ИНФОРМАТИКА

2004 **январь-март** **№1**

УДК 519.8

Ю.Н. Сотсков

СЛОЖНОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ФИКСИРОВАННОГО ЧИСЛА ТРЕБОВАНИЙ В МНОГОСТАДИЙНЫХ СИСТЕМАХ

Приведен аналитический обзор известных результатов относительно асимптотической сложности задач теории расписаний при условии, что число требований не превосходит числа приборов. Рассматриваются многостадийные системы обслуживания, в которых маршруты требований не фиксированы либо заданы одинаковыми или различными на этапе построения оптимального расписания, а также системы смешанного типа, в которых маршруты части требований заданы, а маршруты остальных требований не фиксированы.

Введение

В текущем году исполняется 50 лет со дня опубликования первого полиномиального алгоритма С.М. Джонсона [1] для многостадийной системы поточного типа с двумя обслуживающими приборами. Как в этой первой статье, так и в абсолютном большинстве последующих публикаций по теории расписаний исследовались в основном системы обслуживания с фиксированным числом *приборов.* В данном обзоре представлены известные результаты для многостадийных систем обслуживания с фиксированным числом *требований.* Используемая терминология по теории расписаний соответствует монографии [2], а по теории сложности задач и алгоритмов - монографии [3].

1. Постановка задачи и обозначения

Рассмотрим следующую задачу теории расписаний. Множество требований $J = \{J_1, J_2, ..., J_n\}$ должно быть обслужено в системе, состоящей из множества *последовательных* (различных по назначению) приборов $M = \{M_1, M_2, ..., M_m\}$. В любой момент времени каждый прибор $M_k \in M$ может обслуживать не более одного требования из множества *J*, а каждое требование $J_i \in J$ может обслуживаться не более чем одним прибором из множества *M*. В многостадийной системе обслуживание требования $J_i \in J$ состоит из $r_i > 1$ стадий и соответственно включает r_i *операций* $O_{i_1}, O_{i_2}, ..., O_{i_{r_i}}$, которые должны *последовательно* выполняться приборами $M_{i_1}, M_{i_2}, ..., M_{i_{r_i}}$ в соответствии с технологическим *маршрутом* обслуживания требования. Для выполнения операции O_{i_j} прибором M_{i_j} требуется $p_{i_j} \geq 0$ единиц времени, причем число p_{i_j} известно заранее. Во многих алгоритмах теории расписаний и при анализе их сложности используется предположение о том, что p_{i_j} - натуральное число. Асимптотическая сложность других алгоритмов не возрастает при предположении, что p_{i_j} - действительное число. Важным для сложности задачи теории расписаний является также предположение о допустимости прерываний операций. Если в обслуживающей системе все операции должны выполняться без прерываний, то для каждого допустимого расписания справедливо равенство $c_{i_j} = s_{i_j} + p_{i_j}$, в котором s_{i_j} и c_{i_j} обозначают соответственно моменты начала и завершения выполнения операции O_{i_j}. Задача теории расписаний состоит в построении *оптимального* расписания обслуживания требований множества J приборами множества M, т.е. расписания, при котором заданная целевая функция $\Phi(C_1, C_2, ..., C_n)$ принимает наименьшее значение. Здесь и далее C_i обозначает момент завершения обслуживания требования $J_i \in J$, т.е. имеет место равенство $C_i = c_{i_{r_i}}$.

Большинство известных результатов о многостадийных системах обслуживания получено для критерия быстродействия, т.е. для минимизации общего времени обслуживания требований $C_{\max} = \max\{C_i : J_i \in J\}$, а также для критерия минимизации суммарного (среднего) времени обслуживания требований $\sum C_i = \sum_{i=1}^{n} C_i$. Ряд эффективных алгоритмов теории расписаний разработан для *регулярного* критерия общего вида, т.е. для минимизации произвольно заданной неубывающей целевой функции $\Phi = \Phi(C_1, C_2, ..., C_n)$.

В зависимости от маршрутов обслуживания требований многостадийные системы подразделяются на следующие основные классы. В системах flow shop (системах поточного типа) маршруты всех требований заданы *одинаковыми*: $(M_1, M_2, ..., M_m)$. В системах open shop маршруты требований заранее *не фиксированы* (при этом выбор маршрута является частью решения задачи), известно только, что каждое требование должно быть обслужено каждым прибором в точности один раз.

