ИНФОРМАТИКА

2016 **апрель-июнь** **№ 2**

УДК 519.872

С.А. Дудин, О.С. Дудина

МНОГОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ КАК МОДЕЛЬ СОТЫ СЕТИ СВЯЗИ

Исследуется многолинейная система обслуживания с двумя типами запросов как модель соты сети связи. Часть приборов резервируется для обслуживания запросов первого типа. Запросы, не получившие обслуживание, могут совершать повторные попытки. На функционирование системы оказывают влияние случайные факторы, приводящие к изменению ее параметров, в том числе общего количества приборов и числа зарезервированных приборов. Описывается процесс функционирования системы, приводится условие существования стационарного режима и находится стационарное распределение вероятностей состояний системы. Рассчитываются формулы для нахождения основных характеристик производительности системы.

Введение

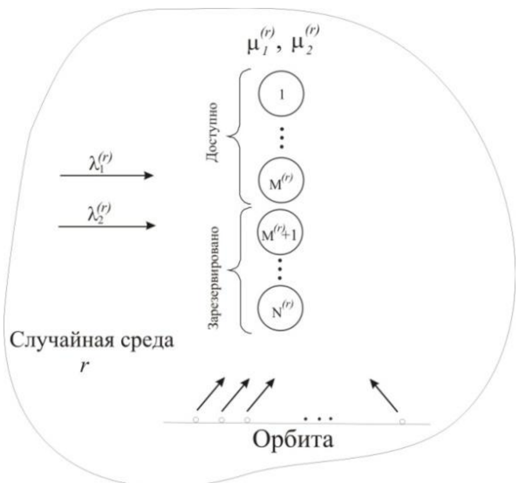
Сотовая связь является одним из видов мобильной радиосвязи, особенность которой заключается в том, что вся зона покрытия делится на ячейки (соты). По сути, сота – это зона радиопокрытия антенны базовой станции. Соседние соты частично перекрываются, а все множество сот образует сеть. Так как пользователи сотовых сетей связи могут перемещаться во время сеансов связи из одной соты в другую, необходимо осуществлять процедуру передачи обслуживания абонента от одной базовой станции к другой без потери соединения. Данная процедура называется хэндовером, т. е. в соте обслуживаются сеансы связи, как сгенерированные из данной соты, так и поступившие из других сот (хэндовер-запросы). В различных системах используют различные методы обработки хэндовер-вызовов. Если не отдавать приоритет хэндовер-запросам перед запросами, сгенерированными в данной соте, то вероятность прерывания текущего сеанса связи из-за перемещения абонента будет равна вероятности отказа в инициализации нового сеанса. Однако очевидно, что для абонента разрыв текущего соединения, например прерывание разговора, – значительно более раздражающий фактор, нежели блокировка исходящего вызова. Поэтому, чтобы уменьшить вероятность потери текущих сеансов связи при проведении процедуры хэндовера, хэндовер-запросам отдается приоритет. Одним из возможных способов предоставления такого приоритета является концепция резервирования каналов Guard Channel Concept. Согласно этой концепции часть каналов связи резервируется исключительно для обслуживания сеансов связи, которые могут быть переданы в соту извне. Иными словами, новые сеансы связи блокируются, если число занятых каналов превысило определенный порог. В работе [1] рассмотрен частный случай данной стратегии, когда для хэндовер-запросов зарезервирован один канал. В общем случае предполагается, что зарезервировано M каналов, и решается задача нахождения такого числа каналов $\bar{M}$, при котором система работала бы оптимальным образом согласно заданному критерию.

Для решения такого типа задач исследователи прибегают к моделированию соты сети связи с помощью систем массового обслуживания с разнотипными запросами и повторными вызовами (см., например, [2–5]). Однако рассмотренные в литературе модели имеют некоторые недостатки, которые уменьшают их адекватность. К недостаткам работы [2] можно отнести предположение о том, что обслуживание разного типа запросов имеет одинаковое распределение. В работах [3, 4] предполагается, что интенсивность повторных попыток является константой и не зависит от числа запросов на орбите. К недостаткам работы [5], как и других работ, можно отнести предположения о том, что хэндовер-запросы, получившие отказ, покидают систему навсегда и не могут совершать повторные попытки (например, перезванивать), а также о том, что запросы не могут покидать орбиту из-за нетерпеливости (например, уехать из соты). В настоящей работе данные недостатки устранены.

Кроме того, известно, что на функционирование беспроводных сетей связи могут оказывать существенное влияние различные уровни шумов в канале передачи, погодные условия, искусственные и естественные помехи, сбои, поломки оборудования и т. д., т. е. на параметры системы влияют случайные факторы. Для учета таких факторов рассматривают системы массового обслуживания, функционирующие в случайной среде (см., например, [6–9]). В литературе стандартно предполагается, что случайная среда оказывает влияние на входной поток и процесс обслуживания запросов, интенсивность повторов и т. д., но не влияет на общее число работающих приборов несмотря на то, что такого плана предположения имеют большую практическую ценность, так как изменения случайной среды могут приводить к частичной или полной поломке оборудования. Это легко объясняется тем, что предположение о зависимости числа приборов от состояния среды существенно усложняет исследование системы. При уменьшении числа приборов из-за изменения состояния среды часть запросов, находящихся на обслуживании, должна прервать обслуживание, что приводит к значительным сложностям при построении генератора цепи Маркова, моделирующей поведение исследуемой системы. Единственная модель, в которой рассматривается система с зависимым от состояния случайной среды числом приборов, была исследована в недавно опубликованной работе [10]. В этой работе рассматривается многолинейная система с повторными вызовами с конечным буфером, причем от состояния случайной среды зависят все параметры системы. В предлагаемой модели все параметры системы также предполагаются зависимыми от состояния случайной среды. Кроме того, запросы являются разнотипными и предполагается резервирование приборов. Разнотипность запросов и резервирование приборов делают модель значительно более сложной для исследования.

