ИНФОРМАТИКА

2015 январь-март № 1

УДК 519.95

Г.П. Волчкова, В.М. Котов

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПЛОТНЫХ РАСПИСАНИЙ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ЧИСЛЕ ПРИБОРОВ

Для задачи $Om||C_{\max}$ существует гипотеза, что в худшем случае для любого плотного расписания время завершения выполнения последней работы не более чем в $2-1/m$ раз превосходит время завершения в оптимальном расписании. Предлагается подход, который позволяет доказать гипотезу для случая $m \le 9$ и некоторых специальных случаев.

Введение

Известна следующая задача теории расписаний: множество $N=\{1, 2, \ldots, n\}$ работ выполняется в системе из $M=\{1, 2, \ldots, m\}$ приборов. Порядок прохождения приборов не задан и может быть различным для различных работ. Заданы длительности выполнения каждой работы каждым прибором. В любой момент времени каждая работа выполняется не более чем одним прибором и каждый прибор выполняет не более одной работы. Требуется построить расписание (указать для каждой пары «работа – прибор» интервал времени, в котором этот прибор выполняет данную работу), при котором минимизируется общее время обслуживания всех работ. В теории расписаний такая задача обозначается $Om\,||\,C_{\max}$.

Расписание будем искать в классе плотных расписаний, для которых прибор не может простаивать, если некоторая работа готова к выполнению на нем. Существует гипотеза [1] , что для плотного расписания *S* справедливо следующее неравенство:

$$\Delta=\frac{C_{\max}\left(S\right)}{C_{\max}\left(S^{*}\right)}\le 2-\frac{1}{m}, \qquad (1)$$

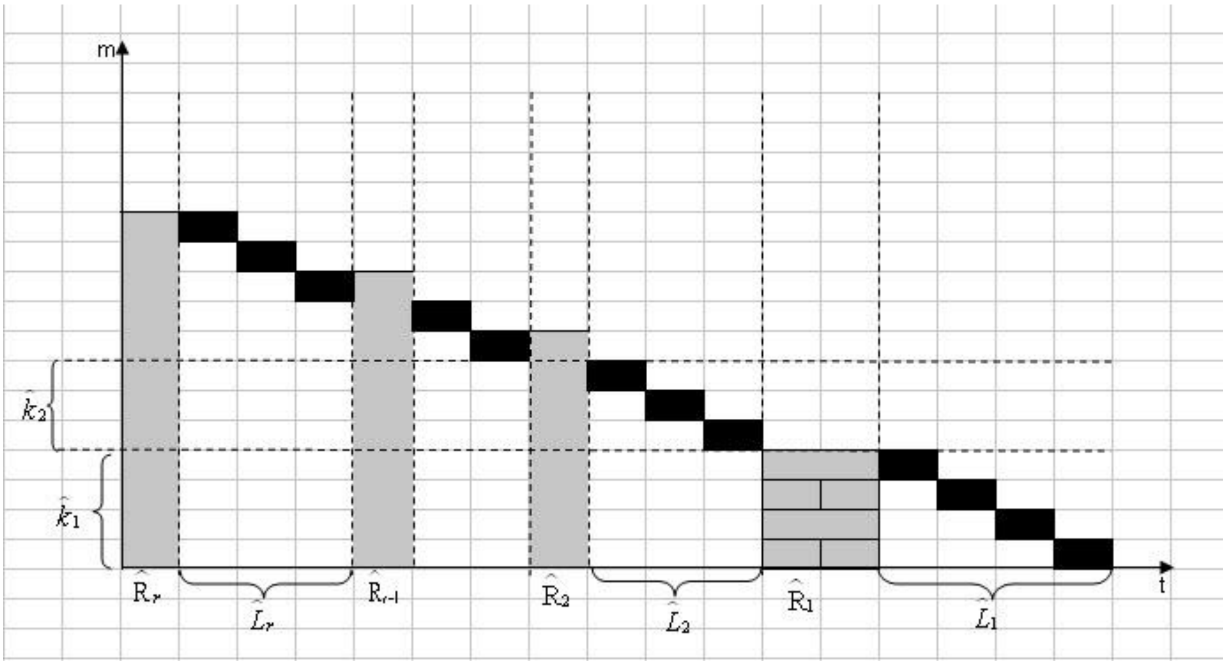
где S^{*} – оптимальное расписание в классе всех расписаний.

