

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 536.75

А.М. Крот

АНАЛИЗ АТТРАКТОРОВ СЛОЖНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МАТРИЧНЫХ РЯДОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Построены матричные ряды для разложения операторов нелинейных динамических систем в пространстве состояний. Предложенные матричные разложения положены в основу нелинейного анализа широко известных аттракторов сложных динамических систем. С использованием результатов матричной декомпозиции реализовано численное интегрирование системы Лоренца на языке Java. Показано применение разработанного метода матричной декомпозиции к определению значимых управляющих параметров системы на примере аттрактора Лоренца.

Введение

Методы декомпозиции нелинейных операторов, описывающих поведение системы в пространстве состояний (фазовом пространстве), весьма важны для анализа, идентификации и моделирования нелинейных динамических систем (НДС), в особенности НДС с самоорганизацией (или сложных систем [1, 2]). В связи с этим цель настоящей статьи – построение и классификация матричных рядов, описывающих разложения векторных функций от фазовых переменных, и операторов НДС в пространстве состояний [3-5]. В этой статье также разрабатываются некоторые положения метода матричной декомпозиции, а также главные принципы анализа аттракторов сложных НДС.

1. Разложение векторной функции в матричный ряд

Механизмы возникновения пространственных и временных структур в сложных НДС могут быть выявлены из анализа системы нелинейных уравнений в частных производных вида [1]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(\{u_j\}, \{\nabla u_j\}, \{\nabla^2 u_j\}, \dots, x(t)), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где f_i – нелинейная функция; $u_i = u_i(t, \vec{r})$ – функция временной t и пространственной \vec{r} переменных, удовлетворяющая начальным условиям; ∇ – дифференциальный оператор Гамильтона. В дальнейшем не будем учитывать явную зависимость u_i от пространственного вектора \vec{r} , т.е. $u_i = u_i(t)$. В векторно-матричном виде система уравнений (1) может быть записана следующим образом:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(\vec{u}(t), x(t), \vec{u}_0), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0, \quad \vec{u}(t) \in U, \quad (2)$$

где $\vec{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))^T$; T – символ транспонирования; \vec{u}_0 – вектор начальных данных. Решение $\vec{u}(t)$ уравнения (2) задаёт некоторую кривую в пространстве состояний (фазовом пространстве) U , называемую *фазовой траекторией*.

Часто необходимо изучать поведение решения уравнения (1) вблизи конкретного стандартного состояния $\{u_i^*\}$, причём $u_i^* = u_i^*(t)$ рассматривается как невозмущённое решение (1), постоянно возмущаемое внешними воздействиями или внутренними флуктуациями на величину $v_i = v_i(t)$ [1]. В результате вместо u_i^* возникает новое решение

$$u_i = u_i^* + v_i. \quad (3)$$

Из соотношений (1) и (3) получим систему уравнений для $\{v_i\}$:

$$\frac{dv_i}{dt} = f_i(u_j^* + v_j) - f_i(u_j^*). \quad (4)$$

Вблизи начала отсчёта, т.е. при $|v_i/u_i^*| \ll 1$, можно линеаризовать функцию f_i в окрестности стандартного решения u_j^* или ее приращение Δf_i вблизи нулевых значений $v_j = 0$, используя первые члены кратного ряда Тейлора [1]:

$$\Delta f_i(v_j, u_j^*) = f_i(u_j^* + v_j) - f_i(u_j^*) \approx \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right)_{(0, \dots, 0)} v_j. \quad (5)$$

С учётом (5) соотношение (4) примет вид

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right)_{(0, \dots, 0)} v_j. \quad (6)$$

Это соотношение представляет линеаризованную (или вариационную) систему уравнений [1]. Теорема Ляпунова устанавливает связь между устойчивостью систем уравнений (2) и (6): если тривиальное решение ($v_j=0$) уравнения (6) асимптотически устойчиво, то u_j^* является асимптотически устойчивым решением уравнения (2). Систему дифференциальных уравнений (6) можно записать в матричной форме, используя линеаризованный матричный оператор $L_{N \times N}^{(1)} = [L_{ij}^{(1)}]$, где

$$L_{ij}^{(1)} = \frac{\partial f_i(0)}{\partial v_j}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Тогда получим

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = L_{N \times N}^{(1)} \vec{v}, \quad (7)$$

где \vec{v} - вектор-столбец с компонентами v_1, \dots, v_N ; $L_{N \times N}$ - квадратная ($N \times N$) матрица значений производной первых порядков векторной функции.