1. Математическая модель

Рассматривается многолинейная система обслуживания без буфера, с двумя типами запросов и повторными вызовами (рисунок).



Структура исследуемой системы

Поведение системы зависит от состояния случайной среды. Случайная среда задается стохастическим процессом $r_t, t \geq 0$, который является неприводимой цепью Маркова с непрерывным временем, пространством состояний $\{1,2,\ldots,R\}$ и инфинитезимальным генератором G.

Считаем, что число приборов зависит от состояния случайной среды, т. е. при фиксированном состоянии среды r, $r=\overline{1,R}$, в системе работают $N^{(r)}$ приборов. Без ограничения общности полагаем, что состояния среды перенумерованы в порядке возрастания числа приборов, т. е. $N^{(1)} \leq N^{(2)} \leq \ldots \leq N^{(R)}$.

Входной поток запросов типа $l,\ l = 1, 2,$ при фиксированном состоянии среды r является стационарным пуассоновским с интенсивностью $\lambda_l^{(r)},\ r = \overline{1, R}.$

Если в момент прибытия запроса первого типа (приоритетного запроса, хэндовер-запроса) есть свободный прибор, то этот запрос принимается в систему. Если в момент прибытия запроса первого типа все приборы заняты, при фиксированном состоянии среды r приоритетный запрос покидает систему с вероятностью $q_1^{(r)}$ или идет на орбиту с дополнительной вероятностью $1 - q_1^{(r)},\ r = \overline{1, R}.$ Под орбитой понимается некая виртуальная область, откуда запросы повторяют попытки попасть на обслуживание.

Считаем, что при фиксированном состоянии среды $r,\ r = \overline{1, R},$ запросы второго типа (неприоритетные запросы, вызовы, сгенерированные внутри соты) принимаются на обслуживание, если число занятых каналов меньше, чем $M^{(r)},\ N^{(r)} \ge M^{(r)} > 0.$ Если в момент прихода запроса второго типа число занятых приборов больше либо равно $M^{(r)}$, запрос идет на орбиту с вероятностью $q_2^{(r)}$, а с дополнительной вероятностью – покидает систему.

Так как состояния среды перенумерованы в порядке возрастания работающих приборов, логично предположить, что число зарезервированных приборов также удовлетворяет неравенству $M^{(1)} \le M^{(2)} \le \ldots \le M^{(R)}.$ В случае если изменение состояния среды приводит к уменьшению числа приборов, считаем, что уменьшение сначала происходит за счет свободных приборов; если этого недостаточно, то далее за счет запросов второго типа, а если и этого недостаточно, то за счет запросов первого типа. В случае прерывания обслуживания запросов каждый запрос независимо от типа и других запросов при фиксированном состоянии среды r покидает систему с вероятностью $p^{(r)},\ r = \overline{1, R},$ а с дополнительной вероятностью – идет на орбиту.

Запросы, находящиеся на орбите, неразличимы и при фиксированном состоянии среды $r,\ r = \overline{1, R},$ совершают повторные попытки попасть на обслуживание через экспоненциально распределенное с параметром $\alpha^{(r)}, \alpha^{(r)} > 0,$ время. В случае если попытка попасть на обслуживание осуществляется, когда число занятых приборов больше либо равно $M^{(r)}$, запрос с вероятностью $q_3^{(r)}$ возвращается на орбиту, а с дополнительной вероятностью – покидает систему, т. е. запросы с орбиты могут проявлять ненастойчивость.

Запросы с орбиты также могут проявлять нетерпеливость. Считаем, что при фиксированном состоянии среды r запрос покидает орбиту через экспоненциально распределенное время с параметром $\beta^{(r)}, \beta^{(r)} > 0,$ с момента попадания на орбиту. Если предполагается, что запросы с орбиты являются абсолютно терпеливыми, необходимо положить $\beta^{(r)} = 0,\ r = \overline{1, R}.$

Время обслуживания запроса типа $l,\ l = 1, 2,$ при фиксированном состоянии среды r имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu_l^{(r)},\ r = \overline{1, R}.$

2. Процесс изменения состояний системы и инфинитезимальный генератор цепи

Пусть $i_t,\ i_t \ge 0,$ – число запросов на орбите; $r_t,\ r_t = \overline{1, R},$ – состояние среды; $n_t,\ n_t = \overline{0, N^{(r_t)}},$ – число занятых приборов; $m_t,\ m_t = \overline{0, \min\{n_t, M^{(r_t)}\}},$ – число обслуживающихся запросов второго типа в момент времени $t, t \ge 0.$ Процесс $\xi_t = \{i_t, r_t, n_t, m_t\},\ t \ge 0,$ является неприводимой цепью Маркова с непрерывным временем.