В работе [2] гипотеза доказана для случая, когда в расписании не более одного разрыва (определение см. ниже). Доказано, что гипотеза справедлива для $m\le 6$ [3] и $m\le 8$ [4]. В настоящей статье гипотеза доказана для $m\le 9$ и некоторых специальных случаев.

1. Определения

Под операцией (i, j) будем понимать выполнение работы *i* определенным прибором *j*, где t_{ij} – ее длительность, $i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m$. Последовательность всех операций работы *i* назовем цепочкой l_i , ее длина $l_i=\sum_{j\in M}t_{ij}$, а $l_{\max}=\max_{i\in N}(l_i)$. Загрузку j-го прибора Z_j определим как $Z_j=\sum_{i=1}^{n}t_{ij}$, $j=1,\ldots,m$, а максимальную загрузку $Z_{\max}$ – как $Z_{\max}=\max_{j=1,\ldots,m}(Z_j)$.

Рассмотрим любое плотное расписание *S*. Введем следующие обозначения. Последняя завершаемая работа в S называется *красной* (пусть это работа *k*), и она последовательно выполняется приборами $m, m-1, \ldots, 2, 1$. Временной интервал (область), когда не выполняется ни одна операция работы *k*, называется *разрывом*; нумерация разрывов осуществляется с конца. Пусть *i*-й разрыв цепочки работы *k* – R_i, а R_i – его ширина, $i=1,\ldots,r$. Временной интервал (область), в котором операции работы k выполняются без задержек, будем обозначать через $\hat{L}_i$, а его ширину – L_i, $i=1,\ldots,r$. Множество приборов в $\hat{L}_i$, которые выполняют ненулевые операции работы k, обозначим через $\hat{k}_i$, а их количество – через k_i, $i=1,\ldots,r$ (рисунок). Работы из разрыва $\hat{R}_1$ будем называть *черными*, и пусть n_1 – их количество. Суммарную длительность операций черных работ в разрывах $\hat{R}_2,\ldots,\hat{R}_r$ будем обозначать через P.



Общий вид расписания

Для набора входных данных In определим $HO(In)=\max\{l_{\max},Z_{\max}\}$ – нижнюю оценку оптимального решения. Набор входных данных In и плотное расписание S для него будем называть *контрпримером* (S,In), если

$$f(S,In)=\frac{C_{\max}(S)}{HO(In)}>2-\frac{1}{m}. \tag{2}$$

Если гипотеза не выполняется, то существует набор входных данных In и расписания S, S^* для него, такие что $\frac{C_{\max}(S)}{C_{\max}(S^*)}>2-\frac{1}{m}$. Однако $HO(In)\le C_{\max}(S^*)$, поэтому $f(S,In)\ge\frac{C_{\max}(S)}{C_{\max}(S^*)}$, т. е. (S,In) – контрпример. Следовательно, отсутствие контрпримера гарантирует справедливость гипотезы.

Контрпример будем называть приведенным, если для расписания S и набора входных данных справедливы следующие свойства:

1) первый прибор имеет максимальную загрузку;
2) цепочка красной работы имеет максимальную длину;
3) величина максимальной загрузки равна длине максимальной цепочки;
4) приборы из множества $\hat{k}_1$ простаивают в областях $\hat{L}_i$, $i=2,...,r$;
5) $t_{k1}=t_{k2}=\ldots=t_{kk_1}=x$;
6) приборы из множества $\hat{k}_1$ не простаивают в разрывах $\hat{R}_i$, $i=1,\ldots,r$;

7) хотя бы одна черная работа имеет цепочку максимальной длины;

8) все черные работы и работа k выполняются в каждой из областей L_i, $i = 2,\ldots,r$;

9) $P + k_1 R_1 \le n_1 k_1 x$;

10) k_1 черных работ не могут выполняться одновременно в интервале $[t', t''] \in R_i$, $i = 2,...,r$;

11) в области L_2 выполняются только красная и черные работы.