Чтобы записать систему нелинейных дифференциальных уравнений для отклонения от стандартного состояния в матричной форме, воспользуемся разложением векторной функции $\Delta f_i(v_1, v_2, \dots, v_N)$ в кратный ряд Тейлора с учётом предположения (3):

$$\begin{aligned} \Delta f_i(v_1, v_2, \dots, v_N, u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) &= f_i(u_1^* + v_1, u_2^* + v_2, \dots, u_N^* + v_N) - f_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right)_{(0, \dots, 0)} \cdot v_j + \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{j=k=1}^N \sum_{l=1}^N \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial v_j \partial v_k} \right)_{(0, \dots, 0)} \cdot v_j \cdot v_k + \frac{1}{3!} \sum_{j=k=l=1}^N \sum_{l=1}^N \left(\frac{\partial^3 f_i}{\partial v_j \partial v_k \partial v_l} \right)_{(0, \dots, 0)} \cdot v_j \cdot v_k \cdot v_l + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично (7) запишем (8) в матричных обозначениях [3-5]. С этой целью ядро линейного члена в разложении (8) представим следующим образом:

$$L_{ij}^{(1)} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right)_{(0, \dots, 0)} = \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \cdot f_i \right)_{(0, \dots, 0)}. \quad (9)$$

Согласно (9) каждый элемент матричного оператора $L_{N \times N}^{(1)}$ образуется путём формального перемножения элементов вектор-строки дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial \vec{v}^T} = \left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_N} \right)$ и вектор-столбца функции $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)^T$. Это означает, что матрица $L_{N \times N}^{(1)}$ может быть представлена в

виде кронекеровского произведения [3-5] вектор-строки $\frac{\partial}{\partial \vec{u}^T}$ размером $1 \times N$ и вектор-столбца \vec{f} размером $N \times 1$, вычисленного в точке $\vec{v}^T = (0, \dots, 0) = \vec{0}^T$:

$$L_{N \times N}^{(1)} = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}^T} \otimes \vec{f} \right)_{\vec{0}^T} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial v_1} \vec{f} \right)_0 \dots \left(\frac{\partial}{\partial v_N} \vec{f} \right)_0 \right], \quad (10)$$

где \otimes - символ кронекеровского произведения матриц.

Аналогично ядро квадратичного члена в разложении (8) запишем следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial v_j \partial v_k} \right)_{(0, \dots, 0)} = \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial v_k} \cdot f_i \right) \right)_{(0, \dots, 0)}. \quad (11)$$

Матрица, элементы которой образуются согласно правилу (11), записывается в виде кронекеровского произведения трёх векторов, вычисленного при $\vec{v}^T = \vec{0}^T$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}^T} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}^T} \otimes \vec{f} \right) \right)_{\vec{0}^T} = L_{N \times N^2}^{(2)}. \quad (12)$$

Заметим, что согласно построению (12) матрица $L_{N \times N^2}^{(2)}$ - это прямоугольная $(N \times N^2)$ матрица,

согласованная с вектор-столбцом размером $(N^2 \times 1)$ вида $(\vec{v} \otimes \vec{v})$, элементами которого являются $v_j v_k$ в соответствии с квадратичным членом в разложении (8). Тогда система уравнений (4), записанная в матричной форме, с учётом квадратичного члена из (8) может быть аппроксимирована следующим образом [3-5]:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \approx L_{N \times N}^{(1)} \vec{v} + \frac{1}{2!} L_{N \times N^2}^{(2)} (\vec{v} \otimes \vec{v}) = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}^T} \otimes \vec{f} \right)_{\vec{0}^T} \vec{v} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}^T} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}^T} \otimes \vec{f} \right) \right)_{\vec{0}^T} (\vec{v} \otimes \vec{v}). \quad (13)$$

Ясно, что соотношение (13) может быть обобщено для случая аппроксимации $\frac{d\vec{v}}{dt}$ членами бо-

лее высоких порядков. С учётом (4) и (13) нетрудно видеть, что приращение векторной функции в пространстве состояний разлагается в матричный ряд:

$$\Delta \vec{f}(\vec{v}, \vec{u}^*) = \vec{f}(\vec{u}^* + \vec{v}) - \vec{f}(\vec{u}^*) = L_{N \times N}^{(1)} \vec{v} + \frac{1}{2!} L_{N \times N^2}^{(2)} (\vec{v} \otimes \vec{v}) + \frac{1}{3!} L_{N \times N^3}^{(3)} (\vec{v} \otimes \vec{v} \otimes \vec{v}) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} L_{N \times N^k}^{(k)} \cdot \vec{v}^{\otimes k}, \quad (14)$$