Введем следующие обозначения:

I – единичная матрица, O – нулевая матрица соответствующего размера;

$K_r = (M^{(r)} + 1)(N^{(r)} + 1 - M^{(r)} / 2),\ \ r = \overline{1, R};$

$\mathrm{diag}\{A_1, \ldots, A_l\}$ – блочно-диагональная матрица с диагональными блоками $A_1, \ldots, A_l$;

$C_n = \mathrm{diag}\{0, 1, \ldots, n\},\ \bar{C}_n = \mathrm{diag}\{n, n-1, \ldots, 0\},\ \ n = \overline{0, M^{(R)}};$

$C_n^{(r)} = \mathrm{diag}\{n, n-1, \ldots, n-M^{(r)}+1, n-M^{(r)}\}, \; n=\overline{M^{(r)}, N^{(r)}}, \; r=\overline{1,R};$

$E_n^+, \; \bar{E}_n^+, \; n=\overline{0, M^{(R)}-1},$ – матрицы размером $(n+1)\times(n+2)$, которые имеют все нулевые элементы, кроме элементов $(E_n^+)_{k,k+1}=1, \; k=\overline{0,n}, (\bar{E}_n^+)_{k,k}=1, \; k=\overline{0,n-1};$

$E_n^-, \; \bar{E}_n^-, \; n=\overline{1, M^{(R)}},$ – матрицы размером $(n+1)\times n$, которые имеют все нулевые элементы, кроме элементов $(E_n^-)_{k,k}=1, \; k=\overline{0,n-1}, (\bar{E}_n^-)_{k,k-1}=1, \; k=\overline{1,n};$

$\tilde{I}_r, \; r=\overline{1,R},$ – диагональная матрица размером K_r с диагональными элементами $\{\underbrace{0,\ldots,0}_{(M^{(r)}+1)M^{(r)}/2}, 1,\ldots,1\};$

$\tilde{E}_r^-, \; r=\overline{1,R},$ – квадратная матрица размером M_r+1, которая имеет все нулевые элементы, кроме элементов $(\tilde{E}_r^-)_{k,k-1}=1, \; k=\overline{1,M_r};$

$$p(k,n)=\begin{cases} C_n^k(1-p^{(r)})^k(p^{(r)})^{n-k}, \; k\le n, \\ 0, \; k>n; \end{cases}$$

$$\bar{N}=\max\{\max\{N^{(R)}-N^{(1)}, M^{(R)}-M^{(1)}\},1\}.$$

Перенумеруем состояния цепи ξ_t в лексикографическом порядке компонент (i,r,n,m). Множество состояний, имеющих значение (i,r) двух первых компонент цепи, будем называть макросостоянием (i,r).

Пусть A – генератор цепи Маркова $\xi_t, t\ge 0,$ сформированный из блоков $A_{i,j}$, состоящих из матриц $(A_{i,j})_{r,r'}$ интенсивностей переходов цепи $\xi_t, t\ge 0,$ из макросостояния (i,r) в макросостояние $(j,r'), r', r=\overline{1,R}$. Диагональные элементы матрицы $A_{i,i}$ отрицательны, и их модули определяют интенсивность выхода из соответствующего состояния цепи Маркова.

Теорема 1. *Генератор A имеет блочно-$(\bar{N}+1)$-диагональную структуру:*

$$A=\begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} & \cdots & A_{0,\bar{N}} & O & O & \cdots \\ A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,\bar{N}} & A_{1,\bar{N}+1} & O & \cdots \\ O & A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,\bar{N}} & A_{2,\bar{N}+1} & A_{2,\bar{N}+2} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ненулевые блоки $A_{i,j}, \; i, \; j\ge 0,$ имеют следующий вид:

$$A_{i,i}=(A_{i,i})_{r,r'}, r,r'=\overline{1,R}, i\ge 0,$$

$$A_{i,i+k}=\begin{pmatrix} Z_{1,1}^{(k)} & O & O & \cdots & O & O \\ Z_{2,1}^{(k)} & Z_{2,2}^{(k)} & O & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Z_{R-1,1}^{(k)} & Z_{R-1,2}^{(k)} & Z_{R-1,3}^{(k)} & \ddots & Z_{R-1,R-1}^{(k)} & O \\ Z_{R,1}^{(k)} & Z_{R,2}^{(k)} & Z_{R,3}^{(k)} & \cdots & Z_{R,R-1}^{(k)} & Z_{R,R}^{(k)} \end{pmatrix}, \; i\ge 0, \; k=\overline{1,\bar{N}},$$

$$A_{i,i-1}=\mathrm{diag}\{A_{i,i-1}^{(1)},\ldots,A_{i,i-1}^{(R)}\}, \; i\ge 1,$$

где

$$(A_{i,i})_{r,r'} = \begin{cases} (G)_{r,r'} Q^{(0)}_{r,r'}, & r' < r, \\ (G)_{r,r'} Q^{+}_{r,r'}, & r' > r; \end{cases}$$

$$(A_{i,i})_{r,r} = \begin{pmatrix} L_r^{i,0} & B_0^{(r)} & O & \dots & O & O \\ F_1^{(r)} & L_r^{i,1} & B_1^{(r)} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \ddots & L_r^{i,N^{(r)}-1} & B^{(r)}_{N^{(r)}-1} \\ O & O & O & \dots & F^{(r)}_{N^{(r)}} & L_r^{i,N^{(r)}} \end{pmatrix} + q_2^{(r)}\lambda_2^{(r)}\tilde{I}_r + ((G)_{r,r} - (\lambda_1^{(r)} + \lambda_2^{(r)}))I_{K_r}.$$