Рассмотрим интервал времени (область) $[t', t'']$ ширины $\Delta = t'' - t'$ в S. Под *операцией вырезания* будем понимать такое преобразование S, при котором длительность всех операций, выполняемых в интервале $[t', t'']$, уменьшается на время их выполнения в этом интервале, а все операции, выполняемые после этого интервала, сдвигаются влево на величину Δ.

2. Основные свойства

Утверждение 1. *Если существует контрпример, то существует и приведенный контрпример.*

Доказательство. Покажем, как контрпример преобразуется в приведенный контрпример:

1. Предположим, что $Z_1 < Z_{\max}$. Тогда в области L_2 существует интервал времени $[t', t'']$ шириной $\Delta = t'' - t'$, $\Delta \le Z_{\max} - Z_1$. После применения операции вырезания к этому интервалу величину x_1 увеличим на Δ. Получим расписание S', в котором загрузка Z_1' не превысила $Z_{\max}$ (увеличилась загрузка только первого прибора), длины цепочек всех работ, кроме работы k, не увеличились. Так как работа k выполнялась в интервале времени $[t', t'']$ на других приборах, то $l'_{\max}$ не превысила $l_{\max}$. При этом в S' первый прибор имеет максимальную загрузку.

2. Предположим, что в расписании S выполняется $l_k < l_{\max}$. Определим в разрыве R_1 интервал времени $[t', t'']$ шириной $\Delta = \min\{l_{\max} - l_k,\ R_1\}$. Применим операцию вырезания к этому интервалу, а длительность x_1 увеличим на величину Δ. При этом $Z'_{\max}$ не увеличилась, а длина l'_k увеличилась и стала равной $l_{\max}$. Пусть в расписании S $Z_{\max} < l_{\max}$. Определим величину $\Delta = l_{\max} - Z_{\max}$. Ширину разрыва R_r увеличим на величину Δ, добавив на каждый из m приборов операцию длительности Δ. Максимальная загрузка станет равной длине максимальной цепочки в S'.

3. Пусть $Z_1 > l_k$. Определим в разрыве R_i интервал времени $[t', t'']$ шириной $\Delta = \min\{Z_1 - l_k, R_i\}$, $i = 1,\ldots,r$. Применим операцию вырезания к этому интервалу в разрыве R_i, а длительность x_1 увеличим на Δ. Получим расписание S', в котором l'_k увеличилась на Δ. Если $l'_k < Z_1$, выполним аналогичные действия над следующим разрывом. В результате таких преобразований получим либо расписание с одним разрывом, либо расписание, у которого $Z'_1 = l'_k = Z_1$, а $f(S', In')$ увеличилась.

Пусть $Z_1 < l_k$. Величину R_r увеличим на $l_k - Z_1$. В новом расписании $Z'_1 = l_k$ и $l'_k = l_k$.

4. Пусть в одной из областей $L_2,\ldots,L_r$ прибор с номером j, $j \le k_1$, занят в интервале $[t', t'']$. Применим операцию вырезания к этому интервалу, а длительность x_j увеличим на $t'' - t'$. Получим расписание S', в котором l'_k и Z'_1 не увеличились.

5. В силу п. 1 $t_{k1} \geq t_{ki}$, $i = 2,\ldots,k_1$. Пусть существует i, такое что $t_{k1} > t_{ki}$. Рассмотрим расписание S', в котором $t'_{k,j} = x$, $j = 1,\ldots,k_1$, где $x = L_1 / k_1 < t_{k1}$. В S' загрузка $Z'_i = \sum_{j=1}^{r} R_j + x < \sum_{j=1}^{r} R_j + t_{k1} \leq Z_1$, $i = 1,\ldots,k_1$, а $l'_k = l_k$.

6. Если приборы из k_1 простаивают в областях L_i, $i = 2,...,r$, то в силу плотности расписания операции работы k могут выполняться в разрывах.

