УДК 681.3

А.А. Коляда, В.К. Кравцов, А.Ф. Чернявский

ОСНОВЫ МИНИМАЛЬНО ИЗБЫТОЧНОЙ ИНТЕРВАЛЬНО-МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ С РЕКУРСИВНОЙ КОДОВОЙ СТРУКТУРОЙ

Для нового класса интервально-модулярных систем счисления (ИМСС) – рекурсивных минимально избыточных ИМСС (МИИМСС) - предложена методология синтеза компьютерных алгоритмов, которые ориентированы на высокоточные вычисления. На примере рекурсивных МИИМСС второго уровня показано, что базовые аддитивные и мультипликативные процедуры для исследуемых числовых систем сохраняют все важнейшие преимущества модулярной арифметики: внутренний параллелизм, простоту механизма реконфигурации вычислительных структур, наращивания мощности динамического диапазона и др. При этом в отличие от классических аналогов рекурсивные МИИМСС обладают более простыми немодульными процедурами. Это обусловлено явным присутствием в составе кодовых слов интервальных индексов чисел.

Введение

Среди развиваемых в последние годы технологий высокоточных параллельных вычислений особое место занимают технологии, базирующиеся на модулярной арифметике (МА) [1–3]. Классическая модулярная вычислительная технология отличается высокой продуктивностью по таким показателям, как производительность, простота распараллеливания, гибкость механизма изменения мощности рабочего диапазона, технологичность базовых аппаратных структур и др. Фундаментальные преимущества МА наиболее ярко проявляются при реализации процедур модульного типа, т.е. тех, которые состоят главным образом из достаточно длинных сегментов, включающих только модульные операции – операции сложения, вычитания и умножения без контроля переполнения. Излагаемые в настоящей статье основы компьютерной арифметики нового класса модулярных систем счисления (МСС) – рекурсивных МИИМСС – позволяют существенно расширить семейство вычислительных процессов, на которых отмеченные достоинства МА сохраняются в полной мере. Это достигается за счет вкючения в состав кодовых слов базовых интегральных характеристик – интервальных индексов (ИИ) элементов рабочего диапазона, а также благодаря тривиальности процедуры формирования ИИ.

1. Рекурсивное интервально-модулярное кодирование

Рекурсивная МИИМСС, задаваемая системой попарно простых натуральных модулей $m_1, m_2, \ldots, m_k$ $(k \geq 2)$, определяется по следующей рекуррентной схеме.

Пусть $\boldsymbol{D}$ – некоторый диапазон $(\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{Z}$ – множество целых чисел (ЦЧ)$)$ и X – его произвольный элемент. Код рекурсивной МИИМСС нулевого уровня числа X есть его обычный интервально-модулярный код (ИМК) [3], т.е. вектор величин

$$(\chi_1^{(0)}, \chi_2^{(0)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(0)}; I_X^{(0)}) = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{k-1}; I(X)), \tag{1}$$

где $\chi_i = |X|_{m_i}$ $(i = \overline{1, k-1})$; через $|a|_m$ обозначается элемент кольца вычетов $\boldsymbol{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, сравнимый с рациональной величиной a по модулю $m>1$; $I(X)$ – интервальный индекс числа X, который определяется равенством

$$X = \sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \left| M_{i,k-1}^{-1} \chi_i \right|_{m_i} + I(X) M_{k-1}; \tag{2}$$

$$M_{i,k-1} = \frac{M_{k-1}}{m_i}; \quad M_{k-1} = \prod_{j=1}^{k-1} m_j .$$

Представляя в (1) ИИ $I_X^{(0)}$ числа X в коде обычной ИМСС, мы получим рекурсивный ИМК элемента X диапазона $\boldsymbol{D}$ первого уровня:

$$(\chi_1^{(0)}, \chi_2^{(0)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(0)}; \chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(1)}; I_X^{(1)})$$
$$(\chi_i^{(1)} = \left| I_X^{(0)} \right|_{m_i} (i = \overline{1, k-1}),\ I_X^{(1)} = I(I_X^{(0)})). \tag{3}$$

