

УДК 537.8:517.958

В.Т. Ерофеев<sup>1</sup>, А.К. Синицын<sup>2</sup>

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОХОЖДЕНИИ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ БИАНИЗОТРОПНУЮ НЕОДНОРОДНУЮ ПЛАСТИНУ

*Описывается методика решения задачи о прохождении монохроматической, произвольно поляризованной электромагнитной волны через плоский экран из неоднородного бианизотропного фарадеева материала. Рассчитываются характерные зависимости от частоты и угла падения коэффициентов отражения и прохождения волн через экраны с различными анизотропными и киральными параметрами.*

### Введение

В настоящее время в научных публикациях большое внимание уделяется исследованию процессов взаимодействия электромагнитных волн с композитными материалами [1], включающими киральные [2], биизотропные и метаматериалы [3]. Практический интерес представляют исследования электродинамических свойств анизотропных сред [4–7]: кристаллов, ферритов, намагниченной плазмы, гиротропных и дважды гиротропных материалов, фарадеевых сред, в которых при распространении волны вращается плоскость поляризации [8]. Исследуются монохроматические электромагнитные поля в анизотропных средах с диагональными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей [9]. Как правило, теоретические исследования таких сред проводятся с использованием аналитических методов [10], позволяющих представить искомые величины в виде формул, анализ которых упрощает выявление ключевых электродинамических свойств устройств, выполненных из рассматриваемых материалов. Для материальных тензоров общего вида разрабатываются методы вычисления полей в многослойных анизотропных структурах [11, 12]. В работе [11] решение краевой задачи дифракции плоских волн на анизотропных слоях сведено к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для скалярных потенциалов специального вида. В [12] задача дифракции преобразована к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка, которая решается аналитически с использованием матричной экспоненты. При математическом моделировании распространения волн в композитных материалах, содержащих большое число неоднородностей, используется метод гомогенизации уравнений Максвелла, когда неоднородная среда заменяется эквивалентной анизотропной однородной средой с эффективными параметрами. В работах [11, 13] исследуется возможность гомогенизации для мелкослоистых неоднородных структур.

В последние годы появилось много работ, посвященных исследованию анизотропных сред с киральными свойствами, так называемых бианизотропных сред, которые характеризуются четырьмя материальными тензорами [14–16].

Расчетные аналитические формулы для фарадеевых сред [15] оказываются достаточно громоздкими, и их аналитический и численный анализ затруднителен. Поэтому при моделировании процессов прохождения волн через многослойные пластины используются упрощенные подходы к формулировке граничных условий [17]. В то же время специальные численные методы позволяют эффективно и практически точно решать корректно поставленные задачи для фарадеевых сред как с плавно изменяющимися параметрами, так и с разрывными. Это открывает возможности для исследования широкого круга новых задач, в частности для многослойных экранов [18].

В настоящей статье задача о прохождении плоской, произвольно поляризованной, монохроматической электромагнитной волны через бесконечный плоский экран из бианизотропного фарадеева материала, неоднородного вдоль нормали к экрану, сведена к решению краевой задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с граничными условиями третьего рода. На основе численного метода решения краевой задачи разработана эффективная программа для вычисления коэффициентов отражения и прохождения через неоднородный экран ТЕ- и ТН-плоскополяризованных волн. В качестве иллюстрации ее

возможностей приведены характерные зависимости от частоты коэффициентов отражения и прохождения через экраны с различными анизотропными свойствами.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую бианизотропную пластину толщины  $L'$ , на которую слева падает под определенным углом плоская волна  $\vec{E}_0\vec{H}_0$  (рис. 1).

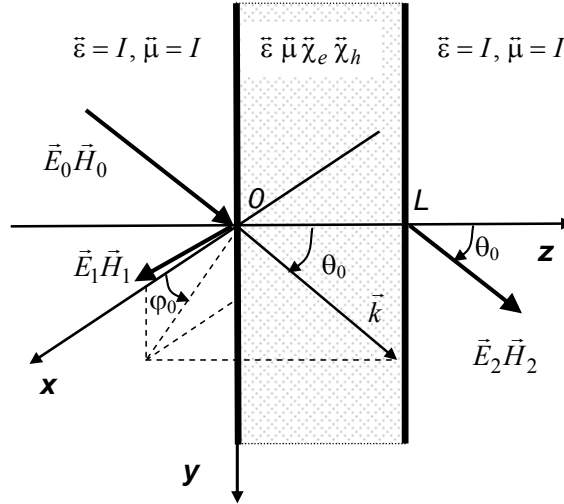


Рис. 1. Падение плоской волны на бианизотропную пластину

Свойства пластины определяются материальными уравнениями вида

$$\dot{\vec{B}}' = \mu_0 \dot{\vec{\mu}} \cdot \dot{\vec{H}}' + \dot{\vec{\chi}}_e / c \cdot \dot{\vec{E}}'; \quad \dot{\vec{D}}' = \varepsilon_0 \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \dot{\vec{E}}' + \dot{\vec{\chi}}_h / c \cdot \dot{\vec{H}}', \quad (1)$$

где  $\varepsilon_0, \mu_0$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, а материальные коэффициенты являются тензорами фарадеевой бианизотропной среды с произвольными комплексными элементами, зависящими от координаты  $z$  [15], и имеют вид

$$\dot{\vec{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}; \quad \dot{\vec{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}; \quad \dot{\vec{\chi}}_e = \begin{bmatrix} \chi_{e11} & \chi_{e12} & 0 \\ \chi_{e21} & \chi_{e22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{e3} \end{bmatrix}; \quad \dot{\vec{\chi}}_h = \begin{bmatrix} \chi_{h11} & \chi_{h12} & 0 \\ \chi_{h21} & \chi_{h22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{h3} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Вне пластины  $\dot{\vec{\varepsilon}} = I, \dot{\vec{\mu}} = I, \dot{\vec{\chi}}_e = 0, \dot{\vec{\chi}}_h = 0, I$  – единичная матрица.