7. Пусть предпосылка в п. 7 не выполняется. Выберем из разрыва R_1 работу с цепочкой наибольшей длины среди всех черных работ $l_ч$ и положим $\Delta = l_{\max} - l_ч$. В разрыве R_2 выделим интервал $[t', t'']$ шириной $t'' - t' \leq \Delta$ и применим к нему операцию вырезания. Если $R_2 < \Delta$, то выполним аналогичные действия над следующим по порядку разрывом. Так будем действовать до тех пор, пока суммарная ширина вырезанного интервала не достигнет Δ. Затем длительности операций k_1 черных работ в разрыве R_1 увеличим на величину Δ. При таком преобразовании $l'_{\max}$ и $Z'_{\max}$ в S' не увеличились, а длина цепочки хотя бы одной черной работы станет равна $l'_{\max}$.

8. Если одна из черных или красная работа не выполняются в одной из L_i, $i = 2,\ldots,r$, то она может быть выполнена приборами из множества k_1, что противоречит п. 4.

9. Для суммарной длительности операций черных работ справедливо $n_1 \sum_{i=2}^{r} L_i + P + k_1 R_1 \leq n_1 l_k = n_1 (\sum_{i=2}^{r} L_i + k_1 x)$. Отсюда $P + k_1 R_1 \leq n_1 k_1 x$.

10. Если в некотором интервале времени в разрыве R_i, $i = 2,\ldots,r$, выполняются одновременно k_1 черных работ, то применим к такому интервалу операцию вырезания, а длительности операций этих k_1 работ в разрыве R_1 увеличим на ширину данного интервала.

11. Положим равными нулю в области L_2 длительности операций всех работ, кроме черных и красной. В полученном расписании l'_k не изменилась, а Z'_1 не увеличилась.

Пронормируем входные данные, разделив длительность каждой операции на величину $l_{\max}$. Тогда справедливо

$$Z_1 = R_1 + R_2 + \ldots + R_r + x = L_1 + L_2 + \ldots + L_r = 1; \tag{3}$$

$$L_2 + \ldots + L_r = 1 - L_1 = 1 - k_1 x. \tag{4}$$

Теорема 1. *Не существует контрпримера, для которого* $x \geq 1/m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (S, In) является контрпримером, у которого $x \geq 1/m$. Рассмотрим набор In' из m работ, причем $t'_{ij} = (1-x)/(m-1)$, $i = 1,...,m-1$, а $t'_{mj} = 1/m$, $j = 1,...,m$. Пусть S' – плотное расписание, в котором сначала без простоев выполняются работы $1,...,m-1$, а затем работа m. Тогда $C_{\max}(S') = C_{\max}(S) = 2 - x$, $Z'_{\max} = 1 - x + 1/m \leq Z_{\max}$. Поэтому если $f(S, In) > 2 - 1/m$, то $f(S', In') > 2 - 1/m$. Это противоречит тому, что $f(S', In') = 2 - x$.

Введем следующие обозначения:

NL_i – множество приборов, которые выполняют красную или черную работы в какой-то момент времени в области L_i, $i = 2,\ldots,r$;

$NL_2(t)$ – множество приборов, которые работают в L_2 в момент времени t;

$ID(t_i,t)$ – множество приборов из $NL_2(t)\cup k_1$, которые простаивают в области L_i, $i=3,\dots,r$, в момент времени t_i;

NR_2 – множество приборов из $NL_2\cup k_1$, которые не простаивают в разрыве R_2;

$NR_2(t)$ – множество приборов, которые работают в разрыве R_2 в момент времени t.

Лемма 1. *Если существует контрпример, то существует контрпример, для которого справедливо* $|ID(t_i,t)|\geq k_1+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если хотя бы один из приборов множества $NL_2(t)$ в момент времени t_i простаивает, то лемма 1 справедлива. Пусть (S,In) – приведенный контрпример, в котором все приборы из $NL_2(t)$ работают в любой момент времени в интервале L_i, $i=3,\dots,r$. Применим к этому интервалу операцию вырезания, а длительности операций красной и черных работ, выполняемых соответствующими приборами в L_2, увеличим на L_i. При этом величина l'_k не изменилась, Z'_1 не увеличилась. Последовательность таких преобразований приведет к расписанию с одним разрывом, а для таких расписаний контрпримеров не существует.