Напомним, что в соответствии с (2) интервально-индексная характеристика $I_X^{(1)}$ удовлетворяет равенству

$$I_X^{(0)} = \sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \left| M_{i,k-1}^{-1} \chi_1^{(0)} \right|_{m_i} + I_X^{(1)} M_{k-1}. \tag{4}$$

Замена в (3) ИИ $I_X^{(1)}$ на его ИМК дает код рекурсивной ИМСС второго уровня числа X:

$$(\chi_1^{(0)}, \chi_2^{(0)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(0)}; \chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(1)}; \chi_1^{(2)}, \chi_2^{(2)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(2)}; I_X^{(2)})$$
$$(\chi_i^{(2)} = \left| I_X^{(1)} \right|_{m_i} (i = \overline{1, k-1}),\ I_X^{(2)} = I(I_X^{(1)})). \tag{5}$$

Продолжая описываемый рекуррентный процесс, на n-й итерации (n — неотрицательное целое число) получим рекурсивный ИМК величины X n-го уровня:

$$(\chi_1^{(0)}, \chi_2^{(0)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(0)}; \chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(1)}; \ldots; \chi_1^{(n)}, \chi_2^{(n)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(n)}; I_X^{(n)})$$
$$(\chi_i^{(n)} = \left| I_X^{(n-1)} \right|_{m_i} (i = \overline{1, k-1}),\ I_X^{(n)} = I(I_X^{(n-1)})). \tag{6}$$

2. Синтез аддитивных процедур

Структура кодовых пространств рекурсивных МИИМСС с основаниями $m_1, m_2, \ldots, m_k$ порождает компьютерную арифметику, которая по своим свойствам и уровню параллелизма занимает промежуточное положение между позиционной арифметикой и МА. При этом исследуемый класс числовых систем по ключевым признакам наиболее близок к минимально избыточным МСС (МИМСС) [1].

Ограничиваясь для простоты рассмотрением рекурсивных МИИМСС первого уровня, в которых произвольный элемент X диапазона $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{Z}^{-}_{2MM_{k-1}^{n}} = \{-m_0 M_{k-1}^2, -m_0 M_{k-1}^2 + 1, \ldots, -m_0 M_{k-1}^2 - 1\}$ кодируется вектором $(\chi_1^{(0)}, \chi_2^{(0)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(0)}; \chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(1)}; I_X^{(1)})$, остановимся сначала на проблеме синтеза аддитивных процедур.

Пусть в данной рекурсивной МИИМСС первого уровня требуется сложить два числа A и B из $\boldsymbol{D}$, имеющие соответственно коды $(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(0)}; \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(1)}; I_A^{(1)})$ и $(\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \ldots, \beta_{k-1}^{(0)}; \beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \ldots, \beta_{k-1}^{(1)}; I_B^{(1)})$, где $\alpha_i^{(0)} = |A|_{m_i}$, $\beta_i^{(0)} = |B|_{m_i}$, $\alpha_i^{(1)} = |I_A^{(0)}|_{m_i}$, $\beta_i^{(1)} = |I_B^{(0)}|_{m_i}$ $(i = \overline{1, k-1})$; $I_A^{(0)} = I(A)$, $I_B^{(0)} = I(B)$, $I_A^{(1)} = I(I_A^{(0)})$, $I_B^{(1)} = I(I_B^{(0)})$, $I(A)$ и $I(B)$ – ИИ чисел A и B, которые в соответствии с (2) удовлетворяют равенствам

$$A = \sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \alpha_{i,k-1}^{(0)} + I_A^{(0)} M_{k-1} \left(\alpha_{i,k-1}^{(0)} = \left| M_{i,k-1}^{-1} \alpha_i^{(0)} \right|_{m_i}\right); \tag{7}$$

$$B = \sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \beta_{i,k-1}^{(0)} + I_B^{(0)} M_{k-1} \left(\beta_{i,k-1}^{(0)} = \left| M_{i,k-1}^{-1} \beta_i^{(0)} \right|_{m_i}\right). \tag{8}$$