Для описания результирующего электромагнитного поля на заданной частоте  $\omega$  будем использовать безразмерные уравнения Максвелла для комплексных амплитуд поля с материальными уравнениями (1):

$$\text{rot } \dot{\vec{E}} = -jW \left[ \dot{\vec{\mu}}(z) \dot{\vec{H}} + \dot{\vec{\chi}}_e(z) \dot{\vec{E}} \right]; \quad \text{rot } \dot{\vec{H}} = jW \left[ \dot{\vec{\varepsilon}}(z) \dot{\vec{E}} + \dot{\vec{\chi}}_h(z) \dot{\vec{H}} \right], \quad (3)$$

где  $W = \omega / \omega_0$ ,  $\omega$  – рабочая частота;  $\omega_0 = 2\pi f_0$  – опорная частота, выбранная для перехода к безразмерным переменным.

Используются следующие соотношения между размерными (со штрихами) и безразмерными величинами:  $(x, y, z, L) = (x', y', z', L') \cdot \omega_0 / c$ ,  $c$  – скорость света,  $L'$  – толщина пластины;

$t = \omega_0 t'$ ,  $\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}' / E_m$ ,  $\dot{\vec{H}} = \mu_0 c \dot{\vec{H}}' / E_m$ ,  $E_m$  – характерная амплитуда электрического поля;  $\dot{\vec{E}}'$ ,  $\dot{\vec{H}}'$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей с физической размерностью;  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  – безразмерные векторы поля. Временная зависимость полей задана в виде  $\exp(jWt)$ .

## 2. Преобразование уравнений Максвелла

Зададим падающую, отраженную и проходящую волны, показанные на рис. 1, следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_0 &= A_0 \vec{U}^{(-1)} + B_0 \vec{U}^{(-2)}; \quad \vec{H}_0 = j \left( A_0 \vec{U}^{(-2)} + B_0 \vec{U}^{(-1)} \right); \quad z \leq 0; \\
 \vec{E}_1 &= A_1 \vec{U}^{(+1)} + B_1 \vec{U}^{(+2)}; \quad \vec{H}_1 = j \left( A_1 \vec{U}^{(+2)} + B_1 \vec{U}^{(+1)} \right); \quad z \leq 0; \\
 \vec{E}_2 &= A_2 \vec{U}^{(-1)} + B_2 \vec{U}^{(-2)}; \quad \vec{H}_2 = j \left( A_2 \vec{U}^{(-2)} + B_2 \vec{U}^{(-1)} \right); \quad z \geq L,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где  $A_i, B_i$  – амплитуды ортогонально поляризованных плоских волн, которые в выбранной системе координат для вакуума имеют вид [19, с.101]

$$\begin{aligned}
 \vec{U}^{(\mp 1)} &= (\sin \varphi_0 \vec{x}_0 - \cos \varphi_0 \vec{y}_0) \exp(-jW(k_x x + k_y y \pm k_z z)); \\
 \vec{U}^{(\mp 2)} &= j(\mp \cos \theta_0 (\cos \varphi_0 \vec{x}_0 + \sin \varphi_0 \vec{y}_0) + \sin \theta_0 \vec{z}_0) \exp(-jW(k_x x + k_y y \pm k_z z)).
 \end{aligned}$$

Проекция на оси координат нормированного волнового вектора падающей волны  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  задаются как

$$k_x = \cos \varphi_0 \sin \theta_0; \quad k_y = \sin \varphi_0 \sin \theta_0; \quad k_z = \cos \theta_0; \quad 0 \leq \theta_0 < \pi/2; \quad 0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi.$$

Амплитуды парциальных составляющих падающей волны  $A_0, B_0$  заданы, соответствующие амплитуды отраженной  $A_1, B_1$  и проходящей  $A_2, B_2$  волн подлежат определению.

Представим результирующее поле внутри пластины ( $0 \leq z \leq L$ ) в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{E}} &= (\dot{E}_x(z) \vec{x}_0 + \dot{E}_y(z) \vec{y}_0 + \dot{E}_z(z) \vec{z}_0) \exp(-jW(k_x x + k_y y)); \\
 \dot{\vec{H}} &= (\dot{H}_x(z) \vec{x}_0 + \dot{H}_y(z) \vec{y}_0 + \dot{H}_z(z) \vec{z}_0) \exp(-jW(k_x x + k_y y)).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Такое представление решения позволяет сформулировать двухточечную краевую задачу для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений, действуя следующим образом. Обозначим

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(z) &= \dot{E}_x(z) \vec{x}_0 + \dot{E}_y(z) \vec{y}_0 + \dot{E}_z(z) \vec{z}_0 = \vec{E}_t + \dot{E}_z(z) \vec{z}_0; \\
 \vec{H}(z) &= \dot{H}_x(z) \vec{x}_0 + \dot{H}_y(z) \vec{y}_0 + \dot{H}_z(z) \vec{z}_0 = \vec{H}_t + \dot{H}_z(z) \vec{z}_0.
 \end{aligned}$$

Воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned}
 &\text{rot} \left[ \vec{E}(z) \exp(-jW(k_x x + k_y y)) \right] = \\
 &= \text{rot} \vec{E}(z) \exp(-jW(k_x x + k_y y)) + \text{grad} \exp(-jW(k_x x + k_y y)) \times \vec{E}(z) = \\
 &= -\hat{S} \frac{d\vec{E}_t}{dz} - jW \left( \hat{S} \cdot \vec{k}^\perp \dot{E}_z + \vec{k}^T \hat{S} \cdot \vec{E}_t \vec{z}_0 \right),
 \end{aligned}$$

где  $\hat{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{k}^\perp = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \end{bmatrix}$ ,  $\vec{k}^T = [k_x \quad k_y]$ .