Здесь

$$L_r^{i,n} = \begin{cases} -[\mu_2^{(r)}C_n + \mu_1^{(r)}\bar{C}_n + i(\alpha^{(r)} + \beta^{(r)})I_{n+1}], \ n < M^{(r)}, \ i \ge 0, \\ -[\mu_2^{(r)}C_{M^{(r)}} + \mu_1^{(r)}C_n^{(r)} + i(q_3^{(r)}\alpha^{(r)} + \beta^{(r)})I_{M^{(r)}+1}], M^{(r)} \le n < N^{(r)}, \ i \ge 0, \\ -[\mu_2^{(r)}C_{M^{(r)}} + \mu_1^{(r)}C_n^{(r)}] + (i(q_3^{(r)}\alpha^{(r)} + \beta^{(r)}) + q_1^{(r)}\lambda_1^{(r)})I_{M^{(r)}+1}, n = N^{(r)}, i \ge 0; \end{cases}$$

$$B_n^{(r)} = \begin{cases} \lambda_2^{(r)}E_n^{+} + \lambda_1^{(r)}\bar{E}_n^{+}, \ n < M^{(r)}, \\ \lambda_1^{(r)}I_{M^{(r)}+1}, \ M^{(r)} \le n < N^{(r)}; \end{cases}$$

$$F_n^{(r)} = \begin{cases} \mu_2^{(r)}C_n\bar{E}_n^{-} + \mu_1^{(r)}\bar{C}_nE_n^{-}, \ n \le M^{(r)}, \\ \mu_2^{(r)}C_{M^{(r)}}\tilde{E}_r^{-} + \mu_1^{(r)}C_n^{(r)}, \ M^{(r)} < n \le N^{(r)}; \end{cases}$$

$Q^{(k)}_{r,r'}$, $r = \overline{1,R}$, $r' = \overline{1,r-1}$, – блочные матрицы размером $K_r \times K_{r'}$, состоящие из ненулевых блоков $(Q^{(l)}_{r,r'})_{n,n'}$, $n = \overline{0,N^{(r)}}$, $n' = \overline{0,\min\{n,N^{(r')}\}}$, которые определяются следующим образом:

$(Q^{(0)}_{r,r'})_{n,n} = I_{n+1}$, $n \le M^{(r')}$, $(Q^{(k)}_{r,r'})_{n,n} = O_{n+1}$, $n \le M^{(r')}$, $k > 0$;

$(Q^{(k)}_{r,r'})_{n,n}$, $n = \overline{M^{(r')}+1, N^{(r')}}$, – матрицы размером $(\min\{n,M^{(r)}\}+1)\times(M^{(r')}+1)$, которые вычисляются как $(Q^{(0)}_{r,r'})_{n,n} = \begin{pmatrix} I_{M^{(r')}+1} \\ O \end{pmatrix}$, $(Q^{(k)}_{r,r'})_{n,n} = O$, $k > 0$;

$(Q^{(k)}_{r,r'})_{n,n'}, n = \overline{M^{(r')}+1, N^{(r')}}$, $n' = \overline{\min\{M^{(r')},\ n - M^{(r)} + M^{(r')}\},\ n-1}$, – матрицы размером $(\min\{n,M^{(r)}\} + +1)\times(M^{(r')}+1)$ со всеми нулевыми элементами, кроме элемента $((Q^{(k)}_{r,r'})_{n,n'})_{n-n'+M^{(r')},M^{(r')}}$, равного $p(k,n-n')$;

$(Q^{(k)}_{r,r'})_{n,N^{(r')}}$, $n = \overline{N^{(r')}+1, N^{(r)}}$, – матрицы размером $(\min\{M^{(r)},n\}+1)\times(M^{(r')}+1)$ со всеми нулевыми элементами, кроме элементов $((Q^{(k)}_{r,r'})_{n,N^{(r')}})_{m,0}$, $m = \overline{0, \min\{M_r, n - N^{(r')}\}}$ и $((Q^{(k)}_{r,r'})_{n,N^{(r')}})_{m,m-(n-N^{(r')})}$, $m = \overline{n - N^{(r')}+1, \min\{M^{(r)}, M^{(r')}+n-N^{(r')}\}}$, равных $p(k,n-N^{(r')})$;

$(Q^{(k)}_{r,r'})_{n,n'}$, $n = \overline{N^{(r')}+1, N^{(r)}}$, $n' = \overline{\max\{M^{(r')}, N^{(r')} - \max\{0, M^{(r)} - M^{(r')} - (n - N^{(r')})\}\},}$ $\overline{N^{(r')}-1}$, – матрицы размером $(\min\{M^{(r)},n\}+1)\times(M^{(r')}+1)$ со всеми нулевыми элементами, кроме элемента $((Q^{(k)}_{r,r'})_{n,n'})_{n-n'+M^{(r')},M^{(r')}}$, равного $p(k,n-n')$;