Так как

$$I_A^{(0)} = \sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \alpha_{i,k-1}^{(1)} + I_A^{(1)} M_{k-1} \left(\alpha_{i,k-1}^{(1)} = \left| M_{i,k-1}^{-1} \alpha_i^{(1)} \right|_{m_i}\right) \tag{9}$$

и

$$I_B^{(0)} = \sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \beta_{i,k-1}^{(1)} + I_B^{(1)} M_{k-1} \left(\beta_{i,k-1}^{(1)} = \left| M_{i,k-1}^{-1} \beta_i^{(1)} \right|_{m_i}\right), \tag{10}$$

то, подставляя (9) в (7), а (10) в (8) и складывая полученные интервально-модулярные формы (ИМФ), будем иметь

$$A + B = \sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} (\alpha_{i,k-1}^{(1)} + \beta_{i,k-1}^{(1)}) +$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} (\alpha_{i,k-1}^{(1)} + \beta_{i,k-1}^{(1)}) + (I_A^{(1)} + I_B^{(1)}) M_{k-1} \right) M_{k-1}. \tag{11}$$

Согласно лемме Евклида из теории делимости

$$\alpha_{i,k-1}^{(j)} + \beta_{i,k-1}^{(j)} = \left| \alpha_{i,k-1}^{(j)} + \beta_{i,k-1}^{(j)} \right|_{m_i} + \left\lfloor (\alpha_{i,k-1}^{(j)} + \beta_{i,k-1}^{(j)}) / M_i \right\rfloor M_i =$$
$$= \left| \alpha_{i,k-1}^{(j)} + \beta_{i,k-1}^{(j)} \right|_{m_i} + \omega_i^{(j)} M_i \ (i = \overline{1, k-1}; j = 0, 1). \tag{12}$$

Поэтому сумму (11) можно преобразовать следующим образом:

$$A + B = \sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \left| \alpha_{i,k-1}^{(0)} + \beta_{i,k-1}^{(0)} \right|_{m_i} + \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i^{(0)} m_i M_{i,k-1} +$$

$$+\,(\sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1}\left|\alpha_{i,k-1}^{(1)}+\beta_{i,k-1}^{(1)}\right|_{m_i}+\sum_{i=1}^{k-1}\omega_i^{(1)} m_i M_{i,k-1}+(I_A^{(1)}+I_B^{(1)})\,M_{k-1})\,M_{k-1}=$$

$$=\sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1}\left|\alpha_{i,k-1}^{(0)}+\beta_{i,k-1}^{(0)}\right|_{m_i}+(\sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1}\left|\alpha_{i,k-1}^{(1)}+\beta_{i,k-1}^{(1)}\right|_{m_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\omega_i^{(0)}+(I_A^{(1)}+I_B^{(1)}+\sum_{i=1}^{k-1}\omega_i^{(1)})\,M_{k-1})\,M_{k-1}. \tag{13}$$

Пусть

$$\Pi_j=\sum_{i=1}^{k-1}\omega_i^{(j)}=\sum_{i=1}^{k-1}\left\lfloor(\alpha_{i,k-1}^{(1)}+\beta_{i,k-1}^{(1)})/m_i\right\rfloor, \tag{14}$$

где через $\lfloor a\rfloor$ обозначается целая часть числа a (см. (12)), и пусть числу Π_0 отвечает ИМФ:

$$\Pi_0=\sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1}\,\pi_{i,k-1}^{(0)}+I(\Pi_0)\,M_{k-1}\ \ (\pi_{i,k-1}^{(0)}=\left|\pi_{i,k-1}^{(-1)}\,\Pi_0\right|_{m_i}). \tag{15}$$