В дальнейшем будем рассматривать только наборы входных данных и расписания, которые являются приведенными контрпримерами и удовлетворяют лемме 1.

Работы из разрыва R_2, отличные от красной и черных, будем называть *синими*. Обозначим через $New(t,t_i,t_2)$ минимальное количество синих работ, которые должны выполняться приборами из $ID(t_i,t)$ в момент времени t_2 в разрыве R_2. В силу п. 10 справедливо

$$New(t,t_i,t_2)\geq\left|ID(t_i,t)\cap NR_2(t_2)\right|-(k_1-1)\,. \tag{5}$$

Пусть $m(t_i)$ – количество приборов, необходимых для выполнения работ в L_i, $i=3,\dots,r$, в момент времени t_i. Тогда

$$m(t_i)\geq n_1+1+\max_{t,t_2}\{ID(t_i,t)+New(t,t_i,t_2)\}\,. \tag{6}$$

Отметим, что в силу п. 5 $L_1=k_1x$.

Лемма 2. *Не существует контрпримера, у которого* $m<n_1+k_1+4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в одной из областей L_i, $i\geq 2$, в некоторый момент времени t_i простаивает хотя бы один прибор из множества $NR_2\setminus k_1$, то в силу леммы 1 $|ID\ (t_i,t)|\geq k_1+1$, поэтому из (5) и (6) следует $m(t_i)\geq n_1+k_1+4$.

Пусть в областях L_i, $i\geq 2$, не простаивает ни один прибор из множества $NR_2\setminus k_1$. Тогда $Z_{k_1+1}=1-(R_1+x)+1-L_1\leq 1$. Отсюда с учетом $L_1=k_1x$ и п. 9 получим $1\leq n_1\cdot x-P/k_1+(k_1+1)\cdot x$. В силу $P\geq 0$ имеем $1\leq n_1x+(k_1+1)x$. Учитывая теорему 1, $m<(n_1+k_1+1)$, что противоречит (6) в силу леммы 1 и (5).

Теорема 2. *Не существует контрпримера для* $m\leq 9$*, у которого* $k_1\geq 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $k_1+n_1\geq 6$, то из леммы 2 следует $m>9$. Противоречие.

Пусть $k_1=2$, $2\leq n_1\leq 3$. Обозначим через j_0 прибор из множества NL_2 с простоем максимальной суммарной длительности в разрыве R_2. Если в момент времени t_i в области L_i, $i\geq 3$, простаивают не менее двух приборов из $NL_2\setminus j_0$, то $|ID(t_i,t)|\geq k_1+2$. Из (5) и (6) следует, что $m(t_i)>9$.

Случай 1. $|NL_2|=n_1+1$ (ни один прибор из множества NL_2 не простаивает в области L_2).

Пусть в каждой из областей L_i, $i \ge 3$, простаивает не более одного прибора из множества $NL_2 \setminus j_0$. Если прибор $j \in NL_2 \setminus j_0$ простаивает в разрыве R_i, $i \ge 2$, то черная работа, операцию которой он выполняет в L_2, в силу плотности расписания должна выполняться в R_i. При этом в силу п. 10 в R_i в один и тот же момент времени не может выполняться более одной черной работы. Поэтому суммарный простой приборов из $NL_2 \setminus j_0$ в R_i, $i \ge 2$, не превышает P, а для суммарной загрузки приборов из $NL_2 \setminus j_0$ справедливо $(n_1-1)(1-L_1-L_2)+n_1L_2+n_1(1-(R_1+x))-$ $-P \le (n_1+1)Z_1$. Учитывая (4), $L_2 > 0$ и п. 9, получим $(n_1-1)(1-k_1x) < n_1k_1x+$ $+(n_1-k_1)(n_1x-P/k_1)+n_1x < 2n_1x+(n_1-2)n_1x+n_1x$. Это соотношение с учетом леммы 2 противоречит теореме 1 при $n_1 = 2, 3$.

Случай 2. $|NL_2| > n_1+1$.

