится на основе покрытия секционированной троичной матрицы, а также операции произведения этих покрытий [6–8]. Покрытие троичной матрицы было введено в работе [8] и обобщено на секционированные троичные матрицы в работах [6, 7]. Близкое к понятию покрытия троичной матрицы является понятие «blanket», введенное в работе [9].

Компактные таблицы во многих случаях дают возможность задать исходную систему булевых функций посредством таблицы, имеющей меньшие размеры, чем карты Карно.

В настоящей работе, в отличие от работ [6–8], наряду с компактной таблицей вводится понятие компактной таблицы с мнимыми значениями. Эти таблицы являются частным случаем компактных таблиц, однако их использование, например, при решении задач декомпозиции систем полностью определенных булевых функций в некоторых случаях более предпочтительно.

1. Основные определения

Пусть система полностью определенных булевых функций $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x}))$, задана матрицами U, V и отображением α. Матрица U является троичной и состоит из l строк и n столбцов. Столбцы матрицы U помечены переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Матрица V – булева. Она состоит из s ($1\le s\le l$) строк и m столбцов. Ее столбцы помечены переменными $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Строки матрицы U разбиты на s секций посредством функционального отображения $\alpha:L\to S$, где $L=\{1,2,\ldots,l\}$ и $S=\{1,2,\ldots,s\}$ – множества номеров строк матриц U и V соответственно. Для каждой строки с номером i ($1\le i\le l$) матрицы U задается номер секции $j=\alpha(i)$, где $1\le j\le s$. Строки матрицы U, составляющие j-ю секцию, задают булеву функцию $v_j(\boldsymbol{x})$. Таким образом, секционированная троичная матрица U задает последовательность булевых функций $v_1(\boldsymbol{x}), v_2(\boldsymbol{x}), \ldots, v_s(\boldsymbol{x})$. В дальнейшем под секционированной троичной матрицей будем понимать пару $C=(U, \alpha)$, где U – троичная матрица, а α – отображение, задающее ее разбиение на секции.

Обозначим через $\boldsymbol{y}^*$, $\boldsymbol{x}^*$ значения векторных переменных $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$ соответственно, а через $t(\boldsymbol{x}^*, C)$ – подмножество множества S. Элемент j включается в $t(\boldsymbol{x}^*, C)$, если и только если $v_j(\boldsymbol{x}^*)=1$. Для матрицы V и подмножества ее строк ρ введем оператор $\vee(V,\rho)$ так, что значение $\boldsymbol{y}^*=\vee(V,\rho)$ определяется как покомпонентная дизъюнкция строк матрицы V, составляющих подмножество ρ. Если $\rho=\varnothing$, то полагаем, что булев вектор $\boldsymbol{y}^*=\vee(V,\rho)$ состоит из одних нулей.

Значение $\boldsymbol{y}^*$ системы $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ для заданного значения $\boldsymbol{x}^*$ векторной переменной $\boldsymbol{x}$ вычисляется по формуле $\boldsymbol{y}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)=\vee(V,t(\boldsymbol{x}^*, C))$.

Введем в рассмотрение булеву матрицу V', имеющую размерность $l \times m$, столбцы которой помечены переменными $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Строка с номером i матрицы V' совпадает с j-й строкой матрицы V, где $j=\alpha(i)$. Матрицы U, V' задают систему $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ обычным образом, т. е. троичная матрица U определяет множество термов, а булева матрица V' – вхождение этих термов в ДНФ соответствующих булевых функций системы.

Пример 1. Положим, что система булевых функций $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задана секционированной троичной матрицей $C=(U, \alpha)$ и булевой матрицей V, где

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ U = \begin{bmatrix} - & 1 & - & - & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 & 1 & 0 & - \\ - & 0 & 0 & 1 & 0 & - \\ 0 & - & 1 & 0 & - & 1 \\ 0 & - & 1 & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 & - & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}, \quad
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}, \quad
\begin{array}{c|c} i & \alpha(i) \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{array},
$$

$L=\{1,2,3,4,5,6\}$, $S=\{1,2,3,4\}$. Секционированная троичная матрица $C=(U,\alpha)$ задает последовательность булевых функций $v_1(\boldsymbol{x})$, $v_2(\boldsymbol{x})$, $v_3(\boldsymbol{x})$, $v_4(\boldsymbol{x})$, в которой $v_1(\boldsymbol{x})$ задается строкой 1 матрицы U, $v_2(\boldsymbol{x})$ – строками 2 и 3, $v_3(\boldsymbol{x})$ – строками 4 и 5, $v_4(\boldsymbol{x})$ – строкой 6 . Эту же систему задают матрицы

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ U = \begin{bmatrix} - & 1 & - & - & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 & 1 & 0 & - \\ - & 0 & 0 & 1 & 0 & - \\ 0 & - & 1 & 0 & - & 1 \\ 0 & - & 1 & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 & - & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}, \quad
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ V' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}.
$$

2. Покрытие секционированной троичной матрицы

Покрытием π *секционированной троичной матрицы* $C=(U,\alpha)$ и соответственно последовательности булевых функций $v_1(\boldsymbol{x})$, $v_2(\boldsymbol{x})$, …, $v_s(\boldsymbol{x})$ назовем совокупность различных элементов множества $\{t(\boldsymbol{x}^*,C)/\ \boldsymbol{x}^* \in \{0,1\}^n\}$. Каждый элемент этой совокупности является подмножеством множества $\{1,2, \ldots,s\}$ номеров секций матрицы C (номеров булевых функций в последовательности) и называется *блоком*. Для любого булева вектора $\boldsymbol{x}^* \in \{0,1\}^n$ в покрытии π найдется блок π_j, содержащий номера тех и только тех функций $v_i(\boldsymbol{x})$, для которых $v_i(\boldsymbol{x}^*)=1$. Если существует булев вектор $\boldsymbol{x}^*$, для которого все функции $v_1(\boldsymbol{x})$, $v_2(\boldsymbol{x})$, …, $v_s(\boldsymbol{x})$ обращаются в 0, то покрытие π содержит в качестве своего блока пустое множество $\varnothing$. Для каждого блока π_j покрытия π зададим булеву функцию $\pi_j(\boldsymbol{x})$, положив, что для любого $\boldsymbol{x}^* \in \{0,1\}^n$ выполняется $\pi_j(\boldsymbol{x}^*)=1$, если и только если $t(\boldsymbol{x}^*,C)=\pi_j$.