Тогда из (13) получим

$$A+B=\sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1}\left|\alpha_{i,k-1}^{(0)}+\beta_{i,k-1}^{(0)}\right|_{m_i}+(\sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1}\left|\alpha_{i,k-1}^{(1)}+\beta_{i,k-1}^{(1)}\right|_{m_i}+$$

$$+\Pi_0+(I_A^{(1)}+I_B^{(1)}+\Pi_1)\,M_{k-1})\,M_{k-1}=\sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1}\left|\alpha_{i,k-1}^{(0)}+\beta_{i,k-1}^{(0)}\right|_{m_i}+$$

$$+\,(M_{i,k-1}||\alpha_{i,k-1}^{(1)}+\beta_{i,k-1}^{(1)}|_{m_i}+\pi_{i,k-1}^{(0)}|_{m_i}+$$

$$+M_{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}\left\lfloor\left(\left|\alpha_{i,k-1}^{(1)}+\beta_{i,k-1}^{(1)}\right|_{m_i}+\pi_{i,k-1}^{(0)}\right)/m_i\right\rfloor+$$

$$+(I_A^{(1)}+I_B^{(1)}+\Pi_1)\,M_{k-1})\,M_{k-1}=\sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1}\ \gamma_{i,\mathrm{k}-1}^{(0)}+$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1}\ \gamma_{i,k-1}^{(1)}+I_C^{(1)} M_{i,k-1}\right)M_{i,k-1}\,, \tag{16}$$

где $$\gamma_{i,k-1}^{(0)}=\left|\alpha_{i,k-1}^{(0)}+\beta_{i,k-1}^{(0)}\right|_{m_i}=\left|M_{i,k-1}^{-1}\left|\alpha_i^{(0)}+\beta_i^{(0)}\right|_{m_i}\right|_{m_i}=\left|M_{\mathrm{i},k-1}^{-1}\,\gamma_{\mathrm{i}}^{(0)}\right|_{m_i}; \tag{17}$$

$$\gamma_{i,k-1}^{(1)}=\left|\alpha_{i,k-1}^{(1)}+\beta_{i,k-1}^{(1)}+\ \Pi_{i,k-1}^{(0)}\right|_{m_i}=$$

$$=\left|M_{i,k-1}^{-1}\left|\alpha_i^{(1)}+\beta_i^{(1)}+|\,\Pi_0\,|_{m_i}\right|_{m_i}\right|_{m_i}=\left|M_{i,k-1}^{-1}\,\gamma_{\mathrm{i}}^{(1)}\right|_{m_i}; \tag{18}$$

$$I_C^{(1)}=I_A^{(1)}+I_B^{(1)}+I(\Pi_0)+\Pi_1+\Pi^*; \tag{19}$$

$$\Pi^*=\sum_{i=1}^{k-1}\left\lfloor\left(\left|\alpha_{i,k-1}^{(1)}+\beta_{i,k-1}^{(1)}\right|_{m_i}+\pi_{i,k-1}^{(0)}\right)/m_i\right\rfloor; \tag{20}$$

$$C = A + B.$$

Справедливость формул (17) – (20), относящихся к рекурсивному минимально избыточному ИМК $(\gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \ldots, \gamma_{i,k-1}^{(0)}; \gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \ldots, \gamma_{i,k-1}^{(1)}; I_C^{(1)})$ суммы $C = A + B$ $(\gamma_i^{(0)} = |C|_{m_i}, \gamma_i^{(1)} = |I_C^{(0)}|_{m_i}$ $(i = \overline{1, k-1})$; $I_C^{(1)} = I(I_C^{(0)}))$, вытекает из единственности представления $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ в виде (16).

Изложенное позволяет сформулировать нижеследующий алгоритм сложения чисел в рекурсивной МИИМСС первого уровня.

С.1. По рекурсивным минимально избыточным интервально-модулярным кодам (МИИМК) $(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(0)}; \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(1)}; I_A^{(1)})$ и $(\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \ldots, \beta_{k-1}^{(0)}; \beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \ldots, \beta_{k-1}^{(1)}; I_B^{(1)})$ соответственно операндов A и B табличным способом найти $\gamma_i^{(0)} = \left|\alpha_i^{(0)} + \beta_i^{(0)}\right|_{m_i}$, $\omega_i^{(0)}$ $(i = \overline{1, k-1})$; $\left|\alpha_{i,k-1}^{(1)} + \beta_{i,k-1}^{(1)}\right|_{m_i}$, $\omega_i^{(1)}$ $(i = \overline{1, k-1})$; $I_A^{(1)} + I_B^{(1)}$.