$Q^{+}_{r,r'}$, $r=\overline{1,R-1}$, $r'=\overline{r+1,R}$, – матрицы размером $K_r \times K_{r'}$, имеющие вид $(\mathrm{diag}\{\Omega_0^{r,r'},\ldots,\Omega_{N^{(r)}}^{r,r'}\}\,|\,O)$, где $\Omega_n^{r,r'}=\begin{cases} I_{n+1}, \ n\le M^{(r)}, \\ (I_{M^{(r)}+1}\,|\,O_{(M^{(r)}+1)\times(\min\{n-M^{(r)},M^{(r')}-M^{(r)}\})}), \ n=\overline{M^{(r)}+1,N^{(r)}}; \end{cases}$

$$Z^{(1)}_{r,r}=\mathrm{diag}\{\tilde Z_0^{(r)},\ldots,\tilde Z_{N^{(r)}}^{(r)}\},\ r=\overline{1,R};$$

$$Z^{(k)}_{r,r}=O,\ k>1,\ r=\overline{1,R};$$

$$Z^{(k)}_{r,r'}=(G)_{r,r'}Q^{(k)}_{r,r'},\ k\ge 1,\ r=\overline{1,R},\ r'<r;$$

$$\tilde Z_n^{(r)}=\begin{cases} O_{n+1},\ n<M^{(r)}, \\ (1-q_2^{(r)})\lambda_2^{(r)}I_{M^{(r)}+1},\ M^{(r)}\le n<N^{(r)}, \\ [(1-q_1^{(r)})\lambda_1^{(r)}+(1-q_2^{(r)})\lambda_2^{(r)}]I_{M^{(r)}+1},\ n=N^{(r)}; \end{cases}$$

$$A^{(r)}_{i,i-1}=\begin{pmatrix} \tilde L_r^{i,0} & \tilde B_{i,0}^{(r)} & O & \ldots & O & O \\ O & \tilde L_r^{i,1} & \tilde B_r^{i,1} & \ldots & O & O \\ O & O & \tilde L_r^{i,2} & \ldots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \ddots & \tilde L_r^{i,N^{(r)}-1} & \tilde B_r^{i,N^{(r)}-1} \\ O & O & O & \ldots & O & \tilde L_r^{i,N^{(r)}} \end{pmatrix},\ i\ge 1,\ r=\overline{1,R};$$

$$\tilde B_r^{i,n}=\begin{cases} i\alpha^{(r)}E_n^{+}, & n<M^{(r)}, \\ O_{M^{(r)}+1}, & n\ge M^{(r)}, \end{cases}\quad i\ge 1,\ r=\overline{1,R};$$

$$\tilde L_r^{i,n}=\begin{cases} i\beta^{(r)}I_{n+1},\ n<M^{(r)}, \\ i(\beta^{(r)}+q_3^{(r)}\alpha^{(r)})I_{M^{(r)}+1},\ M^{(r)}\le n\le N^{(r)}, \end{cases}\quad i\ge 1,\ r=\overline{1,R}.$$

Доказательство теоремы 1 осуществляется путем анализа всевозможных переходов цепи Маркова ξ_t, $t\ge 0$, за бесконечно малый интервал времени и записи интенсивностей этих переходов в блочно-матричной форме.

3. Условие эргодичности и стационарные вероятности системы

Для нахождения условия эргодичности исследуемой системы понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. Цепь Маркова $\xi_t, t\ge 0$, принадлежит классу асимптотически квазитеплицевых цепей Маркова с непрерывным временем [11].

Доказательство. Для того чтобы показать, что цепь Маркова $\xi_t, t\ge 0$, принадлежит классу асимптотически квазитеплицевых цепей Маркова, необходимо показать существование матриц Y_0, Y_1 и Y_k, $k=\overline{2,\bar N+1}$, которые определяются как

$$Y_0=\lim_{i\to\infty}\bar R_i^{-1}A_{i,i-1}, Y_1=\lim_{i\to\infty}\bar R_i^{-1}A_{i,i}+I, Y_k=\lim_{i\to\infty}\bar R_i^{-1}A_{i,i+k-1}, k=\overline{2,\bar N+1},$$

где $\bar{R}_i$ является диагональной матрицей, диагональные элементы которой определяются как модули соответствующих диагональных элементов матрицы $A_{i,i}$, $i \ge 0$.

Чтобы убедиться в справедливости леммы, выпишем матрицы Y_k, $k = \overline{0, \bar{N}+1}$, в явном виде. Можно убедиться, что в рассматриваемом случае матрицы Y_k, $k = \overline{0, \bar{N}+1}$, имеют следующий вид:

$$Y_0 = \mathrm{diag}\{\tilde{\Omega}_1, \ldots, \tilde{\Omega}_R\},\ Y_1 = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{1,1} & \tilde{Q}_{1,2} & \cdots & \tilde{Q}_{1,R} \\ \tilde{Q}_{2,1} & \tilde{Q}_{2,2} & \cdots & \tilde{Q}_{1,R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{Q}_{R,1} & \tilde{Q}_{R,2} & \cdots & \tilde{Q}_{R,R} \end{pmatrix};$$

$$Y_k = \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{1,1}^{(k-1)} & O & O & \cdots & O & O \\ \tilde{Z}_{2,1}^{(k-1)} & \tilde{Z}_{2,2}^{(k-1)} & O & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{Z}_{R-1,1}^{(k-1)} & \tilde{Z}_{R-1,2}^{(k-1)} & \tilde{Z}_{R-1,3}^{(k-1)} & \ddots & \tilde{Z}_{R-1,R-1}^{(k-1)} & O \\ \tilde{Z}_{R,1}^{(k-1)} & \tilde{Z}_{R,2}^{(k-1)} & \tilde{Z}_{R,3}^{(k-1)} & \cdots & \tilde{Z}_{R,R-1}^{(k-1)} & \tilde{Z}_{R,R}^{(k-1)} \end{pmatrix},\ k > 1,$$