Пример 2. Для матрицы $C=(U,\alpha)$ из примера 1 найдем покрытие π. Обозначим через $U(\boldsymbol{x})$ булеву функцию, заданную троичной матрицей U. Получим $\pi=\{\pi_1=\varnothing,\ \pi_2=\ \overline{1},\ \pi_3=\ \overline{2},\ \pi_4=\ \overline{3},\ \pi_5=\ \overline{4},\ \pi_6=\overline{1,3}\ \}$, $\pi_1(\boldsymbol{x})=\ \overline{U}(\boldsymbol{x})$, $\pi_2(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 x_5 \bar{x}_6 \vee x_2 \bar{x}_3 x_5 \bar{x}_6 \vee x_2 x_4 x_5 \bar{x}_6$, $\pi_3(\boldsymbol{x}) = x_1 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5$, $\pi_4(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 x_6 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5$, $\pi_5(\boldsymbol{x}) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_6$, $\pi_6(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \bar{x}_6$.

Утверждение 1 [7]. Пусть система булевых функций $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задана матрицами $C=(U,\alpha)$, V и для матрицы C найдено покрытие $\pi=\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$. Тогда покрытие π с приписанными ему функциями $\pi_1(\boldsymbol{x})$, $\pi_2(\boldsymbol{x})$, …, $\pi_k(\boldsymbol{x})$ и матрица V задают систему $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Например, для $\boldsymbol{x}^*=(0,1,1,0,1,0)$ и покрытия матрицы $C=(U,\alpha)$ из примера 2 имеем $\pi_6(\boldsymbol{x}^*)=1$. Следовательно, $\boldsymbol{y}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)=\vee(V,\pi_6)=(1,1)$, где $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ – система функций из примера 1.

Пусть секционированной троичной матрицей $C=(U,\alpha)$ задана последовательность булевых функций $v_1(\boldsymbol{x})$, $v_2(\boldsymbol{x})$, …, $v_s(\boldsymbol{x})$. Зададим каждую из булевых функций $v_j(\boldsymbol{x})$ этой последовательности, где $1 \le j \le s$, в виде $v_j(\boldsymbol{x})=v_j^1(\boldsymbol{x}) \wedge v_j^2(\boldsymbol{x})$. Таким образом, разделим последовательность $v_1(\boldsymbol{x})$, $v_2(\boldsymbol{x})$, …, $v_s(\boldsymbol{x})$ на последовательности $v_1^1(\boldsymbol{x})$, $v_2^1(\boldsymbol{x})$, …, $v_s^1(\boldsymbol{x})$; $v_1^2(\boldsymbol{x})$, $v_2^2(\boldsymbol{x})$, …, $v_s^2(\boldsymbol{x})$. Каждая из этих последовательностей задается секционированными троичными матрицами $C^1=(U^1,\alpha^1)$,

$C^2=(U^2,\alpha^2)$. Обозначим через π, π^1, π^2 соответственно покрытия секционированных троичных матриц C, C^1, C^2. Построим по покрытиям π^1, π^2 покрытие π'. Для этого сформируем множество

$$\lambda = \{ \pi_i^1 \cap \pi_j^2 \,/\, \pi_i^1 \in \pi^1,\ \pi_j^2 \in \pi^2,\ \pi_i^1(\boldsymbol{x}) \wedge \pi_j^2(\boldsymbol{x}) \neq 0 \}.$$

Для каждого элемента $\lambda_{ij} = \pi_i^1 \cap \pi_j^2$ множества λ положим, что $\lambda_{ij}(\boldsymbol{x})=\pi_i^1(\boldsymbol{x}) \wedge \pi_j^2(\boldsymbol{x})$. Образуем покрытие π', взяв в качестве его блоков все различные элементы множества λ. Для всякого блока π_k' покрытия π' найдем булеву функцию $\pi_k'(\boldsymbol{x})$. Эта функция получается дизъюнкцией всех булевых функций, приписанных тем элементам множества λ, которые равны блоку π_k'. В дальнейшем покрытие π' будем называть произведением покрытий π^1, π^2 ($\pi' = \pi^1 \times \pi^2$).

В работе [7] показано, что $\pi = \pi^1 \times \pi^2$ и операция $\times$ идемпотентна, ассоциативна и коммутативна.

Пример 3. Рассмотрим последовательность $v_1(\boldsymbol{x})$, $v_2(\boldsymbol{x})$, $v_3(\boldsymbol{x})$, $v_4(\boldsymbol{x})$ булевых функций, заданную секционированной троичной матрицей $C=(U,\alpha)$ из примера 1. Разобьем ее на последовательности $v_1^1(\boldsymbol{x})=x_2$, $v_2^1(\boldsymbol{x})= x_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$, $v_3^1(\boldsymbol{x})= \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4$, $v_4^1(\boldsymbol{x})= x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$; $v_1^2(\boldsymbol{x})= x_5 \bar{x}_6$, $v_2^2(\boldsymbol{x})= x_4 \bar{x}_5$, $v_3^2(\boldsymbol{x})= \bar{x}_4 x_6 \vee \bar{x}_4 x_5$, $v_4^2(\boldsymbol{x})= \bar{x}_4 \bar{x}_6$. Легко проверить, что $v_i(\boldsymbol{x})=v_i^1(\boldsymbol{x}) \wedge v_i^2(\boldsymbol{x})$, где $1 \leq i \leq 4$. Найдем по этим последовательностям покрытия $\pi^1=\{\pi_1^1=\varnothing,\ \pi_2^1=\bar{1},\ \pi_3^1=\bar{2},\ \pi_4^1=\bar{3},\ \pi_5^1=\bar{4},\ \pi_6^1=\overline{1,2},\ \pi_7^1=\overline{1,3}\}$, $\pi_1^1(\boldsymbol{x})= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$, $\pi_2^1(\boldsymbol{x})= x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4$, $\pi_3^1(\boldsymbol{x})= \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4$, $\pi_4^1(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$, $\pi_5^1(\boldsymbol{x}) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$, $\pi_6^1(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 x_3 x_4$, $\pi_7^1(\boldsymbol{x})= \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$; $\pi^2 = \{\pi_1^2=\varnothing,\ \pi_2^2=\bar{1},\ \pi_3^2=\bar{2},\ \pi_4^2=\bar{3},\ \pi_5^2=\bar{4},\ \pi_6^2=\overline{1,3,4}\}$, $\pi_1^2(\boldsymbol{x}) = x_4 x_5 x_6$, $\pi_2^2(\boldsymbol{x}) = x_4 x_5 \bar{x}_6$, $\pi_3^2(\boldsymbol{x})= x_4 \bar{x}_5$, $\pi_4^2(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_4 x_6$, $\pi_5^2(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6$, $\pi_6^2(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_4 x_5 \bar{x}_6$. Множество λ представим в виде табл. 1.