Тогда уравнения (3) с учетом (5) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} -\hat{S} \frac{d\vec{E}_t}{dz} - jW\hat{S}\vec{k}^\perp \dot{E}_z &= -jW \left[ \hat{\chi}_e(z)\vec{E}_t + \hat{\mu}(z)\vec{H}_t \right]; \\ -\hat{S} \frac{d\vec{H}_t}{dz} - jW\hat{S}\vec{k}^\perp \dot{H}_z &= jW \left[ \hat{\varepsilon}(z)\vec{E}_t + \hat{\chi}_h(z)\vec{H}_t \right]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \vec{k}^T \hat{S} \vec{E}_t &= \chi_{e3}(z)\dot{E}_z + \mu_3(z)\dot{H}_z; \\ -\vec{k}^T \hat{S} \vec{H}_t &= \varepsilon_3(z)\dot{E}_z + \chi_{h3}(z)\dot{H}_z. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены следующие подматрицы тензоров (2):

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}; \quad \hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix}; \quad \hat{\chi}_e = \begin{bmatrix} \chi_{e11} & \chi_{e12} \\ \chi_{e21} & \chi_{e22} \end{bmatrix}, \quad \hat{\chi}_h = \begin{bmatrix} \chi_{h11} & \chi_{h12} \\ \chi_{h21} & \chi_{h22} \end{bmatrix}.$$

Из системы (7) получаем выражение продольных координат через поперечные:

$$\dot{E}_z = -g_\mu \vec{k}^T \hat{S} \vec{H}_t - g_{\chi h} \vec{k}^T \hat{S} \vec{E}_t; \quad \dot{H}_z = g_{\chi e} \vec{k}^T \hat{S} \vec{H}_t + g_\varepsilon \vec{k}^T \hat{S} \vec{E}_t, \quad (8)$$

где  $g_\mu = \mu_3 / g$ ;  $g_{\chi h} = \chi_{h3} / g$ ;  $g_{\chi e} = \chi_{he} / g$ ;  $g_\varepsilon = \varepsilon_3 / g$ ;  $g = \varepsilon_3 \mu_3 - \chi_{e3} \chi_{h3}$ .

Подставляя (8) в (6), получим систему уравнений для поперечных составляющих:

$$\begin{aligned} \hat{S} \frac{d\vec{E}_t}{dz} &= jW \left[ (\hat{\mu} - \hat{K}_1)\vec{H}_t + (\hat{\chi}_e - \hat{K}_2)\vec{E}_t \right]; \\ \hat{S} \frac{d\vec{H}_t}{dz} &= -jW \left[ (\hat{\chi}_h - \hat{K}_3)\vec{H}_t + (\hat{\varepsilon} - \hat{K}_4)\vec{E}_t \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\hat{K}_1 = \frac{\mu_3}{g} \hat{K}$ ;  $\hat{K}_2 = \frac{\chi_{h3}}{g} \hat{K}$ ;  $\hat{K}_3 = \frac{\chi_{e3}}{g} \hat{K}$ ;  $\hat{K}_4 = \frac{\varepsilon_3}{g} \hat{K}$ ;  $\hat{K} = -\hat{S} \vec{k}^\perp \vec{k}^T \hat{S} = \begin{bmatrix} k_y^2 & -k_x k_y \\ -k_x k_y & k_x^2 \end{bmatrix}$ .

Преобразуем систему первого порядка (9) в систему второго порядка относительно компоненты  $\vec{E}_t$ , для чего выразим  $\vec{H}_t$  из первого уравнения (9):

$$\vec{H}_t = \frac{j}{W} \left[ -(\hat{\mu} - \hat{K}_1)^{-1} \hat{S} \frac{d\vec{E}_t}{dz} + jW (\hat{\mu} - \hat{K}_1)^{-1} (\hat{\chi}_e - \hat{K}_2) \vec{E}_t \right], \quad (10)$$

затем подставим (10) во второе уравнение (9). Получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \hat{A}(z) \frac{d\vec{E}_t}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{B}(z) \vec{E}_t) + \hat{C} \frac{d\vec{E}_t}{dz} + \hat{D} \vec{E}_t = 0, \quad (11)$$

$$\text{где } \hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (\hat{\mu} - \hat{K}_1)^{-1} \hat{S};$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = -jW(\hat{\mu} - \hat{K}_1)^{-1} (\hat{\chi}_e - \hat{K}_2);$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = -jW\hat{S}(\hat{\chi}_h - \hat{K}_3)(\hat{\mu} - \hat{K}_1)^{-1} \hat{S};$$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = W^2 \hat{S} \left[ \hat{\varepsilon} - \hat{K}_4 - (\hat{\chi}_h - \hat{K}_3)(\hat{\mu} - \hat{K}_1)^{-1} (\hat{\chi}_e - \hat{K}_2) \right].$$