С.2. В наборах поразрядных переполнений $<\omega_1^{(j)}, \omega_2^{(j)}, \ldots, \omega_{k-1}^{(j)}>$ определить суммарные количества Π_j единичных значений $(j = 0, 1)$.

С.3. В соответствии с (18) и (20) вычислить $\gamma_i^{(1)}$ $(\mathrm{i} = \overline{1, k-1})$ и Π^*, а также найти $I_A^{(1)} + I_B^{(1)} + I(\Pi_0) + \Pi_1$.

С.4. Закончить реализацию расчетного соотношения (19) для $I_C^{(1)}$, а следовательно, и формирование рекурсивного МИИМК $(\gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \ldots, \gamma_{i,k-1}^{(0)}; \gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \ldots, \gamma_{i,k-1}^{(1)}; I_C^{(1)})$.

3. Сложение, вычитание и умножение чисел в рекурсивной МИИМСС без явного использования ИИ

Необходимо иметь в виду, что при построении рекурсивной минимально избыточной модулярной арифметики (МИМА) может применяться и рекурсивный МИИМК вида

$$(\chi_1^{(0)}, \chi_2^{(0)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(0)}; \chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(1)}, \chi_k^{(1)}), \tag{21}$$

где $\chi_k^{(1)} = |I_X^{(0)}|_{m_k}$, причем цифра кода (21) формируется по правилу

$$\chi_k^{(1)} = \left|\sum_{i=1}^{k} R_{i,\mathrm{k}}\ \chi_i^{(0)}\right|_{m_k} \quad (\chi_k^{(0)} = |X|_{m_k}).$$

В случае, когда в качестве базовой принимается рекурсивная версия МИИМК типа (21), синтез алгоритмов минимально избыточной интервально-модулярной арифметики (МИИМА) осуществляется на основе лишь ИМФ (7) и (8). При этом искомые расчетные соотношения для операций сложения и умножения целых чисел $A = (\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(0)}; \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots,$

$\alpha_{k-1}^{(1)},\ \alpha_k^{(1)})$ $(\alpha_k^{(1)} = |\,I_A^{(0)}\,|_{m_k})$ и $B = (\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \ldots, \beta_{k-1}^{(0)};\ \beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \ldots, \beta_{k-1}^{(1)},\ \beta_k^{(1)})$ $(\beta_k^{(1)} = |\,I_B^{(0)}\,|_{m_k})$ дают две нижеследующие теоремы.

Теорема 1. В рекурсивной МИИМСС первого уровня с попарно простыми основаниями $m_1, m_2, \ldots, m_k$ $(m_k \geq 2m_0 + \rho,\ m_0 \geq \rho,$ где ρ – максимальное значение ранговой характеристики [1]); рабочим диапазоном $\boldsymbol{Z}^{-}_{2MM_{k-1}^{n}} = \{-m_0M_{k-1}^2,\ -m_0M_{k-1}^2 + 1,\ \ldots,\ m_0M_{k-1} - 1\}$; кодовым пространством $\mathbf{C} = \{\forall\ (\chi_1^{(0)},\ \chi_2^{(0)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(0)};\ \chi_1^{(1)},\ \chi_2^{(1)}, \ldots, \chi_{k-1}^{(1)},\ \chi_k^{(1)})\ |\ \chi_i^{(0)} = |\,X\,|_{m_i}\ (\mathrm{i} = \overline{1, k-1});\ \chi_j^{(1)} = |\,I(X)\,|_{m_j}\ (j = \overline{1, k});\ X \in \boldsymbol{Z}^{-}_{2MM_{k-1}^{n}}\}$ и диапазоном исходных данных $\widehat{\mathbf{D}} = \{\forall\ X \in \boldsymbol{Z}\ |\ -\frac{1}{2}m_0M_{k-1}^2 \leq X \leq \frac{1}{2}\,(m_0M_{k-1}^2 - 1)\}$ для цифр рекурсивного МИИМК $(\gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \ldots, \gamma_{k-1}^{(0)};\ \gamma_1^{(1)},\ \gamma_2^{(1)}, \ldots, \gamma_{k-1}^{(1)},\ \gamma_k^{(1)})$ суммы $C = A + B$ любых двух элементов A и B из $\widehat{\mathbf{D}}$ верны формулы