Таблица 1

	π_1^2	π_2^2	π_3^2	π_4^2	π_5^2	π_6^2
π_1^1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
π_2^1	$\varnothing$	$\bar{1}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\bar{1}$
π_3^1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\bar{2}$	–	–	–
π_4^1	–	–	–	$\bar{3}$	$\varnothing$	$\bar{3}$
π_5^1	–	–	–	$\varnothing$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
π_6^1	$\varnothing$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	–	–	–
π_7^1	–	–	–	$\bar{3}$	$\varnothing$	$\overline{1,3}$

Строкам табл.1 приписаны блоки покрытия π^1, столбцам – блоки покрытия π^2. Элемент таблицы λ_{ij} ($1 \leq i \leq 7$, $1 \leq j \leq 6$) принимает значение $\pi_i^1 \cap \pi_j^2$, если $\pi_i^1(\boldsymbol{x}) \wedge \pi_j^2(\boldsymbol{x})=1$, иначе этот элемент принимает значение «–». Каждому элементу λ_{ij} таблицы приписываем булеву функцию $\lambda_{ij}(\boldsymbol{x})=\pi_i^1(\boldsymbol{x}) \wedge \pi_j^2(\boldsymbol{x})$, если значение этого элемента отлично от значения «–». По множеству λ, заданному этой таблицей, находим покрытие $\pi=\pi^1 \times \pi^2$. Нетрудно проверить, что это покрытие совпадает с покрытием π, приведенным в примере 2.

3. Представление системы полностью определенных булевых функций компактной таблицей

Пусть система полностью определенных булевых функций $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ представлена секционированной троичной матрицей $C=(U,\alpha)$ и матрицей V. Положим, что по последовательности булевых функций $v_1(\boldsymbol{x})$, $v_2(\boldsymbol{x})$, …, $v_s(\boldsymbol{x})$, заданной секционированной троичной матрицей C, найдены последовательности булевых функций $v_1^1(\boldsymbol{x})$, $v_2^1(\boldsymbol{x})$, …, $v_s^1(\boldsymbol{x})$; $v_1^2(\boldsymbol{x})$, $v_2^2(\boldsymbol{x})$, …, $v_s^2(\boldsymbol{x})$ такие, что $v_i^1(\boldsymbol{x}) \wedge v_i^2(\boldsymbol{x})=v_i(\boldsymbol{x})$, где $1 \leq i \leq s$. Обозначим через π^1, π^2 покрытия этих последовательностей соответственно. Если π является покрытием матрицы C, то $\pi=\pi^1 \times \pi^2$. Представим это произведение таблицей M'. Строкам этой таблицы припишем блоки покрытия π^1, а столбцам – блоки покрытия π^2. Положим, что элемент таблицы b_{ij}, расположенный на пересечении i-й строки с j-м столбцом, принимает значение $b_{ij}=\pi_i^1 \cap \pi_j^2$, где π_i^1 – блок покрытия π^1, приписанный i-й строке таблицы, π_j^2 – блок покрытия π^2, приписанный j-му столбцу таблицы. Если $\pi_i^1(\boldsymbol{x}) \wedge \pi_j^2(\boldsymbol{x})=0$, то значение b_{ij} таблицы назовем *мнимым*. Иначе значение b_{ij} будем называть *действительным*. Мнимое значение в таблице выделим квадратными скобками. Заметим, что действительные элементы таблицы M' задают множество λ (см. определение произведения покрытий). Каждой строке i (столбцу j) таблицы M' приписан как блок π_i^1 покрытия π^1 (блок π_j^2 покрытия π^2), так и соответствующая ему булева функция $\pi_i^1(\boldsymbol{x})$ ($\pi_j^2(\boldsymbol{x})$).

Построим по таблице M' таблицу M следующим образом. Если элемент b_{ij} таблицы M' является мнимым (заключен в квадратные скобки), то элемент $\boldsymbol{b}_{ij}'$ таблицы M принимает значение «–». Если элемент b_{ij} таблицы M' является действительным, то $\boldsymbol{b}_{ij}'=\vee(V,b_{ij})$. Если i-й строке таблицы M' приписан блок π_i, то приписываем i-й строке таблицы M только булеву функцию $\pi_i(\boldsymbol{x})$. Совершенно аналогично приписываем булевы функции и столбцам таблицы M.

Похожим образом построим по таблице M' таблицу N. Строкам и столбцам таблицы N так же, как и в таблице M', припишем блоки покрытий π^1, π^2 соответственно. Элемент $\boldsymbol{b}_{ij}''$ таблицы N равен значению $\vee(V,b_{ij})$, где b_{ij} – элемент таблицы M'. Если элемент b_{ij} в таблице M' является мнимым, то и элемент $\boldsymbol{b}_{ij}''$ в таблице N объявляется мнимым и также заключается в квадратные скобки. Если элемент b_{ij} в таблице M' является действительным, то и элемент $\boldsymbol{b}_{ij}''$ в таблице N объявляется действительным.

Утверждение 2. Как таблица M, так и таблица N задают систему полностью определенных булевых функций $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Пусть система $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задана таблицей M или таблицей N. Поиск значения $\boldsymbol{y}^*$ этой системы для заданного значения $\boldsymbol{x}^*$ по любой из этих таблиц выполняется следующим образом. Находим в таблице строку с номером i, которой приписана булева функция $\pi_i^1(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющая условию $\pi_i^1(\boldsymbol{x}^*)=1$. Аналогично находим в таблице столбец j, которому приписана булева функция $\pi_j^2(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющая условию $\pi_j^2(\boldsymbol{x}^*)=1$. Такая строка и столбец в таблицах M, N всегда существуют и они единственны. На пересечении строки i со столбцом j в таблице находится искомое значение $\boldsymbol{y}^*$. Построенную таким образом таблицу M назовем *компактной*, а таблицу N – *компактной с мнимыми значениями*.