В системах job shop маршруты всех требований фиксированы и могут быть заданы *различными* для разных требований. Важно отметить, что в системе job shop в маршруте $(M_{i_1}, M_{i_2}, ..., M_{i_{r_i}})$ обслуживания конкретного требования $J_i \in J$ допускаются повторения приборов и (или) отсутствие некоторых приборов. Иными словами, в отличие от систем flow shop и open shop, в которых $r_i = m$ для каждого требования $J_i \in J$, в системе job shop возможно выполнение одного из трех соотношений: $r_i < m$, $r_i = m$ или $r_i > m$.

Для обозначения задач в теории расписаний принято использовать трехпозиционную форму $\alpha / \beta / \gamma$, в которой позиция α характеризует число приборов и тип обслуживающей системы. При этом символ F используется для обозначения системы flow shop, O - для системы open shop и J - для системы job shop. Позиция β определяет число требований и их основные характеристики. Позиция γ указывает целевую функцию. Таким образом, алгоритм С.М. Джонсона [1] является полиномиальным для системы поточного типа с двумя приборами и минимизацией целевой функции $C_{\max}$, т.е. для задачи $F2 // C_{\max}$.

Как уже отмечалось, большинство известных результатов теории расписаний получено для случая фиксированного числа приборов m. При этом число требований $n \geq m$ может быть сколь угодно большим. В частности, асимптотическая сложность алгоритма С.М. Джонсона [1] определяется величиной $O(n \log n)$ и, следовательно, является полиномиальной от числа требований n. В данном обзоре приведены известные результаты об асимптотической сложности задач построения оптимальных расписаний обслуживания множества требований J фиксированной мощности n в многостадийных системах, т.е. когда выполняется соотношение $m \geq n$ и число приборов m может быть сколь угодно большим. В связи с этим асимптотическая сложность рассматриваемых в этой статье алгоритмов зависит от числа m приборов в системах flow shop и open shop и от числа m приборов и числа стадий обслуживания требований в системах job shop. Практическое значение предположения о неограниченном числе приборов в системе обслуживания определяется, в частности, современными задачами проектирования специализированных устройств в микроэлектронике, когда для обслуживания фиксированного множества требований можно использовать относительно дешевые стандартные элементы (приборы) в достаточно большом количестве.

2. Системы с различными маршрутами обслуживания требований

Известные результаты относительно сложности построения оптимальных расписаний обслуживания требований в системах job shop при $n \le m$ представлены в табл. 1. Помимо обозначений, введенных в предыдущем разделе, в табл. 1 используются следующие обозначения: $r = \max\{r_i : J_i \in J\}$, $L = \max\{L_i : J_i \in J, L_i = \sum_{j=1}^{r_i} p_{i_j}\}$. Символ $[p_{i_j}]$ обозначает, что длительности всех операций должны быть заданы в виде натуральных чисел. Допустимость прерываний операций указывается символом *Pr*. Символ MPM в четвертом столбце табл. 1 указывает на то, что каждой операции сопоставлено множество приборов, на одном из которых она должна быть выполнена. В строках 12 и 13 табл. 1 в качестве функции $f_i(C_i)$ (см. столбец 5) может рассматриваться любая неубывающая функция.