Граничные условия к уравнению (11) найдем из условия непрерывности векторов  $\vec{E}_t$  и  $\vec{H}_t$  на границах  $z=0$  и  $z=L$ :

$$\begin{aligned} \vec{H}_t \Big|_{z=0} &= \frac{j}{W} \left[ -\hat{A} \frac{d\vec{E}_t}{dz} - \hat{B} \vec{E}_t \right]_{z=0} = \\ &= A_0 \cos \theta_0 (\cos \varphi_0 \vec{x}_0 + \sin \varphi_0 \vec{y}_0) + jB_0 (\sin \varphi_0 \vec{x}_0 - \cos \varphi_0 \vec{y}_0) - \\ &\quad - A_1 \cos \theta_0 (\cos \varphi_0 \vec{x}_0 + \sin \varphi_0 \vec{y}_0) + jB_1 (\sin \varphi_0 \vec{x}_0 - \cos \varphi_0 \vec{y}_0); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_t \Big|_{z=0} &= A_0 (\sin \varphi_0 \vec{x}_0 - \cos \varphi_0 \vec{y}_0) - jB_0 \cos \theta_0 (\cos \varphi_0 \vec{x}_0 + \sin \varphi_0 \vec{y}_0) + \\ &\quad + A_1 (\sin \varphi_0 \vec{x}_0 - \cos \varphi_0 \vec{y}_0) + jB_1 \cos \theta_0 (\cos \varphi_0 \vec{x}_0 + \sin \varphi_0 \vec{y}_0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_t \Big|_{z=L} &= \frac{j}{W} \left[ -\hat{A} \frac{d\vec{E}_t}{dz} - \hat{B} \vec{E}_t \right]_{z=L} = \\ &= [A_2 \cos \theta_0 (\cos \varphi_0 \vec{x}_0 + \sin \varphi_0 \vec{y}_0) + jB_2 (\sin \varphi_0 \vec{x}_0 - \cos \varphi_0 \vec{y}_0)] \exp(-jWk_z L); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\vec{E}_t \Big|_{z=L} = [A_2 (\sin \varphi_0 \vec{x}_0 - \cos \varphi_0 \vec{y}_0) - jB_2 \cos \theta_0 (\cos \varphi_0 \vec{x}_0 + \sin \varphi_0 \vec{y}_0)] \exp(-jWk_z L).$$

Для удобства обозначим далее  $u(z) = \dot{E}_x(z)$ ,  $v(z) = \dot{E}_y(z)$  и запишем краевую задачу (11)–(13) следующим образом:

– уравнения

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( a_{11}(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( a_{12}(z) \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (b_{11}u) + \frac{\partial}{\partial z} (b_{12}v) + c_{11} \frac{\partial u}{\partial z} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial z} + d_{11}u + d_{12}v = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( a_{21}(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( a_{22}(z) \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (b_{21}u) + \frac{\partial}{\partial z} (b_{22}v) + c_{21} \frac{\partial u}{\partial z} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial z} + d_{21}u + d_{22}v = 0; \quad (15)$$

– граничные условия

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial u}{\partial z} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial z} + (b_{11} - f_{11})u + (b_{12} - f_{12})v \Big|_{z=0} &= f_1; \\ a_{21} \frac{\partial u}{\partial z} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial z} + (b_{21} + f_{21})u + (b_{22} + f_{22})v \Big|_{z=0} &= f_2; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial u}{\partial z} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial z} + (b_{11} + f_{11})u + (b_{12} + f_{12})v \Big|_{z=L} &= 0; \\ a_{21} \frac{\partial u}{\partial z} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial z} + (b_{21} - f_{21})u + (b_{22} - f_{22})v \Big|_{z=L} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Коэффициенты в граничных условиях получаются из соотношений (12), (13) и имеют вид

$$\begin{aligned} f_{11} = f_{22} &= jW \frac{\sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{\cos \theta_0} \sin^2 \theta_0; \\ f_{12} &= \frac{jW}{\cos \theta_0} (1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \theta_0); \quad f_{21} = \frac{jW}{\cos \theta_0} (1 - \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \theta_0); \\ f_1 &= 2W (jA_0 \cos \varphi_0 \cos \theta_0 - B_0 \sin \varphi_0); \quad f_2 = 2W (jA_0 \sin \varphi_0 \cos \theta_0 + B_0 \cos \varphi_0). \end{aligned}$$

После решения задачи (14)–(17) магнитные компоненты поля внутри пластины вычисляются по формулам (10). Амплитуды в (4) отраженной и проходящей волн вычисляются из решения системы (12), (13) по формулам

$$\begin{aligned} A_1 &= (u(0) \sin \varphi_0 - v(0) \cos \varphi_0) - A_0, \\ B_1 &= \frac{-j}{\cos \theta_0} (u(0) \cos \varphi_0 + v(0) \sin \varphi_0) + B_0; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= (u(L) \sin \varphi_0 - v(L) \cos \varphi_0) \exp(jW \cdot L \cos \theta_0), \\ B_2 &= \frac{j}{\cos \theta_0} (u(L) \cos \varphi_0 + v(L) \sin \varphi_0) \exp(jW \cdot L \cos \theta_0). \end{aligned} \quad (19)$$