$$\gamma_i^{(0)} = \left|\,\alpha_i^{(0)} + \beta_i^{(0)}\right|_{m_i}\ (i = \overline{1, k-1});$$

$$\gamma_i^{(1)} = \left|\,\alpha_j^{(1)} + \beta_j^{(1)} + \Pi_0\right|_{m_j}\ (i = \overline{1, k}), \tag{22}$$

где

$$\Pi_0 = \sum_{i=1}^{k-1}\omega_i^{(0)};\ \omega_i^{(0)} = \left\lfloor(|\,M_{i,k-1}^{-1}\,\alpha_i^{(0)}\,|_{m_i} + |\,M_{i,k-1}^{-1}\,\beta_i^{(0)}\,|_{m_i})/m_i\right\rfloor.$$

Так как условие теоремы 1 $A, B \in \widehat{\mathbf{D}}$ обеспечивает принадлежность суммы $C = A{+}B$ диапазону $\boldsymbol{Z}^{-}_{2MM_{k-1}^{n}}$ заданной рекурсивной МИИМСС, то справедливость равенств (22) вытекает из (7), (8) и следующего соотношения:

$$C = \sum_{i=1}^{k-1}M_{i,k-1}\ |\,\mathrm{M}_{i,k-1}^{-1}\gamma_i^{(0)}\,|_{m_i} + I_C^{(0)}M_{k-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1}M_{i,k-1}\left(\alpha_{i,k-1}^{(0)} + \beta_{i,k-1}^{(0)}\right) + \left(I_A^{(0)} + I_B^{(0)}\right)M_{k-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1}M_{i,k-1}\left|\,\alpha_{i,k-1}^{(0)} + \beta_{i,k-1}^{(0)}\right|_{m_i} + \left(I_A^{(0)} + I_B^{(0)} + \Pi_0\right)M_{k-1}.$$

Теорема 2. В рекурсивной МИИМСС первого уровня с попарно простыми основаниями $m_1, m_2, \ldots, m_k$ $(m_k \geq 2m_0 + \rho,\ m_0 \geq \rho)$, кодовым пространством $\boldsymbol{C}$, рабочим диапазоном $\boldsymbol{Z}^{-}_{2MM_{k-1}}$ и диапазоном исходных данных $\widehat{\mathbf{D}} = \{\forall\ \mathrm{X} \in \boldsymbol{Z}\ |\ |\,\mathrm{X}\,| \leq \sqrt{m_0M_{k-1}^2 - 1}\}$ для произведения $C = (\gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \ldots, \gamma_{k-1}^{(0)};\ \gamma_1^{(1)},\ \gamma_2^{(1)}, \ldots, \gamma_{k-1}^{(1)},\ \gamma_k^{(1)})$ любых двух элементов A и B множества $\widehat{\mathbf{D}}$ верны формулы

$$\gamma_i^{(0)} = \left| \alpha_i^{(0)} + \beta_i^{(0)} \right|_{m_i} \ (i = \overline{1, k-1});$$

$$\gamma_i^{(1)} = \left| | \alpha_i^{(0)} | \ \Lambda_i(B) + \beta_i^{(1)} |_{m_i} \right|_{m_i} +$$

$$+ \left| \beta_i^{(0)} | \Lambda_i(A) + \alpha_i^{(1)} |_{m_i} \ m_i - \Lambda_i(C) - R_i(\alpha_i^{(0)}, \ \beta_i^{(0)}) \right|_{m_i} \ (i = \overline{1, k-1})$$

$$\gamma_k^{(1)} = \left| \mathrm{M}_{k-1} | \Lambda_k(A) + \alpha_k^{(1)} |_{m_k} | \Lambda_k(B) + \beta_k^{(1)} |_{m_k} - \Lambda_k(C) \right|_{m_k},$$