Таблица 1

Сложность построения оптимальных расписаний для системы job shop

Тип системы	Число требований	Число приборов	Ограничения	Критерий	Сложность	Литература
J	2	m	$r \le m$	C_{max}	$O(m^2)$	8, [9]
J	2	m	Pr	C_{max}	-	17
J	2	m		Ф	$O(r^2 log_2 r)$	[6], 12, 18
J	2	m	Pr	Ф	$O(r^3)$	[6], 12
J	2	m	$r \le m$	Ф	$O(m log_2 m)$	[6], 12
J	2	m	Pr, $r \le m$	Ф	$O(m^2)$	[6], 12
J	2	m		C_{max}	$O(r^2 log_2 r)$	[6], 7
J	2	m	MPM	C_{max}	$O(r^3)$	19
J	n	m	$[p_{i_j}]$	C_{max}	$O(2^n L^n)$	15, [16]
J	3	2		C_{max}	$O(r^4)$	20
J	k	2		C_{max}	$O(r^{2k})$	21
J	k	2		$\max_{i=1}^{n} f_i(C_i)$	$O(r^{k^2+2k})$	22
J	k	2		$\sum f_i(C_i)$	$O(r^{k^2+2k})$	22
J	k	2		$\sum w_i C_i$	$O(r^k)$	22
J	3	5	Pr	$\sum C_i$	Binary NP-hard	[10], 11, 12
J	3	5		C_{max}	Binary NP-hard	[10], 11, 12
J	3	5	Pr	C_{max}	Binary NP-hard	[10], 11, 12
J	3	5		$\sum C_i$	Binary NP-hard	[10], 11, 12
J	3	3	Pr	$\sum C_i$	Binary NP-hard	[13], 14
J	3	3		C_{max}	Binary NP-hard	[13], 14
J	3	3	Pr	C_{max}	Binary NP-hard	[13], 14
J	3	3		$\sum C_i$	Binary NP-hard	[13], 14
J	3	2	Pr	C_{max}	Binary NP-hard	23
J	3	2	Pr	$\sum C_i$	Binary NP-hard	23

В последних столбцах всех трех таблиц перечислены публикации, в которых приведены соответствующие алгоритмы или соответственно доказана NP-трудность задачи. Поскольку ряд одних и тех же результатов был получен независимо разными авторами, то для таких случаев в квадратных скобках указана первая из опубликованных статей, содержащая представленный в соответствующей строке результат.

Полиномиальные алгоритмы построения оптимальных расписаний обслуживания двух требований (см. строки 1, 3–8 табл. 1) основаны на геометрическом представлении расписаний для задач $J/n=2/\Phi$ и $J/n=2,\mathrm{Pr}/\Phi$, которое было предложено в работах [4, 5] для случая $\Phi=C_{\max}$. При этом длительности выполнения операций требования J_1 (требования J_2) откладываются по оси абсцисс (по оси ординат). Точка (x,y) в многограннике $(0,0)$, $(L_1,0)$, $(0,L_2)$, (L_1,L_2) однозначно определяет состояние обслуживания обоих требований в момент времени, определенный длиной траектории от точки $(0,0)$ до точки (x,y) при использовании чебышевской метрики.

В работе [6] было доказано, что задача $J/n=2/\Phi$ и задача $J/n=2,\mathrm{Pr}/\Phi$ полиномиально сводятся к построению ориентированного графа в системе координат на плоскости и поиску кратчайшего пути из вершины $(0,0)$ в вершину (L_1,L_2). В работах [7–9] аналогичное сведение было использовано для разработки полиномиального алгоритма решения задачи $J/n=2/\Phi$ в частном случае, когда $\Phi=C_{max}$.

В строках 15 – 24 табл. 1 указаны NP-трудные в обычном смысле (binary NP-hard) задачи job shop при фиксированном числе требований n и фиксированном числе приборов m. При этом сколь угодно большой может быть длина маршрута r_i по обслуживанию требования $J_i \in J$ (поскольку допускается неограниченное число повторений одного и того же прибора в маршруте обслуживания требования).

Доказательство NP-трудности этих задач было получено в работах [10–14] на основе полиномиального сведения к указанным задачам теории расписаний следующего NP-трудного специального случая *задачи о разбиении* [3].

Пусть задано множество $A=\{1, 2, \ldots, 2a\}$ натуральных чисел, каждому элементу j которого сопоставлено число e_j, причем $\sum_{j\in A} e_j = 2E$, где e_j и E – натуральные числа. Если $A_k \subset A$, то обозначим $E_k = \sum_{j\in A_k} e_j$. В *задаче о разбиении* требуется определить, существует ли разбиение множества A на два подмножества A_1 и A_2 таких, что $E_1 = E_2$ и множеству A_1 принадлежит точно один элемент из каждой пары элементов $2j-1$ и $2j$.

Следует отметить, что задачи job shop с фиксированным числом требований не являются NP-трудными в сильном смысле (unary NP-hard), поскольку существует псевдополиномиальный алгоритм их решения, описанный, например, в работах [15, 16] (см. строку 9 табл. 1). Алгоритмы, указанные в строках 11–14 табл. 1, являются полиномиальными (поскольку k представляет собой константу). Однако эти алгоритмы будут действительно эффективными только при достаточно малых значениях k и r.