где $$\tilde{Q}_{r,r'} = \begin{cases} R_r (A_{0,0})_{r,r'} + \delta_{r-r',0} \tilde{I}_r,\ \text{если}\ q_3^{(r)} = 0\ \text{и}\ \beta^{(r)} = 0,\ r,\ r' = \overline{1,R}, \\ O,\ \text{если}\ q_3^{(r)} \ne 0\ \text{или}\ \beta^{(r)} \ne 0; \end{cases}$$

$$\tilde{Z}_{r,r'}^{(k)} = \begin{cases} R_r Z_{r,r'}^{(k)},\ \text{если}\ q_3^{(r)} = 0\ \text{и}\ \beta^{(r)} = 0,\ r,\ r' = \overline{1,R}, \\ O,\ \text{если}\ q_3^{(r)} \ne 0\ \text{или}\ \beta^{(r)} \ne 0; \end{cases}$$

$$\tilde{\Omega}_r = \begin{pmatrix} O & E_0^+ & O & \cdots & O & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & E_{M^{(r)}-1}^+ & \ddots & O \\ O & O & O & \cdots & O & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & O & \cdots & O \end{pmatrix},\ \text{если}\ q_3^{(r)} = 0\ \text{и}\ \beta^{(r)} = 0,\ r = \overline{1,R};$$

$$\tilde{\Omega}_r = \begin{pmatrix} \frac{\beta^{(r)}}{\beta^{(r)} + \alpha^{(r)}} & \frac{\alpha^{(r)}}{\beta^{(r)} + \alpha^{(r)}} E_0^+ & \cdots & O & O & O & \cdots & O \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & \frac{\beta^{(r)}}{\beta^{(r)} + \alpha^{(r)}} I_{M^{(r)}} & \frac{\alpha^{(l)}}{\beta^{(r)} + \alpha^{(r)}} E_{M^{(r)}}^+ & O & \cdots & O \\ O & O & \cdots & O & I_{M^{(r)}+1} & O & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & O & O & O & \cdots & O \\ O & O & \cdots & O & O & O & \cdots & I_{M^{(r)}+1} \end{pmatrix},$$

$$\text{если}\ q_3^{(r)} \ne 0\ \text{или}\ \beta^{(r)} \ne 0;$$

$$R_r = \operatorname{diag}\{R_r^{(n)},\ n = \overline{0, N^{(r)}}\},$$

$$R_r^{(n)} = \begin{cases} O_{n+1},\ n < M^{(r)}, \\ [\mu_2^{(r)} C_{M^{(r)}} + \mu_1^{(r)} C_n^{(r)} + ((\lambda_1^{(r)} + (1-q_2^{(r)})\lambda_2^{(r)} - (G)_{r,r}) I_{(M^{(r)}+1)}]^{-1},\ M^{(r)} \le n < N^{(r)}, \\ [\mu_2^{(r)} C_{M^{(r)}} + \mu_1^{(r)} C_n^{(r)} + ((1-q_2^{(r)})\lambda_2^{(r)} + (1-q_1^{(r)})\lambda_1^{(r)} - (G)_{r,r}) I_{(M^{(r)}+1)}]^{-1},\ n = N^{(r)}. \end{cases}$$

Таким образом, лемма доказана. ■

Показав, что цепь Маркова $\xi_t, t \ge 0,$ принадлежит классу асимптотически квазитеплицевых цепей Маркова с непрерывным временем, для нахождения условия существования стационарного режима и вычисления стационарных вероятностей системы можно использовать результаты, полученные ранее для такого типа цепей. Как следует из [11], достаточным условием существования стационарного распределения асимптотически квазитеплицевой цепи Маркова $\xi_t, t \ge 0,$ будет выполнение неравенства

$$\mathbf{y} Y_0 \mathbf{e} > \mathbf{y} \sum_{k=2}^{\tilde{N}+1} (k-1) Y_k \mathbf{e}, \tag{1}$$

где вектор-строка $\mathbf{y}$ является единственным решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{y} \sum_{k=0}^{\tilde{N}+1} Y_k = \mathbf{y},\ \mathbf{ye} = 1, \tag{2}$$

а $\mathbf{e}$ – вектор-столбец, состоящий из единиц.

Для определения условия существования стационарного режима необходимо решить систему (2), а затем проверить неравенство (1). В общем случае не удается решить систему (2) и переписать неравенство (1) в интуитивно трактуемом виде. Таким образом, для определения условия существования стационарного режима необходимо решить систему (2) и проверить неравенство (1) с помощью компьютера. Тем не менее при наличии определенных условий, приведенных в теореме 2, этого можно избежать.

Теорема 2. *Если запросы второго типа являются нетерпеливыми или ненастойчивыми хотя бы при одном состоянии случайной среды, т. е. существует* $r,\ r \in \{1,\dots,R\},$ *такое, что* $q_3^{(r)} \ne 0$ *или* $\beta^{(r)} \ne 0,$ *то цепь Маркова* ξ_t *является эргодической при любых остальных параметрах системы.*

Доказательство данной теоремы может быть проведено аналогично доказательству теоремы 3 работы [10] и здесь опущено.