Случай 2.1. $k_2 \ge 2$. Пусть в любой момент времени в области L_2, $i \ge 2$, простаивает не более одного прибора из k_2. Тогда для суммарной загрузки приборов из k_2 справедливо $(k_2-1)(1-L_1)+k_2(1-(R_1+x)) \le k_2$. В силу $L_1 = 2x$ имеем $(k_2-1) \le k_2(R_1+x)+2(k_2-1)x$. С учетом п. 9 получим $x \ge (k_2-1)/(2k_2-2+n_1k_2)$. Тогда при $2 \le n_1 \le 3$ получим $x \ge (k_2-1)/(5k_2-2)$, что в случае $k_2 \ge 2$ с учетом леммы 2 противоречит теореме 1.

Пусть существует момент времени t, когда простаивают приборы $j_1, j_2 \in k_2$ в области L_2 (это возможно только при $k_2 \ge 3$). Рассмотрим приборы множества $NL_2(t) \cup j_1 \cup j_2$.

Если в интервале времени $[t', t'']$ в области L_3 работает n_1+1 прибор из этого множества, то применим операцию вырезания к интервалу $[t', t'']$, а длительности операций красной и черных работ на соответствующих приборах в области L_2 увеличим на величину $t''-t'$. При этом величина l'_k не изменилась, Z'_1 не увеличилась.

Если таких интервалов в области L_3 нет, то в любой момент в области L_3 простаивают по крайней мере три прибора из $NL_2(t) \cup j_1 \cup j_2$, причем никакие два из этих трех приборов не могут одновременно простаивать в R_2 (иначе в R_2 в один и тот же момент времени будут выполняться как минимум две черные работы, что противоречит п. 10). Поэтому в L_3 в момент времени t_i с учетом п. 4 простаивают как минимум пять приборов, а новых (синих) работ, выполняющихся в R_2 в силу (5), будет как минимум три. Поэтому в силу (6) $m(t_i) > 9$. Противоречие.

Случай 2.2. $k_2 = 1$. Покажем, что существует черная работа i_1, которая выполняется в области L_2 прибором $j_1 \in NL_2$, причем прибор j_1 работает в разрыве R_2.

Пусть i_1 – одна из черных работ, которая выполняется прибором $j_1 \in NL_2$, причем этот прибор простаивает в разрыве R_2. Рассмотрим другую черную работу i_2, которая выполняется в области L_2 прибором $j_2 \in NL_2$. Прибор j_2 не может простаивать в разрыве R_2 все время, так как в этом случае две черные работы будут выполняться в R_2 в одном и том же интервале времени, что противоречит п. 10.

Если в одной из областей L_i, $i \ge 3$, в один и тот же момент времени простаивают по крайней мере два прибора с номерами k_1+1 и j_1, то $|ID(t_i, t)| \ge k_1+2$ и из (5), (6) следует, что $m(t_i) > 9$. Противоречие.

Пусть в каждой из областей L_i, $i \ge 3$ в любой момент времени простаивает не более одного прибора из приборов с номерами k_1+1 и j_1. Тогда для их суммарной загрузки справедливо $1-L_1+2(1-(R_1+x))-P\le 2Z_1$. Отсюда получим $1-L_1\le P+2R_1+2x$. В силу п. 9 верно $1-L_1\le 2n_1x+2x$. Поэтому в силу (4) верно $1-2x\le 2n_1x+2x$ и $1\le 8x$, что с учетом леммы 2 противоречит теореме 1.

Осталось рассмотреть вариант, когда $k_1=1$. В этом случае $NR_2=NL_2\cup k_1$, $R_1+x=(n_1+1)x$, любая черная работа выполняется в областях L_i и не выполняется в разрывах R_i, $i\ge 2$.

Лемма 3. *Если $NR_2=NL_2\cup k_1$, то для любых t_i, t справедливо $|ID(t_i,t)|\ge|NR_2|-n_1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В L_2 выполняются n_1+1 работы (черные и красная). Если в L_i в интервале времени $[t',t'']$ на приборах из NL_2 выполняются не менее n_1+1 работ, то применим к этому интервалу операцию вырезания, а длительности операций красной и черных работ в L_2 на соответствующих приборах увеличим на величину $\Delta=t''-t'$. Последовательность таких преобразований приведет либо к расписанию с одним разрывом, либо к расписанию требуемого вида.