Исследование систем job shop с фиксированным числом требований привело к неожиданному результату относительно влияния прерываний операций на асимптотическую сложность задачи. Впервые были обнаружены системы обслуживания, которые допускают полиномиальные алгоритмы, если прерывания операций запрещены, но которые становятся NP-трудными в случае допустимости прерываний операций (см. строки 11 – 14 и строки 23, 24 табл. 1). До опубликования работ [22, 23] для всех исследованных систем обслуживания имело место утверждение о том, что если для решения задачи без прерываний операций существует полиномиальный алгоритм, то и соответствующий аналог задачи с прерываниями операций также является полиномиально разрешимым.

3. Системы flow shop, open shop и mixed shop

Поскольку система flow shop является частным случаем системы job shop, то полиномиальные алгоритмы, указанные в табл. 1 для системы job shop, применимы и для оптимального обслуживания требований множества J в системах flow shop. В связи с этим для системы flow shop в табл. 2 приведены только те алгоритмы, которые имеют меньшую асимптотическую сложность по сравнению с алгоритмами для аналогичных систем job shop.

Таблица 2

Сложность построения оптимальных расписаний для систем flow shop и open shop

Тип системы	Число требований	Число приборов	Ограничения	Критерий	Сложность	Литература
F	2	m		Ф	$O(m \log_2 m)$	[6], 12
F	2	m	Pr	Ф	$O(m^2)$	[6], 12
F	3	m		C_{max}	Binary NP-hard	[10], 11, 12
F	3	m	Pr	C_{max}	Binary NP-hard	[13], 14
F	3	m		$\sum C_i$	Binary NP-hard	[10], 11, 12
F	3	m	Pr	$\sum C_i$	Binary NP-hard	[13], 14
F	3	m	Pr, $p_{i_j}>0$	C_{max}	Binary NP-hard	[13], 14
F	3	m	Pr, $p_{i_j}>0$	$\sum C_i$	Binary NP-hard	[13], 14
O	2	m		C_{max}	$O(m)$	24
O	n	m	Pr	C_{max}	$O(n^2m^2)$	24
O	2	m		Ф	$O(m)$	25
O	2	m	Pr	Ф	$O(m)$	25
O	3	m		C_{max}	Unary NP-hard	[24], 26
O	3	m		$\sum C_i$	Unary NP-hard	13

В работе [24] доказана NP-трудность задачи $O3 // C_{\max}$ и разработан алгоритм сложности $O(m)$ для решения задачи $O2 // C_{\max}$ и алгоритм сложности $O(n^2 m^2)$ для решения задачи $Om / \mathrm{Pr} / C_{\max}$. На основании этих результатов, учитывая симметрию требований и приборов в задачах $O // C_{\max}$ и $O / \mathrm{Pr} / C_{\max}$, можно заключить, что задача $O / n = 3 / C_{\max}$ является NP-трудной, а задачи $O / n = 2 / C_{\max}$ и $O / n = k, \mathrm{Pr} / C_{\max}$ полиномиально разрешимы.

Следует заметить, что для критерия $\sum C_i$ (и других классических критериев теории расписаний) задачи обслуживания требований с нефиксированными маршрутами уже не обладают симметрией требований и приборов. Тем не менее, в работе [25] были предложены линейные от числа приборов алгоритмы решения задач $O / n = 2 / \Phi$ и $O / n = 2, \mathrm{Pr} / \Phi$ при произвольном регулярном критерии оптимальности расписания.

В работе [27] впервые была исследована система обслуживания смешанного типа (mixed shop), в которой $n_J \leq n$ требований множества J имеют фиксированные маршруты обслуживания (как в системах job shop или flow shop), а маршруты $n_O \leq n$ требований множества J заранее не фиксированы (как в системе open shop). Предполагается справедливым равенство $n = n_J + n_O$. В табл. 3 приведены известные результаты относительно сложности обслуживания фиксированного числа требований в системах смешанного типа. Знак ∞ во второй и третьей строках табл. 3 указывает на то, что соответствующий параметр может быть произвольным.

В работе [30] приведен обзор известных результатов для многостадийных систем mixed shop, когда числа $n_J \leq n$ и $n_O \leq n$ требований множества J не фиксированы.