Если условие эргодичности системы выполнено, то существуют следующие пределы (стационарные вероятности):

$$p(i,r,n,m) = \lim_{t\to\infty} P\{i_t = i,\ \ r_t = r,\ n_t = n, m_t = m\}, i \ge 0,\ \ r = \overline{1,R},\ \ n = \overline{0, N^{(r)}},\ \ m = \overline{0, \min\{n, M^{(r)}\}}.$$

Сформируем вектор-строки $\mathbf{p}_i$ следующим образом:

$$\mathbf{p}(i,r,n) = (p(i,r,n,0), p(i,r,n,1),\dots, p(i,r,n,\min\{n, M^{(r)}\})),\ \ n = \overline{0, N^{(r)}},$$

$$\mathbf{p}(i,r) = (\mathbf{p}(i,r,0), \mathbf{p}(i,r,1),\dots,\mathbf{p}(i,r,N^{(r)})),\ \ r = \overline{1,R},$$

$$\mathbf{p}_i = (\mathbf{p}(i,1), \mathbf{p}(i,2),\dots,\mathbf{p}(i,R)),\ i \ge 0.$$

Общеизвестно, что векторы $\mathbf{p}_i,\ i \ge 0,$ удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots)A = \mathbf{0},\ \ (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots)\mathbf{e} = 1, \tag{3}$$

где A – инфинитезимальный генератор цепи Маркова $\xi_t, t \geq 0$; $\mathbf{0}$ – вектор-строка, состоящая из нулей.

Система (3) бесконечная и не может быть решена на компьютере стандартными методами. Для ее решения могут быть применены специальные алгоритмы, например алгоритм, приведенный в работе [11].

4. Характеристики производительности системы

После нахождения стационарных вероятностей $\mathbf{p}_i, i \geq 0,$ можно найти основные характеристики производительности исследуемой системы. Распределение числа запросов второго типа на орбите задается как $\lim_{t\to\infty} P\{i_t = i\} = \mathbf{p}_i\mathbf{e}, i \geq 0.$ Среднее число запросов второго типа на орбите определяется по формуле $L_{orbit} = \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{p}_i\mathbf{e}.$ Среднее число запросов в системе находится как $L = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{R}\sum_{n=0}^{N^{(r)}}(i+n)\mathbf{p}(i,\ r,\ n)\mathbf{e}.$ Среднее число занятых приборов вычисляется как $N_{server} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{R}\sum_{n=1}^{N^{(r)}} n\mathbf{p}(i,\ r,\ n)\mathbf{e}.$ Среднее число занятых приборов, обслуживающих запросы первого типа, определяется как $N_{server}^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{R}\sum_{n=1}^{N^{(r)}}\sum_{m=0}^{\min\{n,M^{(r)}\}}(n-m)p(i,\ r,\ n,\ m).$ Среднее число занятых приборов, обслуживающих запросы второго типа, находится как $N_{server}^{(2)} = N_{server} - N_{server}^{(1)}.$ Интенсивность выходного потока запросов первого типа вычисляется как $\lambda_{out}^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{R}\sum_{n=1}^{N^{(r)}}\sum_{m=0}^{\min\{n,M^{(r)}\}}(n-m)\mu_1^{(r)} p(i,\ r,\ n,\ m).$ Интенсивность выходного потока запросов второго типа находится по формуле $\lambda_{out}^{(2)} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{R}\sum_{n=1}^{N^{(r)}}\sum_{m=1}^{\min\{n,M^{(r)}\}} m\mu_2^{(r)} p(i,\ r,\ n,\ m).$ Интенсивность выходного потока запросов вычисляется как $\lambda_{out} = \lambda_{out}^{(1)} + \lambda_{out}^{(2)}.$

Обозначим через $\lambda_l,\ l = 1,2,$ среднюю интенсивность входного потока запросов l-го типа. Можно показать, что данная интенсивность определяется по формуле $\lambda_l = \mathbf{q}\mathrm{diag}\{\lambda_l^{(r)},\ r = \overline{1,R}\}\mathbf{e},$ где вектор $\mathbf{q}$ является единственным решением следующей системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{q}G = \mathbf{0},\ \mathbf{qe} = 1.$

Вероятность того, что произвольный запрос первого типа поступит в систему в момент, когда все приборы будут заняты запросами первого типа, и покинет систему, определяется как $P_1^{(loss-ent)} = \lambda_1^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{R}\lambda_1^{(r)}q_1^{(r)}\mathbf{p}(i,r,N^{(r)})\mathbf{e}.$ Вероятность того, что произвольный запрос первого типа поступит в систему в момент, когда все приборы будут заняты запросами первого типа, и пойдет на орбиту, определяется как $P_1^{(orb-ent)} = \lambda_1^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{R}(1-q_1^{(r)})\lambda_1^{(r)}\mathbf{p}(i,r,N^{(r)})\mathbf{e}.$ Вероятность потери запроса первого типа вычисляется по формуле $P_1^{(loss)} = 1 - \frac{\lambda_{out}^{(1)}}{\lambda_1}.$

Вероятность потери запроса первого типа, вызванной уменьшением числа приборов в результате изменения состояния случайной среды, находится как

$$P_1^{(loss-RE)} = \lambda_1^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r=2}^{R}\sum_{r'=1}^{r-1}(G)_{r,r'}\sum_{n=N^{(r')}+1}^{N^{(r)}}\sum_{m=0}^{\min\{n-1,M^{(r)}\}} p^{(r)}\max\{0,n-N^{(r')}-m\}p(i,r,n,m).$$

Вероятность того, что запрос первого типа пойдет на орбиту из-за прекращения его обслуживания ввиду уменьшения числа приборов в результате изменения состояния случайной среды, находится как

$$P_1^{(orb-RE)} = \lambda_1^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r=2}^{R}\sum_{r'=1}^{r-1}(G)_{r,r'}\sum_{n=N^{(r')}+1}^{N^{(r)}}\sum_{m=0}^{\min\{n-1,M^{(r)}\}}(1-p^{(r)})\max\{0,n-N^{(r')}-m\}p(i,r,n,m).$$