Пусть $i_1, i_2,\dots, i_p$ – синие работы, операции которых выполняет первый прибор в R_2.

Лемма 4. *Если суммарная длительность операций одной из работ $i_1, i_2,\dots, i_p$ в разрыве R_2 равна R_2, то справедливо $R_2\le L_1+L_2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть суммарная длительность операций одной из работ $i_1, i_2,\dots, i_p$ в разрыве R_2 равна R_2. В силу того что операции этой работы выполняются в интервалах L_i, $i\ge 3$, в любой момент времени t_i, длина ее цепочки как минимум $1-L_1-L_2+R_2$, что противоречит п. 2 при $R_2>L_1+L_2$.

Пусть $X_3=NL_3\setminus(NL_2\cup k_1)$ – множество приборов, которые выполняют красную и черные работы в области L_3 и не выполняют их в области L_2.

Теорема 3. *Не существует контрпримера для $m\le 9$, у которого $k_1=1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $|NL_2|\ge n_1+3$, то в силу (5), (6) и леммы 3 справедливо $m(t_i)>9$. Противоречие.

Случай 1. $|NL_2|=n_1+2$.

Если $n_1\ge 3$, то в силу (5), (6) и леммы 3 справедливо $m(t_i)>9$. Противоречие.

Случай 1.1. $n_1=2$. Если существует момент времени t_i, когда в одной из областей L_i, $i\ge 3$, простаивают по крайней мере три прибора из NL_2, то $|ID(t_i,t)|\ge 4$. Поэтому из (5), (6) следует, что $m(t_i)>9$. Противоречие.

Пусть в любой момент времени t_i в каждой из областей L_i, $i\ge 3$, простаивают два прибора из NL_2, тогда $|ID(t_i,t)|=3$. Для загрузки приборов из NL_2 справедливо $4(1-(R_1+x))+2(1-L_1-L_2)+3L_2\le 4$. Отсюда $2+L_2\le 14x$, что противоречит теореме 1.

Случай 1.2. $n_1=1$. Пусть T_1– длина суммарного интервала времени в областях L_i, $i\ge 3$, когда работает хотя бы один из приборов из NL_2. Для загрузки приборов из NL_2 справедливо $2(1-(R_1+x))+2L_2+T_1\le 2$. С учетом $R_1=2x$ получим

$$T_2+L_2+2x<8x. \tag{7}$$

К интервалам в областях L_i, $i\ge 3$, где заняты приборы из NL_2, применим операцию вырезания, а длительности операций красной и черных работ после разрыва R_2 преобразуем следующим образом. Длительности операций черных работ, выполняемых приборами $NL_2\cup k_1$, полагаем равными нулю, а длительности операций красной работы полагаем равными $(T_1+L_2+2x)/3$. Получим расписание S', в котором l'_k не изменилась, Z_1 не увеличилась, а $k_1=3$, что противоречит теореме 2.

Случай 2. $|NL_2|=n_1+1$.

Случай 2.1. $n_1\ge 3$. Если существует момент времени t_i, когда в одной из областей L_i, $i\ge 3$, простаивают по крайней мере два прибора из NL_2, то $|ID(t_i,t)|\ge 3$. Поэтому с учетом (5), (6) справедливо $m(t_i)>9$. Противоречие.

Пусть в любой момент времени t_i в каждой из областей L_i, $i\ge 3$, простаивает не более одного прибора из NL_2. Тогда $|ID(t_i,t)|=2$. Для загрузки приборов из NL_2 справедливо $(n_1+1)(1-(R_1+x))+n_1(1-L_1-L_2)+(n_1+1)L_2\le n_1+1$. Учитывая $L_2>0$, получим $n_1<(n_1+1)^2x+n_1x$, что невозможно с учетом теоремы 1 и $n_1\ge 3$.

Случай 2.2. $n_1=2$. Если существует момент времени t_i, когда в одной из L_i, $i\ge 3$, простаивают все приборы из NL_2, то $|ID(t_i,t)|\ge 4$. Поэтому с учетом (5), (6) справедливо $m(t_i)>9$. Противоречие.