Таблица 3

Сложность построения оптимальных расписаний для систем смешанного типа

Число требований n_J	Число требований n_O	Число приборов	Ограничения	Критерий	Сложность	Литература
1	1	∞		Ф	$O(r)$	29
1	∞	2		C_{max}	Unary NP-hard	28
1	1	∞		$\sum C_i$	Binary NP-hard	29
k	l	2		C_{max}	$O(r^{2k}2^l)$	28
1	1	∞		C_{max}	Binary NP-hard	29
2	l	m		C_{max}	$O((r^2 log\, r)^{lm+1})$	28
1	1	∞		C_{max}	Binary NP-hard	29
2	∞	2	Pr	C_{max}	$O(r^3+n_O)$	28
k	l	m	Pr	C_{max}	$O(rT^{k+l-1})$	28
2	1	3	Pr	C_{max}	Binary NP-hard	28
1	∞	∞	Pr	C_{max}	$O(nm(min\{nm,m^2\}+$ $+mlogn)+r)$	28

Следует отметить, что если задача NP-трудна для критериев $C_{\max}$ и $\sum C_i$, то она остается NP-трудной и для всех остальных регулярных критериев, традиционно рассматриваемых в теории расписаний.

Заключение

Литература по теории расписаний включает значительное число обзоров и книг, посвященных одностадийным системам обслуживания и многостадийным системам с фиксированным числом приборов. В данном обзоре представлена граница между полиномиально разрешимыми и NP-трудными задачами теории расписаний при условии фиксированного числа требований и неограниченном числе приборов.

В частности, как следует из табл. 1, задача оптимального обслуживания двух требований полиномиально разрешима для любого регулярного критерия оптимальности, а задача оптимального обслуживания трех требований является NP-трудной для любого критерия, традиционно рассматриваемого в современной теории расписаний. Построение оптимального по быстродействию расписания без прерываний операций в системе mixed shop можно реализовать за полиномиальное время в случае, когда фиксированы как число приборов, так и число требований и, по крайней мере, один из параметров m или n_J не больше двух.

Из табл. 1–3 следует, что классификация задач теории расписаний с фиксированным числом требований в основном завершена. Возможные направления дальнейших исследований в этой области могут быть связаны с улучшением асимптотических оценок сложности эффективных алгоритмов для критериев $C_{\max}$ и $\sum C_i$, а также с исследованием аналогичных задач теории расписаний для других критериев оптимальности.

Данный обзор подготовлен частично при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь в рамках проектов Ф02Р-013 и Ф03МС-039.

Список литературы

1. Johnson S.M. Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included // Naval Research Logistic Quarterly, 1954. - V. 1. - № 1. - P. 61-68.

2. Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы. - М.: Наука, 1989.

3. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: Мир, 1982.

4. Akers S.B. A graphical approach to production scheduling problems // Operations Research. - 1956. - № 4. - P. 244-245.

5. Akers S.B., Friedman J. A non-numerical approach to production scheduling problems // Operational Research. - 1956. - № 3. - P. 429-442.

6. Сотсков Ю.Н. Оптимальное обслуживание двух требований при регулярном критерии // Автоматизация процессов проектирования. - Мн.: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1985. - С. 86-95.

7. Brucker P. An efficient algorithm for the job-shop problem with two jobs // Computing, 1988. - № 40. - P. 353-359.

8. Hardgrave W.H., Nemhauser G.L. A geometric model and graphical algorithm for a sequencing problem // Operations Research. - 1963. - № 11. - P. 889-900.

9. Szwarc W. Solution of the Akers-Friedman scheduling problem // Operations Research. - 1960. - № 8. - P. 782-788.

10. Сотсков Ю.Н. Сложность задач теории расписаний с фиксированным числом требований // Доклады АН БССР. - 1989. - Т. 33. - № 6. - С. 488-491.

11. Сотсков Ю.Н. Сложность задач оптимального обслуживания трех требований // Кибернетика. - 1990. - № 5. - С. 50-54.

12. Sotskov Yu.N. The complexity of shop-scheduling problems with two or three jobs // European Journal of Operational Research. - 1991. - V. 53. - № 3. - P. 326-336.

13. Сотсков Ю.Н., Шахлевич Н.В. NP-трудность задач оптимального обслуживания трех требований // Весці АН БССР. Серыя фіз.-мат. навук. - 1990. - № 4. - С. 96-101.