Пример 4. Построим для системы булевых функций, взятой из примера 1, компактную таблицу M и компактную таблицу с мнимыми значениями N. Выберем, как это сделано в примере 3, последовательности булевых функций $v_1^1(\boldsymbol{x})$, $v_2^1(\boldsymbol{x})$, $v_3^1(\boldsymbol{x})$, $v_4^1(\boldsymbol{x})$; $v_1^2(\boldsymbol{x})$, $v_2^2(\boldsymbol{x})$, $v_3^2(\boldsymbol{x})$, $v_4^2(\boldsymbol{x})$ такие, что $v_i^1(\boldsymbol{x}) \wedge v_i^2(\boldsymbol{x}) = v_i(\boldsymbol{x})$, где $1 \le i \le 4$. По покрытиям π^1 и π^2 этих последовательностей, найденных в примере 3, сформируем таблицу M' (табл. 2). По таблице M' построим искомые таблицы M, N (табл. 3, 4 соответственно).

Таблица 2

	π_1^2	π_2^2	π_3^2	π_4^2	π_5^2	π_6^2
π_1^1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
π_2^1	$\varnothing$	$\overline{1}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\overline{1}$
π_3^1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\overline{2}$	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$
π_4^1	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	$\overline{3}$	$\varnothing$	$\overline{3}$
π_5^1	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	$\varnothing$	$\overline{4}$	$\overline{4}$
π_6^1	$\varnothing$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	$[\overline{1}]$
π_7^1	$[\varnothing]$	$[\overline{1}]$	$[\varnothing]$	$\overline{3}$	$\varnothing$	$\overline{1,3}$

Таблица 3

	$\pi_1^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_2^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_3^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_4^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_5^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_6^2(\boldsymbol{x})$
$\pi_1^1(\boldsymbol{x})$	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
$\pi_2^1(\boldsymbol{x})$	(0,0)	(0,1)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,1)
$\pi_3^1(\boldsymbol{x})$	(0,0)	(0,0)	(1,0)	–	–	–
$\pi_4^1(\boldsymbol{x})$	–	–	–	(1,1)	(0,0)	(1,1)
$\pi_5^1(\boldsymbol{x})$	–	–	–	(0,0)	(0,1)	(0,1)
$\pi_6^1(\boldsymbol{x})$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	–	–	–
$\pi_7^1(\boldsymbol{x})$	–	–	–	(1,1)	(0,0)	(1,1)

Таблица 4

	π_1^2	π_2^2	π_3^2	π_4^2	π_5^2	π_6^2
π_1^1	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
π_2^1	(0,0)	(0,1)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,1)
π_3^1	(0,0)	(0,0)	(1,0)	[(0,0)]	[(0,0)]	[(0,0)]
π_4^1	[(0,0)]	[(0,0)]	[(0,0)]	(1,1)	(0,0)	(1,1)
π_5^1	[(0,0)]	[(0,0)]	[(0,0)]	(0,0)	(0,1)	(0,1)
π_6^1	(0,0)	(0,1)	(1,0)	[(0,0)]	[(0,0)]	[(0,1)]
π_7^1	[(0,0)]	[(0,1)]	[(0,0)]	(1,1)	(0,0)	(1,1)

4. Сжатие компактных таблиц

В ряде случаев в компактной и компактной с мнимыми значениями таблицах, задающих систему $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, можно совмещать строки и столбцы так, что измененные таблицы также будут задавать систему $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, но будут состоять из меньшего числа строк и столбцов. Рассмотрим вначале способы совмещения строк в этих таблицах.

Пусть компактная таблица M и компактная таблица с мнимыми значениями N задают систему $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Пусть также известны матрицы $C=(U,\alpha)$, V, задающие систему $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, по которым построены таблицы M, N. Две строки компактной таблицы M *совместимы*, если и только если в таблице не существует столбца такого, что элементы таблицы, находящиеся на пересечении этого столбца с данными строками, определены и различны.

Будем говорить, что булев вектор $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *имплицирует* булев вектор $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \ldots, y_m)$, если и только если для любого i ($1\leq i\leq m$) имеет место $a_i\leq b_i$ (при условии, что $0<1$).

Строки i, j ($i\neq j$) компактной таблицы с мнимыми значениями N *совместимы*, если и только если элементы $\boldsymbol{n}_{ik}$, $\boldsymbol{n}_{jk}$ таблицы N, находящиеся на пересечении этих строк с любым ее k-м столбцом, удовлетворяют следующим условиям.

Если $\boldsymbol{n}_{ik}$, $\boldsymbol{n}_{jk}$ – действительны, то $\boldsymbol{n}_{ik}=\boldsymbol{n}_{jk}$. Если одно из этих значений является мнимым, а другое – действительным, то мнимое значение имплицирует действительное.

Подмножество строк как компактной, так и компактной с мнимыми значениями таблиц *совместимо*, если и только если совместима любая пара строк, входящая в это подмножество. Найдем на множестве строк любой из этих таблиц разбиение, каждый класс которого является совместимым подмножеством строк. Из множества вариантов таких разбиений выберем то из них, которое содержит наименьшее число классов.

По выбранному разбиению $\omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots,\omega_a\}$ и компактной таблице M построим новую (сжатую) компактную таблицу M^T. Число строк в этой таблице равно числу a классов в разбиении. Строка с номером q ($1\leq q\leq a$) таблицы M^T строится по классу с номером q разбиения. Элемент $\boldsymbol{b}_j$ этой строки принимает значение «–», если все элементы компактной таблицы M, находящиеся на пересечении строк, входящих в данный класс, с j-м столбцом, имеют значение «–». Иначе элемент $\boldsymbol{b}_j$ принимает то значение, отличное от «–», которое имеет хотя бы один элемент на пересечении j-го столбца с одной из данных строк. Заметим, что значения всех таких элементов равны. Полученной таким образом строке с номером q приписывается булева функция $\sigma_q(\boldsymbol{x})$, которая получается дизъюнкцией булевых функций, приписанных строкам, входящим в рассматриваемый класс.