где используются обозначения $\Lambda_i(X) = \left| \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{k-1} R_{l,i} (\chi_l^{(0)}) \right|_{m_i} \ (i = \overline{1, k-1}); \ \Lambda_k(X) =$

$$= \left| \sum_{l=1}^{k-1} R_{l,k} (\chi_l^{(0)}) \right|_{m_k}; \ R_{l,j} (\chi_l^{(0)}) = \left| m_l^{-1} | M_{i,k-1}^{-1} \chi_l^{(0)} |_{m_l} \right|_{m_j} \ (l = \overline{1, k-1}; j = \overline{1, k});$$

$$X \in \{A, B\}; R_i = \left(\alpha_i^{(0)}, \ \beta_i^{(0)}\right) = \left| - \left\lfloor \frac{M_{i,k-1}}{m_i} \left| M_{i,k-1}^{-1} \alpha_i^{(0)} \right|_{m_i} \left| M_{i,k-1}^{-1} \beta_i^{(0)} \right|_{m_i} \right\rfloor \right|_{m_i}.$$

Как и в случае теоремы 1, теорема 2 доказывается путем преобразования произведения ИМФ (7) и (8) операндов операции к ИМФ стандартного вида (2) для результата С.

Необходимо иметь в виду, что теоремы 1 и 2 ориентированы на построение так называемого модульного варианта рекурсивной МИИМА, который для организации высокоточных вычислений является наиболее подходящим. Как известно, применение модульных версий МА предполагает специальный априорный выбор динамического диапазона и диапазона исходных данных, исключающий выходы результатов счета на соответствующих вычислительных сегментах за пределы используемого рабочего диапазона. Это позволяет оптимизировать процесс вычислений за счет минимизации количества выполняемых немодульных операций, прежде всего контроля переполнения и масштабирования. Вместе с тем, реализация в рамках предложенного класса ИМСС принципа минимальной избыточности кодирования позволяет синтезировать более простые, чем при использовании классических неизбыточных модулярных вычислительных структур (МВС), немодульные процедуры. Это обусловлено тривиальностью операций формирования базовых интегральных характеристик модулярного кода – интервально-индексных характеристик, входящих в состав ИМФ:

$$X = \sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \left| M_{i,k-1}^{-1} \chi_i^{(0)} \right|_{m_i} + M_{i,k-1} \Big(\sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \left| M_{i,k-1}^{-1} \chi_i^{(1)} \right|_{m_i} +$$

$$+ M_{k-1} \Big(\ldots + M_{k-1} \Big(\sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \left| M_{i,k-1}^{-1} \chi_i^{(n)} \right|_{m_i} + M_{k-1} I_X^{(n)} \Big) \ldots \Big) \Big) = \tag{23}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \chi_{i,k-1}^{(0)} + M_{i,k-1} \sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \chi_{i,k-1}^{(1)} + \ldots +$$

$$+ M_{k-1}^n \sum_{i=1}^{k-1} M_{i,k-1} \chi_{i,k-1}^{(n)} + M_{k-1}^{n+1} I_X^{(n)},$$

которые служат основой немодульных алгоритмов рекурсивной МИИМА.

Как видно из (23), для синтеза требуемого класса немодульных процедур, включая процедуры контроля переполнения, определения знака числа, масштабирования, кодовых преобразований и другие, целиком применима методика, разработанная для МИМСС. Это позволяет создавать на базе рекурсивных МИИМК практически любой глубины высокоточные МВС, обладающие всеми ключевыми фундаментальными преимуществами, которые присущи обычным минимально избыточным МВС [1, 2, 4–11].