### 3. Метод решения

Решение задачи (14)–(17) будем находить методом сеток. Выберем равномерную сетку  $\omega_h = \{z_i = (i-1)h, h = L/n, i = 1, \dots, n+1\}$ . При построении однородной консервативной конечно-разностной схемы второго порядка точности аппроксимируем дифференциальные операторы в (14), (15) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( a_{11} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (b_{11}u) + c_{11} \frac{\partial u}{\partial z} + d_{11}u &\approx L_{h11}u_i = \\ = \frac{a_{11}^{i+1/2}u_{i+1} - (a_{11}^{i+1/2} + a_{11}^{i-1/2})u_i + a_{11}^{i-1/2}u_{i-1}}{h^2} + \\ + \frac{b_{11}^{i+1/2}(u_{i+1} + u_i) - b_{11}^{i-1/2}(u_i + u_{i-1})}{2h} + \\ + \frac{c_{11}^{i+1/2}(u_{i+1} - u_i) + c_{11}^{i-1/2}(u_i - u_{i-1})}{2h} + d_{11}^i u_i, \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}^{i+1/2} &= \frac{1}{h} \int_{z_i}^{z_{i+1}} a_{11}(z) dz; & a_{11}^{i-1/2} &= \frac{1}{h} \int_{z_{i-1}}^{z_i} a_{11}(z) dz; \\ b_{11}^{i+1/2} &= \frac{1}{h} \int_{z_i}^{z_{i+1}} b_{11}(z) dz; & b_{11}^{i-1/2} &= \frac{1}{h} \int_{z_{i-1}}^{z_i} b_{11}(z) dz; \\ c_{11}^{i-1/2} &= \frac{1}{h} \int_{z_{i-1}}^{z_i} c_{11}(z) dz; & c_{11}^{i+1/2} &= \frac{1}{h} \int_{z_i}^{z_{i+1}} c_{11}(z) dz; & d_{11}^i &= \frac{1}{h} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} d_{11}(z) dz. \end{aligned}$$

Дифференциальные операторы в граничных условиях аппроксимируем конечноразностными формулами второго порядка точности:

$$\begin{aligned} a_{11}(z) \frac{\partial u}{\partial z} + (b_{11}(z) + f_{11}) u \Big|_{z=0} &\approx l_{h11} u_1 = a_{11}(0) \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2h} + (b_{11}(0) - f_{11}) u_0; \\ a_{11}(z) \frac{\partial u}{\partial z} + (b_{11}(z) + f_{11}) u \Big|_{z=L} &\approx l_{h11} u_{n+1} = a_{11}(L) \frac{3u_{n+1} - 4u_n + u_{n-1}}{2h} + (b_{11}(L) - f_{11}) u_{n+1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Остальные операторы аппроксимируем аналогичным образом. В результате получим конечно-разностную схему второго порядка точности:

$$\begin{aligned} L_{h11} u_i + L_{h12} v_i &= 0; & L_{h21} u_i + L_{h22} v_i &= 0; & i &= 2, \dots, n; \\ l_{h11} u_1 + l_{h12} v_1 &= f_1; & l_{h21} u_{n+1} + l_{h22} v_{n+1} &= f_2, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $L_{h11}, L_{h12}, L_{h21}, L_{h22}, l_{h11}, l_{h12}, l_{h21}, l_{h22}$  – разностные операторы типа (20), (21).

Решение системы линейных алгебраических уравнений (22), имеющих блочно-ленточную матрицу, получаем методом Гаусса с выбором главного элемента, реализованным с использованием технологии работы с разреженными матрицами [20, 21].

#### 4. Результаты проведенных вычислительных экспериментов

Описанная выше методика была реализована в разработанной программе расчета процесса прохождения плоской волны как через однослойную, так и многослойную пластину из фарадеева бианизотропного материала с произвольными параметрами. Программа позволяет, используя формулы для амплитуд (18), (19), находить коэффициенты отражения  $R_1^w = |A_1|^2 / (|A_0|^2 + |B_0|^2)$ ,  $R_2^w = |B_1|^2 / (|A_0|^2 + |B_0|^2)$  и прохождения  $T_1^w = |A_2|^2 / (|A_0|^2 + |B_0|^2)$ ,  $T_2^w = |B_2|^2 / (|A_0|^2 + |B_0|^2)$  по мощности для каждой из двух ортогональных поляризаций при заданных параметрах среды, а также проводить оптимизационный поиск параметров среды по выбранным критериям качества. Выполненные тестовые расчеты показали полное совпадение результатов с опубликованными ранее исследованиями прохождения волн через биизотропную пластину, в которых используются аналитические точные решения [22, 23].

Как отмечалось в литературе [8, 18], основными эффектами при прохождении волны через рассматриваемую пластину являются наличие частотных полос полного прохождения и частичного отражения волны, поворот плоскости поляризации и кросс-поляризация. Для иллюстрации возможностей программы ниже приведены результаты расчета нескольких характерных режимов, в которых проявляется преобразование поляризации волны при прохождении через бианизотропную пластину. При обезразмеривании выбрана опорная частота  $f_0=1$  ГГц, ( $c/\omega_0=4,775$  см), толщина пластины  $L'=5$  см ( $L=1,047$ ). На входе задавалась волна одной поля-

ризации ( $A_0=1, B_0=0$ , вектор  $\vec{E}_0$  параллелен пластине), угол падения  $\theta_0$  и угол  $\varphi_0$ , задающий поворот поляризации волны относительно осей тензора поляризации в плоскости  $xu$ . На рис. 2–4 приведены характерные кривые зависимости коэффициентов 1 –  $T_1^w$ , 2 –  $T_2^w$ , 3 –  $R_1^w$ , 4 –  $R_2^w$  от частоты  $W$  и угла падения  $\theta_0$ . Если не подбирать параметры специальным образом, то зависимости этих коэффициентов от частоты имеют довольно хаотичный характер. Заметим, что в силу выбора безразмерных параметров, если зафиксировать  $W=1,047$ , зависимость коэффициентов отражения и прохождения от безразмерной толщины пластины  $L$  идентична представленной на рис. 2, а–4, а зависимости от частоты.