Похожим образом построим по компактной с мнимыми значениями таблице N и разбиению ω таблицу N^T. Число строк в этой таблице также равно числу a классов в разбиении. Строка с номером q ($1\leq q\leq a$) таблицы N^T строится по q-му классу разбиения. Если среди элементов таблицы N, находящихся на пересечении строк, входящих в данный класс, с j-м столбцом таблицы N, имеется хотя бы один действительный элемент, то элемент $\boldsymbol{b}_j$ искомой строки имеет именно это значение. Если все элементы рассматриваемого пересечения являются мнимыми, то элемент $\boldsymbol{b}_j$ является мнимым и получается посредством покомпонентной дизъюнкции элементов, входящих в пересечение. Строкам таблицы N^T приписываются блоки покрытия $\varphi=\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_a\}$, которое строится по покрытию π^1 и данному разбиению. Блок φ_q ($1\leq q\leq a$) находится по q-му классу разбиения. Он равен объединению блоков покрытия π^1, входящих в этот класс. Булева функция $\varphi_q(\boldsymbol{x})$ получается дизъюнкцией булевых функций, приписанных тем блокам покрытия π^1, объединением которых получен блок φ_q.

Утверждение 3. Компактные таблицы M^T и N^T задают систему булевых функций $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Утверждение 4. Покрытие $\varphi\times\pi^2$ и матрица V задают систему $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Все вышесказанное справедливо и для столбцов. Таким образом, компактную таблицу можно сжимать не только по строкам, но и по столбцам. Например, компактную таблицу можно вначале сжать по строкам, а затем по столбцам.

Пример 5. Найдем совместимые строки в компактной таблице M и компактной с мнимыми значениями таблице N из примера 4. Нетрудно проверить, что в таблице M совместимы следующие пары строк: (3, 4), (3, 5), (3, 7), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (6, 7). В таблице N совместимы эти же пары строк за исключением пары (3, 7). На пересечении этой пары строк со вторым столбцом находится действительный элемент (0,0) и мнимый элемент (0,1). Мнимый элемент не имплицирует действительный, поэтому данные строки не совместимы. В таблице M можно совмещать строки по разбиению $A=\{A_1=\{1\}, A_2=\{2), A_3=\{3, 4, 7\}, A_4=\{5, 6\}\}$, а в таблице N – по разбиению $A'=\{A_1'=\{1\}, A_2'=\{2), A_3'=\{3, 5\}, A_4'=\{4, 6, 7\}\}$. В результате совмещения строк в этих таблицах по данным разбиениям получим таблицы M^T и N^T, заданные табл. 5 и 6 соответственно.

Таблица 5

	$\pi_1^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_2^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_3^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_4^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_5^2(\boldsymbol{x})$	$\pi_6^2(\boldsymbol{x})$
$\sigma_1(\boldsymbol{x})=\pi_1^1(\boldsymbol{x})$	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
$\sigma_2(\boldsymbol{x})=\pi_2^1(\boldsymbol{x})$	(0,0)	(0,1)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,1)
$\sigma_3(\boldsymbol{x})=\pi_3^1(\boldsymbol{x})\vee\pi_4^1(\boldsymbol{x})\vee\pi_7^1(\boldsymbol{x})$	(0,0)	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(1,1)
$\sigma_4(\boldsymbol{x})=\pi_5^1(\boldsymbol{x})\vee\pi_6^1(\boldsymbol{x})$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,0)	(0,1)	(0,1)

Таблица 6

	π_1^2	π_2^2	π_3^2	π_4^2	π_5^2	π_6^2
$\varphi_1=\pi_1^1$	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
$\varphi_2=\pi_2^1$	(0,0)	(0,1)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,1)
$\varphi_3=\pi_3^1\cup\pi_5^1$	(0,0)	(0,0)	(1,0)	(0,0)	(0,1)	(0,1)
$\varphi_4=\pi_4^1\cup\pi_6^1\cup\pi_7^1$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(1,1)

Получим $\varphi=\{\varphi_1=\varnothing, \varphi_2=\bar{1}, \varphi_3=\overline{2,4}, \varphi_4=\overline{1,2,3}\}$, $\varphi_1(\boldsymbol{x})=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4\vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$, $\varphi_2(\boldsymbol{x})=x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2\bar{x}_4\vee\bar{x}_1x_2x_4$, $\varphi_3(\boldsymbol{x})=\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\vee x_1\bar{x}_2x_4\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, $\varphi_4(\boldsymbol{x})=\bar{x}_1x_3\bar{x}_4\vee x_1x_2x_3x_4$.

5. Тривиально секционированные троичные матрицы

Назовем секционированную троичную матрицу $C=(U,\alpha)$ тривиально секционированной, если и только если каждая ее секция состоит из одной строки. Функция α является в этом случае тождественной, и можно рассматривать только троичную матрицу U, которую будем считать тривиально секционированной. Покрытие для нее в дальнейшем будем называть *покрытием троичной матрицы*.