Заключение

Изложенные в настоящей статье исследования по новым модулярным технологиям высокоточных вычислений нацелены на создание компьютерно-арифметической базы для рекурсивных МИИМСС. Основные результаты выполненных разработок состоят в следующем:

1. Разработанные основы рекурсивной минимально избыточной интервально-модулярной арифметики ориентированы на две модификации базовых кодов. Первая из них предполагает использование ИИ явно, а вторая – лишь в качестве интегральной характеристики.
2. Благодаря простоте формирования ИИ совместное применение модулярных и интервально-модулярных версий синтезированных процедур позволяет реализовать их преимущества в рамках единых алгоритмических конструкций.
3. По своим свойствам арифметика рекурсивных МИИМСС наиболее близка к МИМА.

Поэтому все важнейшие достоинства минимально избыточного модулярного кодирования распространяются и на предложенное семейство числовых систем.

Список литературы

1. Коляда А.А., Пак И.Т. Модулярные структуры конвейерной обработки цифровой информации. – Мн.: Университетское, 1992. – 256 с.

2. Высокоскоростные методы и системы обработки информации / А.Ф. Чернявский, В.В. Данилевич, А.А. Коляда, М.Ю. Селянинов. - Мн.: Белгосуниверситет, 1996. – 376 с.

3. Рекурсивные минимально избыточные интервально-модулярные системы счисления / А.Ф. Чернявский, А.А. Евдокимов, А.А. Коляда, В.В. Ревинский // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т.48. – №1. – С. 10 – 14.

4. Элементы теории и приложений модулярной технологии параллельной обработки информации / А.А. Коляда, В.В. Ревинский, М.Ю. Селянинов и др. // Современные вопросы оптики, радиационного материаловедения, информатики, радиофизики и электроники: Сб. науч. тр. НИИ прикладных физических проблем им. А.Н.Севченко. – Мн.: Белгосуниверситет, 1996. Ч. 2. – С.36 – 41.

5. Теоретические основы мультипликативных процедур для минимально избыточных модулярных систем счисления / А.Ф. Чернявский, А.М. Аксенов, А.А. Коляда, М.Ю. Селянинов // Доклады АН Беларуси. – 1995. – Т.39. – №6. – С. 5 – 10.

6. Применение минимально избыточного модулярного кодирования для быстрого умножения комплексных чисел в системах цифровой обработки сигналов / А.А. Коляда, В.В. Ревинский, М.Ю. Селянинов, А.Ф. Чернявский // Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1996. – № 1. – С. 91 – 97.

7. Василевич Л.Н., Коляда А.А., Ревинский В.В. Высокоскоростная модулярная реализация адаптивных цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой // Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 1. – С. 126 – 131.

8. Минимально избыточные полиномиально-скалярные модулярные системы счисления / А.А. Коляда, В.В. Ревинский, М.Ю. Селянинов, А.Ф. Чернявский // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1998. – № 3. – С. 103 – 107.

9. Методы масштабирования минимально избыточной модулярной арифметики / А.Ф. Чернявский, А.А. Коляда, В.В. Ревинский и др. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1998. – № 4. – С. 132 – 137.

10. Теоретические основы минимально избыточных квадратичных модулярных систем счисления / А.Ф. Чернявский, А.А. Коляда, В.К. Кравцов и др. // Доклады НАН Беларуси. – 1998. – Т.42. – №1. – С. 5 – 12.

11. Модулярные принципы построения процессоров для дискретного преобразования Фурье / Л.Н. Василевич, А.А. Коляда, М.Ю. Селянинов, А.Ф. Чернявский // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-тэхн. навук. – 2001. – № 4. – С.108–117.

Поступила 13.02.04

Институт прикладных физических проблем им. А.Н. Севченко,
Минск, ул. Курчатова, 7
e-mail:kolyada@bsu.by

A.A. Kolyada, V.K. Kravtsov, A.F. Chernyavsky

FUNDAMENTALS OF MINIMALLY REDUNDANT INTERVAL-MODULAR ARITHMETICS WITH RECURSIVE CODE STRUCTURE

For family recursive minimally redundant interval-modular numeric systems base additive and multiplicative computer procedures are developed. It is shown, that the offered algorithmic structures on a level of parallelism occupy intermediate position between positional and minimally redundant modular analogues, keeping all major advantages of the last.