Рассмотрим три варианта пластин: диэлектрические пластины с диагональной анизотропией и нулевыми тензорами киральности, диэлектрические пластины с гиротропией и нулевыми тензорами киральности, а также киральные пластины со специальной анизотропией.

*Вариант 1.* Падение волны на пластину из анизотропного диэлектрика. При  $\vec{\mu}=I, \vec{\chi}_e = \vec{\chi}_h = 0, \varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=0$  и заданном  $\theta_0$  подбирались действительные различные  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_3$  и  $\varphi_0$ , при которых возможен поворот на  $\pi/2$  плоскости поляризации проходящей волны при отсутствии отражения. Обнаружено, что для  $\theta_0=0$  (нормальное падение) при  $\varphi_0=k\pi/2, k=0, 1, 2, 3$  кросс-поляризация отсутствует и падающая волна взаимодействует либо только с диэлектриком  $\varepsilon_{11}=1,32$  ( $\varphi_0=\pi/2, \varphi_0=3\pi/2$ ), либо с диэлектриком  $\varepsilon_{22}=5,17$  ( $\varphi_0=0, \varphi_0=\pi$ ).

На рис. 2, а для  $\theta_0=0$  показана зависимость от частоты коэффициентов прохождения и отражения для полученного характерного варианта.

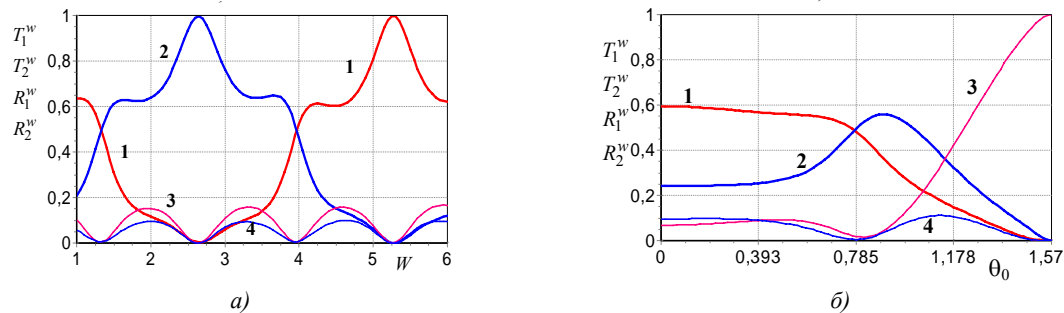


Рис. 2. Коэффициенты прохождения и отражения через диэлектрическую анизотропную пластину.

Параметры пластины  $\vec{\mu}=I, \vec{\chi}_e = \vec{\chi}_h = 0$ : а)  $\varepsilon_{11}=1,32, \varepsilon_{22}=5,17, \varepsilon_3=\text{var}, \theta_0=0, \varphi_0=0,76$ ;

б)  $\varepsilon_{11}=1,32, \varepsilon_{22}=4,51, \varepsilon_3=1,32, W=4,97, \varphi_0=0,904$

Параметры подобраны таким образом, что при определенных частотах на выходе наблюдается волна с двумя одинаковыми по мощности поляризациями ( $W=1,32, W=3,96$ ) или волна, имеющая линейную поляризацию под углом  $\pi/2$  к падающей ( $W=2,64, 5,28$ ) при отсутствии отражения. Периодический характер зависимости от частоты коэффициентов отражения объясняется эффектами интерференции волн, отраженных от двух поверхностей пластины, когда  $\varepsilon_{ii}>1$  [19]. Отраженная волна имеет эллиптическую поляризацию.

Следует отметить, что при нормальном падении представленные зависимости сохраняются при любых значениях  $\varepsilon_3$ . Это, кстати, следует из уравнений (9), так как при  $\theta_0=0$  матрица  $\vec{K}=0$  и в уравнения для расчета коэффициентов (14)–(17) не входят компоненты  $\varepsilon_3, \mu_3, \chi_{e3}, \chi_{h3}$  тензоров вида (2).

На рис. 2, б показаны зависимости коэффициентов от угла падения  $\theta_0$ . Параметры подобраны таким образом, что при  $\theta_0=\pi/4$  на выходе наблюдается волна с двумя одинаковыми по мощности поляризациями. Когда угол падения стремится к  $\pi/2$ , коэффициент отражения падающей волны стремится к единице. При отличном от нуля угле падения проявляется зависимость коэффициентов от компоненты  $\varepsilon_3$ .

*Вариант 2.* Падение на слой гиротропной среды (слой из подмагниченной плазмы)  $\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & -j\varepsilon_{12} \\ j\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} \end{bmatrix}$  (рис. 3). Теперь эффект кросс-поляризации не зависит от  $\varphi_0$  как при нор-



мальном падении волны, так и при ее падении под углом  $\theta_0 \neq 0$ . Однако при  $\theta_0 \neq 0$  имеется зависимость от  $\varepsilon_3$ . Параметры подобраны так, что при нормальном падении на определенных частотах имеют место поворот поляризации на  $\pi/2$  и круговая поляризация на выходе при отсутствии отражения.