Вероятность потери запроса второго типа

$$P_2^{(loss)} = 1-\frac{\lambda_{out}^{(2)}}{\lambda_2+\lambda_1(P_1^{(orb-RE)}+P_1^{(orb-ent)})}.$$

Вероятность потери запроса второго типа, вызванной уменьшением числа приборов в результате изменения состояния случайной среды, вычисляется по формуле

$$P_2^{(loss-RE)} = (\lambda_2+\lambda_1(P_1^{(orb-RE)}+P_1^{(orb-ent)}))^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r=2}^{R}\sum_{r'=1}^{r-1}(G)_{r,r'}\sum_{n=M^{(r')}+1}^{N^{(r)}}\sum_{m=1}^{\min\{n,M^{(r)}\}}p^{(r)}\times$$

$$\times(\min\{m,\max\{n-N^{(r')},0\}\}+\max\{0,m-\max\{n-N^{(r')},0\}-M^{(r')}\})p(i,r,n,m).$$

Вероятность потери произвольного запроса $P^{(loss)} = 1-\frac{\lambda_{out}}{\lambda_1+\lambda_2}$.

Вероятность потери запроса второго типа на входе в результате его поступления в момент, когда число занятных приборов превышало $M^{(r)}-1$, определяется как

$$P_2^{(loss-ent)} = (\lambda_2+\lambda_1(P_1^{(orb-RE)}+P_1^{(orb-ent)}))^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{R}\sum_{n=M^{(r)}}^{N^{(r)}}q_2^{(r)}\lambda_2^{(r)}\mathbf{p}(i,r,n)\mathbf{e}.$$

Вероятность потери произвольного запроса второго типа с орбиты

$$P^{(loss-from-orbit)} = P_2^{(loss)}-P_2^{(loss-ent)}-P_2^{(loss-RE)}.$$

Заключение

В работе исследована система массового обслуживания с повторными вызовами и двумя типами запросов. Все параметры системы, включая число приборов, зависят от состояния случайной среды. Построен процесс функционирования системы, приведено условие существования стационарного режима системы, найдены основные характеристики производительности. Полученные результаты могут использоваться для оптимизации функционирования соты мобильной сети за счет правильного выбора стратегии управления доступом новых и хэндовер-запросов.

Данная работа выполнена при частичной поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Список литературы

1. Tran-Gia, P. Modeling of customer retrial phenomenon in cellular mobile networks / P. Tran-Gia, M. Mandjes // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 1997. – Vol. 15. – P. 1406–1414.

2. Choi, B.D. A simple numerical approximation of joint probabilities of calls in service and calls in the retrial group in a picocell / B.D. Choi, A. Melikov, A. Velibekov // Applied Computational Mathematics. – 2008. – Vol. 7. – P. 21–30.

3. Do, T.V. Solution for a retrial queueing problem in cellular networks with the Fractional Guard Channel policy / T.V. Do // Mathematical and Computer Modelling. – 2011. – Vol. 53. – P. 2059–2066.

4. Zhou, Z. Optimization of the $(MAP_1, MAP_2)/(PH_1, PH_2)/N$ retrial queue model of wireless cellular networks with channel allocation / Z. Zhou, Y. Zhu // Computers and Electrical Engineering. – 2013. – Vol. 39. – P. 1637–1649.

5. Kim, C.S. Optimization of Guard Channel Policy in Cellular Mobile Networks with Account of Retrials / C.S. Kim, V.I. Klimenok, A.N. Dudin // Computers and Operation Research. – 2014. – Vol. 43. – P. 181–190.

6. Erlang loss queueing system with batch arrivals operating in a random environment / C.S. Kim [et al.] // Computers and Operations Research. – 2009. – Vol. 36. – P. 674–967.

7. The BMAP/PH/N retrial queueing system operating in Markovian random environment / C.S. Kim [et al.] // Computers and Operations Research. – 2010. – Vol. 37. – P. 1228–1237.

8. Wu, J. Analysis of the finite source $MAP/PH/N$ retrial G-queue operating in a random environment / J. Wu, Z. Liu, G. Yang // Applied Mathematical Modelling. – 2001. – Vol. 35. – P. 1184–1193.

9. Cordeiro, J.D. The unreliable $M/M/1$ retrial queue in a random environment / J.D. Cordeiro, J.P. Kharoufeh // Stochastic Models. – 2012. – Vol. 28. – P. 29–48.

10. Dudin, A.N. Analysis of multiserver retrial queueing system with varying capacity and parameters / A.N. Dudin, O.S. Dudina // Mathematical Problems in Engineering. – 2015. – Vol. 2015. – P. 1–12.

11. Klimenok, V.I. Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory / V.I. Klimenok, A.N. Dudin // Queueing Systems. – 2006. – Vol. 54. – P. 245–259.

Поступила 13.01.2016

Белорусский государственный университет,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: dudin85@mail.ru,
dudina_olga@email.com

S.A. Dudin, O.S. Dudina

MULTI-SERVER RERTIAL QUEUEING SYSTEM AS A MODEL OF A MOBILE NETWORK CELL

A multi-server queueing system with two types of customers as a model of a cell of mobile network is considered. Part of the servers is reserved for service of first type customers only. The customers who do not receive service can make repeated attempts. All the system parameters including the total number of servers and the number of reserved servers are influenced by a random environment. The process of the system states is constructed, the ergodicity condition is derived, the stationary distribution of the system states is computed. The formulas for the main performance measures of the system are presented.