В последовательности булевых функций $v_1(\boldsymbol{x}), v_2(\boldsymbol{x}), \ldots, v_l(\boldsymbol{x})$, задаваемой тривиально секционированной матрицей U, состоящей из l строк, каждая булева функция $v_i(\boldsymbol{x})$ $(1\le i\le l)$ представляется одной конъюнкцией, задаваемой i-й строкой матрицы U. В связи с этим легко по последовательности $v_1(\boldsymbol{x}), v_2(\boldsymbol{x}), \ldots, v_l(\boldsymbol{x})$ найти последовательности $v^1{}_1(\boldsymbol{x}), v^1{}_2(\boldsymbol{x}), \ldots, v^1{}_l(\boldsymbol{x})$; $v^2{}_1(\boldsymbol{x}), v^2{}_2(\boldsymbol{x}), \ldots, v^2{}_l(\boldsymbol{x})$, булевы функции которых удовлетворяют условию $v^1{}_i(\boldsymbol{x})\wedge v^2{}_i(\boldsymbol{x})=v_i(\boldsymbol{x})$, где $1\le i\le l$. В частности, такое деление можно, например, получить по разбиению или покрытию аргументов. Положим, что имеются два подмножества W, Z множества булевых аргументов $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ таких, что $W\cup Z=X$. Построим по матрице U матрицы U^1, U^2. Матрица U^1 состоит из столбцов матрицы U, помеченных переменными, входящими в множество W. Аналогично по матрице U и подмножеству Z строится матрица U^2. Обозначим через $\boldsymbol{w}$ векторную переменную, составленную из компонент множества W, а через $\boldsymbol{z}$ – векторную переменную, составленную из переменных множества Z. Будем считать, что матрица U^1 задает последовательность булевых функций $v^1{}_1(\boldsymbol{w}), v^1{}_2(\boldsymbol{w}), \ldots, v^1{}_l(\boldsymbol{w})$, а матрица U^2 – последовательность $v^2{}_1(\boldsymbol{z}), v^2{}_2(\boldsymbol{z}), \ldots, v^2{}_l(\boldsymbol{z})$. Строки с номером i $(1\le i\le l)$ матриц U^1, U^2 задают булевы функции $v^1{}_i(\boldsymbol{w})$, $v^2{}_i(\boldsymbol{z})$ соответственно. Очевидно, что в этом случае выполняется равенство $v_i(\boldsymbol{x})=v^1{}_i(\boldsymbol{w})\wedge v^2{}_i(\boldsymbol{z})$. По покрытиям π^1,

π^2 матриц U^1, U^2 соответственно легко строится компактная или компактная с мнимыми значениями таблица задания исходной системы булевых функций. Так как число блоков в покрытиях π^1 и π^2 не всегда достигает своего максимального значения, которое для этих покрытий π^1 равно соответственно $2^{|W|}$ и $2^{|Z|}$, то построенная компактная таблица имеет меньшие размеры, чем соответствующая карта Карно.

6. Вычисление покрытий для троичных и секционированных троичных матриц

Достаточно эффективные методы вычисления покрытия троичной матрицы можно строить с использованием операции произведения покрытий. Эти методы основаны на следующих соображениях.

1. Существуют троичные матрицы, поиск покрытий которых не составляет больших трудностей. В дальнейшем такие матрицы будем называть простыми.

2. Покрытие любой троичной матрицы равно произведению покрытий некоторой совокупности простых матриц.

Вычисление покрытия по определенным элементам троичной матрицы. Пусть элемент u_{ij} ($1 \le i \le l$, $1 \le j \le n$) троичной матрицы U является определенным, т.е. $u_{ij} \in \{0,1\}$. Построим простую троичную матрицу $U(u_{ij})$. Эта матрица получается из матрицы U заменой всех ее элементов, кроме элемента u_{ij}, на значение «–». Непосредственно по определению покрытия секционированной троичной матрицы найдем покрытие υ_{ij} тривиально секционированной троичной матрицы $U(u_{ij})$. Это покрытие состоит из двух блоков: $\upsilon_{ij}^1 = \overline{1,2,\ldots,l}$, $\upsilon_{ij}^2 = \overline{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,l}$. Если $u_{ij}=0$, то $\upsilon_{ij}^1(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_j$, $\upsilon_{ij}^2(\boldsymbol{x}) = x_j$. Если $u_{ij}=1$, то $\upsilon_{ij}^1(\boldsymbol{x}) = x_j$, $\upsilon_{ij}^2(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_j$. Назовем покрытие υ_{ij} *покрытием определенного элемента* u_{ij}.

Утверждение 5. Покрытие троичной матрицы U равно произведению покрытий всех ее определенных элементов.

Пример 6. Рассмотрим матрицы

$$U' = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} - & 1 & 0 \\ 1 & 0 & - \\ 0 & - & 1 \\ 0 & 1 & - \\ 0 & - & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad U'(u_{13}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} - & - & 0 \\ - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \end{array}, \quad U'(u_{33}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & 1 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \end{array}, \quad U'(u_{53}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Последние три из этих матриц построены по определенным элементам u_{13}, u_{43}, u_{63} матрицы U'. По приведенному выше правилу сформируем покрытия матриц $U'(u_{13})$, $U'(u_{43})$, $U'(u_{63})$. Получим $\upsilon_{13} = \{\upsilon_{13}^1 = \overline{1,2,3,4,5}$, $\upsilon_{13}^2 = \overline{2,3,4,5}\}$, $\upsilon_{13}^1(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_6$, $\upsilon_{13}^2(\boldsymbol{x}) = x_6$; $\upsilon_{33} = \{\upsilon_{33}^1 = \overline{1,2,3,4,5}$, $\upsilon_{33}^2 = \overline{1,2,4,5}\}$, $\upsilon_{33}^1(\boldsymbol{x}) = x_6$, $\upsilon_{33}^2(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_6$; $\upsilon_{53} = \{\sigma_{53}^1 = \overline{1,2,3,4,5}$, $\upsilon_{53}^2 = \overline{1,2,3,4}\}$, $\upsilon_{63}^1(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_6$, $\upsilon_{63}^2(\boldsymbol{x}) = x_6$. Вычислим произведение этих покрытий $\upsilon_{13} \times \upsilon_{43} \times \upsilon_{63}$. Получим $\eta = \upsilon_{13} \times \upsilon_{33} = \{\eta_0 = \overline{1,2,4,5}$, $\eta_1 = \overline{2,3,4,5}\}$, $\eta_0(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_6$, $\eta_1(\boldsymbol{x}) = x_6$; $\eta' = \eta \times \upsilon_{53} = \{\eta_0' = \overline{1,2,4,5}$ $\eta_1' = \overline{2,3,4}\}$, $\eta_0'(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_6$, $\eta_1'(\boldsymbol{x}) = x_6$. Продолжая процесс умножения полученного покрытия на покрытия остальных определенных элементов, получим покрытие π' матрицы U', где $\pi' = \{\pi_1' = \varnothing$, $\pi_2' = \bar{1}$, $\pi_3' = \bar{3}$, $\pi_4' = \bar{5}$, $\pi_5' = \bar{2}$, $\pi_6' = \overline{3,4}$, $\pi_7' = \overline{1,4,5}\}$, $\pi_1'(\boldsymbol{x}) = x_4 x_5 x_6$, $\pi_2'(\boldsymbol{x}) = x_4 x_5 \bar{x}_6$, $\pi_3'(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_4 \bar{x}_5 x_6$, $\pi_4'(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6$, $\pi_5'(\boldsymbol{x}) = x_4 \bar{x}_5$, $\pi_6'(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_4 x_5 x_6$, $\pi_7'(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_4 x_5 \bar{x}_6$.