14. Sotskov Yu.N., Shakhlevich N.V. NP-hardness of shop-scheduling problems with three jobs // Discrete Applied Mathematics. - 1995. - V. 59. - P. 237-266.

15. Brucker P., Jurisch B., Meyer W. Geometric methods for solving the job-shop scheduling problem. - Osnabruck, 1989. - 12 p. (Preprint Heft 127 / Fachbereich Mathematik/Informatik, Universitat Osnabruck; № 12).

16. Servax В.В. О задачах Акерса-Фридмана // Управляемые системы. – Новосибирск, 1983. – Вып. 23. - С. 70-81.

17. Глебов Н.И. Алгоритм составления расписания для двух работ // Управляемые системы. - Новосибирск. -1968. - Вып. 1. - С. 14-20.

18. Альбертон И.Б. Полиномиальные алгоритмы для задач теории расписаний на "узких" сетях // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. - 1986. - № 6. - С. 161-171.

19. Brucker P., Schlie R. Job-shop scheduling with multipurpose machines. - Osnabruck, 1989. - 12 p. (Preprint Heft 128 / Fachbereich Mathematik/Informatik, Universitat Osnabruck; № 8).

20. Kravchenko C.A., Sotskov Yu.N. Optimal makespan schedule for three jobs on two machines // Mathematical Methods of Operations Research. – 1996. - V. 43. – P. 233-238.

21. Brucker P. A polynomial algorithm for the two machine job-shop scheduling problem with a fixed number of jobs // Operations Research-Spectrum. - 1994. - № 16. - P. 5-7.

22. Brucker P., Kravchenko C.A., Sotskov Yu.N. On the complexity of two machine job-shop scheduling with regular objective functions // Operations Research-Spectrum. - 1994. - № 16. - P. 5-7.

23. Brucker P., Kravchenko C.A., Sotskov Yu.N. Preemptive job-shop scheduling problems with a fixed number of jobs // Mathematical Methods of Operations Research. - 1999. - № 49. - P. 41-76.

24. Gonzales T., Sahni A. Open shop scheduling to minimize finish time // Journal of Associaion of Computer Machinery. - 1976. - V. 23. - № 4. - P. 665-679.

25. Shakhlevich N.V., Strusevich V.A. Scheduling two jobs in a multi-machine open shop to minimize an arbitrary regular penalty function. Report 9125/A. Erasmus University Rotterdam. - The Netherlands, 1990. - 24 p.

26. Струсевич В.А. О возможности построения оптимального по быстродействию расписания для многостадийной системы с нефиксированными маршрутами прохождения стадий // Весці АН БССР. Серыя фiз.-мат. навук. - 1986. - № 6. - С. 43-48.

27. Masuda T., Ishii H., Nishida T. The mixed shop scheduling problem // Discrete Applied Mathematics. - 1985. - V. 11. - № 2. - P. 175-186.

28. Shakhlevich N.V., Sotskov Yu.N., Werner F. Shop-scheduling problems with fixed and non-fixed machine orders of jobs // Annals of Operations Research. - 1999. - V. 92. - P. 281-304.

29. Shakhlevich N.V., Sotskov Yu.N. Scheduling two jobs with fixed and nonfixed routines // Computing. - 1994. - V. 52. - P. 17-30.

30. Shakhlevich N.V., Sotskov Yu.N., Werner F. Complexity of mixed shop scheduling problems: A survey // European Journal of Operational Research. - 2000. - V. 120. - P. 343-351.

Поступила 02.02.04

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: sotskov@newman.bas-net.by

Yu. N. Sotskov

COMPLEXITY OF OPTIMAL SCHEDULING FIXED NUMBER OF JOBS IN MULTI-STAGE SYSTEMS

The paper surveys the complexity of job shop, flow shop, open shop and mixed shop scheduling problems when the number of jobs is less than or equal to the number of machines. Almost all the shop-scheduling problems with two jobs can be solved in polynomial time for any regular criterion, while those with three jobs are binary NP-hard. The exceptions are the two job m machine mixed shop problem without operation preemptions which is NP-hard for any non-trivial regular criterion, and the n jobs m machines open shop problem with allowed operation preemptions, which is polynomially solvable for minimizing makespan.