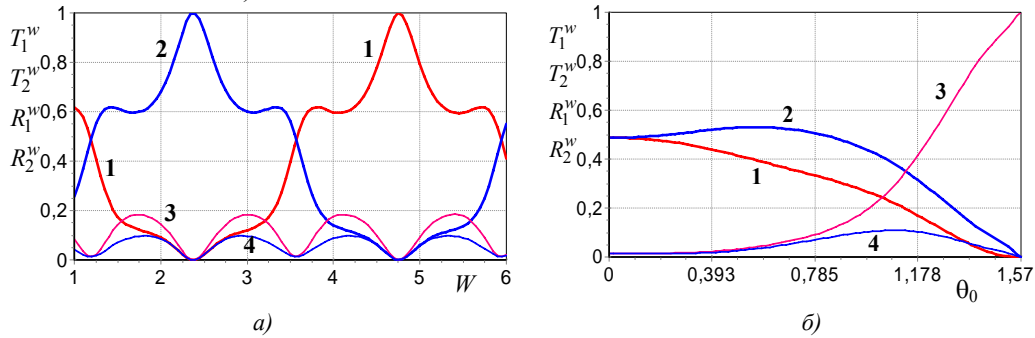


Рис. 3. Коэффициенты прохождения и отражения через слой гиротропной среды. Параметры пластины  $\vec{\mu} = I$ ,  $\vec{\chi}_e = \vec{\chi}_h = 0$ ,  $\varepsilon_{11}=3,97$ ,  $\varepsilon_{12}=2,38$ : а)  $\theta_0=0$ ,  $\varepsilon_3=\text{var}$ ,  $\varphi_0=\text{var}$ ; б)  $W=3,57$ ,  $\varepsilon_3=3,0$ ,  $\varphi_0=\text{var}$

*Вариант 3.* Прямое падение волны ( $\theta_0=0$ ) на киральную пластину. Вариант для биизотропной пластины рассчитывался в [22]. Представленные на рис. 4, а зависимости указывают на то, что при определенном подборе параметров возможны как преобразование линейной поляризации в две поляризации с одинаковыми мощностями ( $W=1,5, 4,5, 7,5\dots$ ), так и поворот поляризации на угол  $\pi/2$  ( $W=3, 6, \dots$ ).

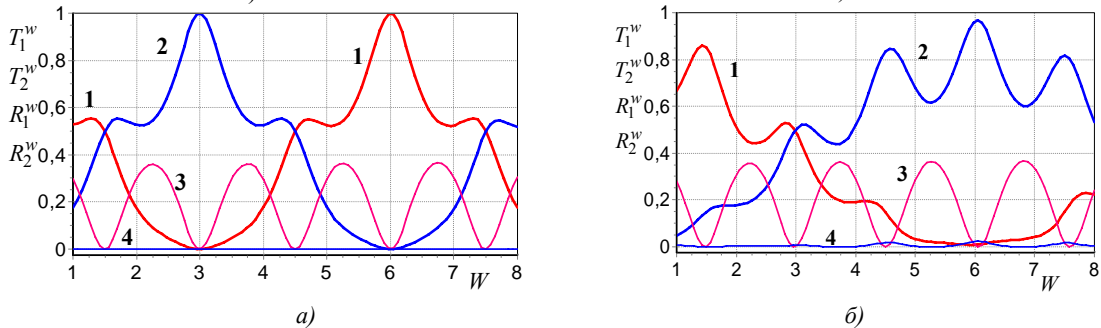


Рис. 4. Коэффициенты прохождения и отражения через киральную пластину. Параметры пластины  $\vec{\varepsilon} = 4 I$ ,  $\vec{\mu} = I$ ,  $\vec{\chi}_e \neq 0$ : а) биизотропная,  $\hat{\chi}_e = 0,5 j \cdot I$ ,  $\hat{\chi}_h = \hat{\chi}_e^*$ ,  $\theta_0=0$ ,  $\varphi_0=\text{var}$ ; б) бианизотропная,  $\chi_{11}=0,5$ ,  $\hat{\chi}_h = \hat{\chi}_e^*$ ,  $\theta_0=0$ ,  $\varphi_0=\pi/2$

Для того чтобы выяснить, как анизотропия тензора киральности влияет на картину преобразования поляризации, были выполнены расчеты для тензора с матрицами вида  $\hat{\chi}_e = \begin{bmatrix} j\chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  и  $\hat{\chi}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j\chi_{22} \end{bmatrix}$ . Зависимость коэффициентов прохождения и отражения при ненулевом  $\chi_{11}=0,5$  изображена на рис. 4, б. Видно, что характерные частоты, соответствующие круговой поляризации и повороту ее на  $\pi/2$ , увеличились вдвое. Для матрицы с ненулевым  $\chi_{22}=0,5$  картина меняется незначительно, а если при этом задать угол поворота  $\varphi_0=0$ , то она в точности повторяет ту, которая показана на рис. 4, б. Можно констатировать, что при такой анизотропии тензора  $\hat{\chi}_e$  имеется небольшое влияние начальной поляризации, т. е. незначительная зависимость от угла  $\varphi_0$ . Если в биизотропной пластине (см. рис. 2, а) уменьшить вдвое

коэффициент киральности ( $\hat{\chi}_e = 0,25j \cdot I$ ), то получим такую же картину, что на рис. 2, б, т. е. независимо от анизотропии проявляется кумулятивный эффект воздействия киральности на прохождение волны.

### Заключение

Предложенная в настоящей статье методика расчета позволяет эффективно проводить исследования процессов прохождения плоской электромагнитной волны через пластину из произвольного бианизотропного материала, описываемого уравнением (1) с тензорами фарадеевского типа. Ввиду использования однородной консервативной схемы (20)–(22) предложенная методика позволяет исследовать как однослойные, так и многослойные пластины, свойства которых по толщине изменяются по заданному закону. Установленные закономерности прохождения волн через анизотропные фарадеевские пластины, такие как независимость процесса прохождения нормально падающей волны от  $z$ -компоненты материальных тензоров, возможность эффективного преобразования поляризации при наличии только одного элемента в тензоре киральности, наличие зон полного преобразования поляризации без существенного отражения, могут быть полезны при конструировании новых материалов с заданными свойствами.