Если в любой момент времени t_i в каждой из областей L_i, $i\ge 3$, простаивает не более одного прибора из NL_2, то для загрузки приборов из NL_2 справедливо $3(1-(R_1+x))+2(1-L_1-L_2)+3L_2\le 3$. С учетом $R_1=2x$, $L_1=x$ справедливо $2+L_2\le x+9x$. Согласно теореме 1 не существует приведенного контрпримера, у которого $x\ge 1/m(t_i)$, что противоречит полученному неравенству.

Если существует момент времени t_i, когда в одной из L_i, $i\ge 3$, простаивают по крайней мере два прибора из NL_2, то $|ID(t_i,t)|\ge 3$. Если в этот момент времени простаивает также прибор j, $j\in X_3$, то простаивают четыре прибора. Следовательно, $m(t_i)>9$. Противоречие.

Пусть в момент времени $t_i\in L_i$, $i\ge 3$, все приборы из X_3 работают. Обозначим через I_2 суммарную ширину интервалов, в которых в областях L_i, $i\ge 3$, одновременно простаивают два прибора из NL_2. Для загрузки приборов $NL_2\cup j$ справедливо $3(1-(R_1+x))+$ $+2(1-L_1-L_2-I_2)+3L_2+1-(R_1+x)-R_2+I_2\le 4$. Отсюда $L_2+2\le 4(R_1+x)+R_2+2x$.

Если суммарная длительность операций одной из синих работ $i_1, i_2,\ldots, i_p$ в R_2 равна R_2, то с учетом леммы 4 $L_2+2\le 15x+L_2$. Согласно теореме 1 не существует контрпримера, у которого $x>1/m(t_i)$, что противоречит полученному неравенству при $n_1=2$.

Если такой синей работы нет, то в R_2 на приборах из $ID(t_i,t)\cup j$ выполняются по крайней мере четыре синие работы, поэтому $m(t_i)>9$. Противоречие.

Случай 2.3. $n_1=1$. Для загрузки приборов из NL_2 справедливо $2(1-(R_1+x))+2L_2+I_2\le 2$, $I_2+L_2+2x<6x$. Аналогично случаю 1.2 теоремы 3 получим контрпример, у которого $k_1=3$, что противоречит теореме 2.

Заключение

В статье доказано, что при $m\le 9$ для любого плотного расписания S справедливо $\Delta=\dfrac{C_{\max}(S)}{C_{\max}(S^*)}\le 2-\dfrac{1}{m}$. Доказано также, что это верно и для плотных расписаний, у которых длительность последней выполняемой операции в расписании не меньше $\max\{Z_{\max},l_{\max}\}/m$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке БРФФИ (проект № Ф13МЛД-012).

Список литературы

1. Chen, B. Approximation algorithms for three machine open shop scheduling / B. Chen, V.A. Strusevich // ORSA J. Comput. – 1993. – Vol. 5. – P. 321–326.

2. Волчкова, Г.П. К гипотезе о плотных open-shop расписаниях / Г.П. Волчкова // Вестник БГУ. Сер. 1.2. – 2004. – № 2. – С. 58–61.

3. Волчкова, Г. П. О свойстве плотных расписаний для задачи $Om||C_{max}$ / Г.П. Волчкова // Вестник БГУ. Сер. 1.2. – 2010. – № 2. – С. 127–130.

4. Open-shop dense schedules : properties and worst-case performance ratio / B. Chen [et al.] // Journal of scheduling. – 2012. – Vol. 15, no. 1. – P. 3–11.

Поступила 19.06.2014

Белорусский государственный университет,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: kotovvm@yandex.ru,
volchkovagp@mail.ru

G.P. Volchkova, V.M. Kotov

STUDYING PROPERTIES OF DENSE SCHEDULES UNDER CONDITION OF LIMITED NUMBER OF SERVICE UNITS

There is a conjecture that for any dense schedule in the problem $Om\,||\,C_{\max}$ the makespan is at most (2− 1/m) times the makespan of the optimal schedule, where “m” is the number of machines. In the paper the conjecture is proved for $m \le 9$ and some other special cases.