Вычисление покрытия по столбцам троичной матрицы. Обозначим через δ_j ($1 \le j \le n$) покрытие матрицы U_j, построенной по матрице U, приданием всем ее элементам, не входящим в j-й столбец, значения «–». Покрытие δ_j состоит из двух блоков δ_{j0}, δ_{j1}. Номер i ($1 \le i \le l$) включается в δ_{j0} (в δ_{j1}), если и только если элемент матрицы U_j, расположенный на i-й строке, равен нулю или «–» (единице или «–»). Если матрица U_j состоит из одних нулевых (единичных) элементов, то блок δ_{j0} (δ_{j1}) содержит номера всех строк матрицы, а $\delta_{j1} = \varnothing$ ($\delta_{j0} = \varnothing$). Если все элементы матрицы U_j равны «–», то покрытие δ_j состоит из одного блока, содержащего номера всех строк. Булева функция, приписанная этому блоку, равна логической единице.

Утверждение 6. Покрытие $\delta_1 \times \delta_2 \times \ldots \times \delta_n$ является покрытием троичной матрицы U.

Пример 7. Для троичных матриц U_1, U_2, U_3, построенных по троичной матрице U' из примера 6, выпишем соответственно их покрытия $\delta_1=\{\delta_{10}=\overline{1,3,4,5}\,,\ \delta_{11}=\overline{1,2}\,\}$, $\delta_{10}(\boldsymbol{x})=\bar{x}_4$, $\delta_{11}(\boldsymbol{x})=x_4$; $\delta_2=\{\delta_{20}=\overline{2,3,5}\,,\ \delta_{21}=\overline{1,3,4,5,6}\,\}$, $\delta_{20}(\boldsymbol{x})=\bar{x}_5$, $\delta_{21}(\boldsymbol{x})=x_5$; $\delta_3=\{\delta_{30}=\overline{1,2,4,5}\,,\ \delta_{31}=\overline{2,3,4}\,\}$, $\delta_{30}(\boldsymbol{x})=\bar{x}_6$, $\delta_{31}(\boldsymbol{x})=x_6$. Нетрудно проверить, что произведение этих покрытий равно покрытию матрицы U'. Заметим, что покрытие δ_3, как это следует из примера 6, равно произведению покрытий определенных элементов u_{13}, u_{33}, u_{53}.

Вычисление покрытия по строкам троичной матрицы. Построим простую троичную матрицу U^i ($1\le i\le l$). Эта матрица получается из матрицы U приданием значения «–» всем ее элементам, кроме элементов i-й строки. Обозначим через K_i конъюнкцию, построенную по i-й строке матрицы U^i. Если хотя бы один элемент i-й строки матрицы U^i имеет значение, отличное от «–», то покрытие γ_j простой матрицы U^i состоит из двух блоков $\gamma_{j0}=\overline{1,2,\ldots,l}$ и $\gamma_{j1}=\overline{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,l}$, где $\gamma_{j0}(\boldsymbol{x})=K_i$, $\gamma_{j1}(\boldsymbol{x})=\bar{K}_i$. Если в i-й строке матрицы U^i все элементы имеют значение «–», то полагаем K_i равной логической единице. Покрытие γ_j в этом случае состоит из одного блока, содержащего номера всех строк.

Утверждение 7. Покрытие $\gamma_1\times\gamma_2\times\ldots\times\gamma_l$ является покрытием троичной матрицы U.

Пример 8. Для троичных матриц U^1, U^2, …, U^6, построенных по троичной матрице U' из примера 6, выпишем их покрытия $\gamma_1=\{\gamma_{10}=\overline{1,2,3,4,5}\,,\ \gamma_{11}=\overline{2,3,4,5}\,\}$, $\gamma_{10}(\boldsymbol{x})=x_5\,\bar{x}_6$, $\gamma_{10}(\boldsymbol{x})=\bar{x}_5\vee x_6$; $\gamma_2=\{\gamma_{20}=\overline{1,2,3,4,5}\,,\ \gamma_{21}=\overline{1,3,4,5}\,\}$, $\gamma_{20}(\boldsymbol{x})=x_4\,\bar{x}_5$, $\gamma_{21}(\boldsymbol{x})=\bar{x}_4\vee x_5$; $\gamma_3=\{\gamma_{30}=\overline{1,2,3,4,5}\,,\ \gamma_{31}=\overline{1,2,4,5}\,\}$, $\gamma_{30}(\boldsymbol{x})=\bar{x}_4\,x_6$, $\gamma_{31}(\boldsymbol{x})=x_4\vee\bar{x}_6$; $\gamma_4=\{\gamma_{40}=\overline{1,2,3,4,5}\,,\ \gamma_{41}=\overline{1,2,3,5}\,\}$, $\gamma_{40}(\boldsymbol{x})=\bar{x}_4\,x_5$, $\gamma_{41}(\boldsymbol{x})=x_4\vee\bar{x}_5$; $\gamma_5=\{\gamma_{50}=\overline{1,2,3,4,5}\,,\ \gamma_{51}=\overline{1,2,3,4}\,\}$, $\gamma_{50}(\boldsymbol{x})=\bar{x}_4\,\bar{x}_6$, $\gamma_{51}(\boldsymbol{x})=x_4\vee x_6$. Произведение этих покрытий равно покрытию рассматриваемой матрицы U'.

Вычисление покрытия секционированной троичной матрицы. Пусть π является покрытием троичной матрицы U, которое найдено по одному из вышеописанных методов. Для каждого блока π_q покрытия π построим подмножество $\mu_q=\{\alpha(d)/d\in\pi_q\}$ множества S. Припишем подмножеству μ_q булеву функцию $\mu_q(\boldsymbol{x})=\pi_q(\boldsymbol{x})$. Объединим все найденные подмножества в множество μ. Образуем покрытие $\varpi(C)$, взяв в качестве его блоков все различные элементы множества μ. Всякому блоку ϖ_r покрытия $\varpi(C)$ припишем булеву функцию $\varpi_r(\boldsymbol{x})$. Эта функция получается дизъюнкцией всех булевых функций, приписанных тем элементам множества μ, которые равны блоку ϖ_r.