### Список литературы

1. Виноградов, А.П. Электродинамика композитных материалов / А.П. Виноградов. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 206 с.
2. Неганов, В.А. Современное состояние электродинамики искусственных киральных сред (обзор) / В.А. Неганов, О.В. Осипов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 7–33.
3. Гуляев, Ю.В. Метаматериалы: фундаментальные исследования и перспективы применения / Ю.В. Гуляев, А.Н. Лагарьков, С.А. Никитов // Вестник Российской академии наук. – 2008. – Т. 78, № 5. – С. 438–457.
4. Федоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Минск : Изд-во АН БССР, 1958. – 380 с.
5. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.
6. Курушин, Е.П. Электродинамика анизотропных волноведущих структур / Е.П. Курушин, Е.И. Нефедов. – М. : Наука, 1980. – 223 с.
7. Ринкевич, А.Б. Закономерности проникновения электромагнитных волн через металлические магнитные пленки / А.Б. Ринкевич, Д.В. Перов, В.О. Васьяковский, В.Н. Лепаловский // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79, вып. 9. – С. 96–106.
8. Никольский, В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М. : Наука, 1989. – 544 с.
9. Потехин, А.И. Излучение и распространение электромагнитных волн в анизотропной среде / А.И. Потехин. – М. : Наука, 1971. – 76 с.
10. Бодров, В.В. Матрица передачи анизотропного слоя / В.В. Бодров, В.И. Сурков // Радиотехника и электроника. – 1995. – Т. 40, № 6. – С. 864–869.
11. Жук, Н.П. Скаляризация электромагнитного поля в произвольно-анизотропной плоскостойкой среде / Н.П. Жук // Радиотехника и электроника. – 1994. – Т. 39, № 11. – С. 1706–1715.
12. Евельсон, Р.Л. Метод решения задачи о распространении электромагнитных волн в многослойной плоскостойкой поглощающей анизотропной магнитодиэлектрической среде / Р.Л. Евельсон // Радиотехника и электроника. – 2000. – Т. 45, № 8. – С. 918–925.
13. Виноградов, А.П. Электродинамические свойства мелкостойкой среды / А.П. Виноградов, А.М. Мерзлякин // Доклады РАН. – 2001. – Т. 381, № 4. – С. 472–474.
14. Иванов, О.В. Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных слоистых структурах / О.В. Иванов. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 262 с.

15. Вытовтов, К.А. Коэффициенты прохождения и отражения плоскопараллельной пластины из фарадеева кирального материала / К.А. Вытовтов // Радиотехника и электроника. – 2004. – Т. 49, № 5. – С. 559–566.
16. Ерофеенко, В.Т. Плоские электромагнитные поля в фарадеевых композитных средах / В.Т. Ерофеенко, А.В. Щербаков // Тез. докл. Второй Междунар. науч. конф. «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения». – Минск, 2009. – Ч. 1. – С. 44–46.
17. Антоненц, И.В. Применение метода усреднения к расчету распространения электромагнитного излучения через тонкие пленки с различной проводимостью / И.В. Антоненц, Л.Н. Котов, В.Г. Шавров, В.И. Щеглов // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52, № 4. – С. 403–414.
18. Ерофеенко, В.Т. Алгоритм численного исследования экранирующих свойств многослойных экранов из композитных материалов / В.Т. Ерофеенко, С.В. Малый // Информатика. – 2010. – № 4(28). – С. 96–103.
19. Ерофеенко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010. – 304 с.
20. Синицын, А.К. Метод блочной матричной прогонки для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений / А.К. Синицын // Доклады БГУИР. – 2007. – №1(17). – С. 30–33.
21. Наранович, О.И. Решение двумерного уравнения эллиптического типа методом блочной матричной прогонки / О.И. Наранович, А.К. Синицын // Доклады БГУИР. – 2007. – № 3(19). – С. 18–23.
22. Ерофеенко, В.Т. Дифракция плоской электромагнитной волны на плоском слое из биизотропного материала / В.Т. Ерофеенко, С.В. Малый // Вестник БГУ. – Сер. 1. – 2010. – № 2. – С. 11–16.
23. Ерофеенко, В.Т. Базисные электромагнитные поля в биизотропных однородных средах / В.Т. Ерофеенко, Д.П. Тавакколи // Вестник БГУ. – Сер. 1. – 2007. – № 2. – С. 56–60.

Поступила 21.09.2012

<sup>1</sup>*НИИ прикладных проблем  
математики и информатики БГУ,  
Минск, пр. Независимости, 4  
e-mail: bsu\_erofeenko@tut.by*

<sup>2</sup>*Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники,  
Минск, ул. П. Бровки, 6  
e-mail: sinitsyn@cosmostv.by*

**V.T. Erofeenko, A.K. Sinitsyn**

**SOLVING OF THE PROBLEM OF TRANSMISSION OF PLANE  
ELECTROMAGNETIC WAVES THROUGH A BIANISOTROPIC  
INHOMOGENEOUS PLATE**

A procedure of solving problem of monochromatic arbitrarily polarized electromagnetic wave passage through a planar screen of a inhomogeneous bianisotropik faradey material is developed. Characteristic dependencies of the coefficients of reflection and transmissions through the screens with various anisotropy and chiral parameters from the frequency and incidence angle are calculated.