Утверждение 8. Покрытие ϖ (C) является покрытием секционированной троичной матрицы $C=(U,\alpha)$.

Пример 9. Рассмотрим секционированную троичную матрицу $C'=(U',\alpha')$, в которой троичная матрица U' взята из примера 6, а отображение α' задано следующим образом:

i	$\alpha'(i)$
1	1
2	2
3	3
4	3
5	4

Покрытие π' матрицы U' также приведено в примере 6. Построим по этому покрытию множество $\mu=\{\mu_1=\varnothing,\ \mu_2=\bar{1},\ \mu_3=\bar{3},\ \mu_4=\bar{4},\ \mu_5=\bar{2},\ \mu_6=\bar{3},\ \mu_7=\overline{1,3,4}\,\}$, $\mu_1(\boldsymbol{x})=x_4\,x_5\,x_6$, $\mu_2(\boldsymbol{x})=x_4\,x_5\,\bar{x}_6$, $\mu_3(\boldsymbol{x})=\bar{x}_4\,\bar{x}_5\,x_6$, $\mu_4(\boldsymbol{x})=\bar{x}_4\,\bar{x}_5\,\bar{x}_6$, $\mu_5(\boldsymbol{x})=x_4\,\bar{x}_5$, $\mu_6(\boldsymbol{x})=\bar{x}_4\,x_5\,x_6$, $\mu_7(\boldsymbol{x})=\bar{x}_4\,x_5\,\bar{x}_6$. Сформируем покрытие $\varpi(C)=\{\varpi_1=\varnothing,\ \varpi_2=\bar{1},\ \varpi_3=\bar{2},\ \varpi_4=\bar{3},\ \varpi_5=\bar{4},\ \varpi_6=\overline{1,3,4}\,\}$, $\varpi_1(\boldsymbol{x})=x_4\,x_5\,x_6$, $\varpi_2(\boldsymbol{x})=x_4\,x_5\,\bar{x}_6$, $\varpi_3(\boldsymbol{x})=\bar{x}_4\,x_6$, $\varpi_4(\boldsymbol{x})=\bar{x}_4\,\bar{x}_5\,\bar{x}_6$, $\varpi_5(\boldsymbol{x})=x_4\,\bar{x}_5$, $\varpi_6(\boldsymbol{x})=\bar{x}_4\,x_5\,\bar{x}_6$. Это покрытие является покрытием последовательности функций $v_1^2(\boldsymbol{x})=x_5\,\bar{x}_6$, $v_2^2(\boldsymbol{x})=x_4\,\bar{x}_5$, $v_3^2(\boldsymbol{x})=\bar{x}_4\,x_6\vee\bar{x}_4\,x_5$, $v_4^2(\boldsymbol{x})=\bar{x}_4\,\bar{x}_6$ из примера 3.

Заключение

В настоящей работе рассматриваются два типа таблиц для задания систем полностью определенных булевых функций. Таблицы первого типа называются компактными, второго – компактными с мнимыми значениями. Строкам и столбцам таблиц первого типа приписаны булевы функции, строкам и столбцам таблиц второго типа – блоки соответствующих покрытий. Компактные таблицы не содержат информации о совокупности ДНФ, которыми задается исходная система. Наличие этой информации в виде блоков покрытий в компактных таблицах с мнимыми значениями несколько ограничивает их возможности по совмещению строк и столбцов по сравнению с компактными таблицами, но вместе с тем существенно упрощает процесс преобразования системы от табличного к ее матричному представлению. В данной работе также предложены новые способы вычисления покрытий секционированных троичных матриц.

Список литературы

1. Закревский А.Д. Логический синтез каскадных схем. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
2. Ashenhurst R.L. The Decomposition of Switching Functions // Proceedings of on International Symposium on the Theory of Switching, April 2-5, 1957. - Harvard Univ. - V.29. - 1959. – P. 74-116.
3. Curtis H.A. Generalized Tree Circuit – The Basic Building Block of an Extended Decomposition Theory // J. Assn. Comput. – March. – 1963. - №10. – P. 562-581.
4. Curtis H.A. Simplified Decomposition of Boolean Function // IEEE Trans. on Comput. – V. 25. - October 1967. – P. 1033-1044.
5. Karp R.M. Functional Decomposition and Switching Circuit Design // J. Soc. Industr. Appl. Math. - V. 11. - No. 2. - June 1963. – P. 291-335.
6. Pottosin Yu.V., Shestakov E.A. Decomposition of system of completely specified Boolean functions using their compact table representation // 4th International Workshop «Boolean Problems». – Freiberg (Sachsen), 2000. – P. 135-142.
7. Поттосин Ю.В., Шестаков Е.А. Компактные таблицы и их использование при декомпозиции систем полностью определенных булевых функций // Идентификация образов. Вып. 2. – Мн.: Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 2001. – С. 107-120.
8. Шестаков Е.А. Декомпозиция системы полностью определенных булевых функций по покрытию аргументов // Автоматика и вычислительная техника. – 1994. – №1. – С. 12-20.
9. Brzozowski J.A., Luba T. Decomposition of Boolean functions specified by cubes. Research Report CS-97-01. - University of Waterloo, Waterloo, Canada, 1997. - 36 p. (ftp://cs-archive.uwaterloo.ca/cs-archive/CS-97-01/CS-97-01.ps.Z)

Поступила 16 .02.04

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: pott@newman.bas-net.by

Yu.V. Pottosin, E.A. Shestakov

TABLE REPRESENTATION OF SYSTEMS OF COMPLETELY SPECIFIED BOOLEAN FUNCTIONS

A way of representation of systems of completely specified Boolean functions in the table form is suggested. The way is based on the concept of the cover of a sectioned ternary matrix. The table used for representation of Boolean function systems is called compact one. Such tables constitute the base of the technique applied for decomposition of Boolean functions. They are similar to the Karnaugh map but have the less size. The methods for calculation of covers of sectioned ternary matrices are considered.