где $L_{N \times N^k}^{(k)} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}^T} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}^T} \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}^T} \otimes \vec{f} \right) \dots \right) \right)}_k \Big|_{\vec{0}^T}$ - матричные ядра однородных нелинейных

операторов системы в пространстве состояний, $\vec{v}^{\otimes k} = (\underbrace{\vec{v} \otimes \vec{v} \otimes \dots \otimes \vec{v}}_k)$ - k -я кронекеровская

степень вектора \vec{v} . Соотношение (14) описывает *первую форму* матричного разложения.

Согласно (3) имеем $\vec{u} = \vec{u}^* + \vec{v}$. С учётом этого соотношение (14) перепишем следующим образом:

$$\vec{f}(\vec{u}) = \vec{f}(\vec{u}^*) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} L_{N \times N^k}^{(k)} \cdot (\vec{u} - \vec{u}^*)^{\otimes k}. \quad (15)$$

Ясно, что соотношение (15) описывает разложение векторной функции \vec{f} в матричный ряд вблизи стандартного решения \vec{u}^* .

Существует ещё одна векторно-матричная форма кратного ряда Тейлора, которую можно получить исходя из (8), если предположить, что независимые переменные v_j, v_k, v_l, \dots - значения функции $v(t)$ в различные моменты времени [3,5].

2. Анализ аттракторов сложных нелинейных динамических систем

Прежде всего нужно отметить, что полученные выше соотношения декомпозиции (14), (15) справедливы также для исследования НДС с дискретным временем. Пусть n – дискретное время, тогда по аналогии с (2) дискретная НДС в пространстве состояний может быть представлена в виде

$$\vec{u}[n+1] = \vec{f}(\vec{u}[n], x[n], \vec{u}_0), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0, \quad \vec{u} \in U.$$

Так как $\vec{f}(\vec{u})$ – достаточно гладкая функция, то матричное разложение (14) справедливо также и для дискретной НДС. Далее рассмотрим некоторые примеры анализа сложных НДС (как непрерывных, так и дискретных) [6].

Пример 2.1. *Аттрактор Лоренца* непрерывной сложной НДС может быть описан системой трёх обыкновенных дифференциальных уравнений [7,8] :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = au_2 - au_1; \\ \dot{u}_2 = -u_1 \cdot u_3 + cu_1 - u_2; \\ \dot{u}_3 = u_1 \cdot u_2 - bu_3, \end{cases} \quad (16)$$

где a и b – фиксированные параметры ($a=10$ и $b=8/3$), c – управляющий параметр [8] (в частности, $c=24,27$). С учетом матричных обозначений в (2) система уравнений (16) может быть представлена посредством следующих векторных функций:

$$\dot{\vec{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix}; \quad \vec{f}(\vec{u}, x(t), \vec{u}_0) = \begin{bmatrix} au_2 - au_1 \\ -u_1 \cdot u_3 + cu_1 - u_2 \\ u_1 \cdot u_2 - bu_3 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Согласно рассуждениям (3)-(5) исследуем, как данная векторная функция \vec{f} зависит от рассматриваемой переменной :

$$\vec{u} = \vec{u}^* + \vec{v}. \quad (18)$$

Учитывая (18), найдем приращение векторной функции (17) в виде

$$\begin{aligned} \Delta \vec{f}(\vec{v}, \vec{u}^*) &= \vec{f}(\vec{u}^* + \vec{v}) - \vec{f}(\vec{u}^*) = \\ &= \begin{bmatrix} au_2^* + av_2 - au_1^* - av_1 \\ -(u_1^* + v_1) \cdot (u_3^* + v_3) + cu_1^* + cv_1 - u_2^* - v_2 \\ (u_1^* + v_1) \cdot (u_2^* + v_2) - b(u_3^* + v_3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} au_2^* - au_1^* \\ -u_1^* \cdot u_3^* + cu_1^* - u_2^* \\ u_1^* \cdot u_2^* - bu_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} av_2 - av_1 \\ -u_1^* v_3 - v_1 u_3^* - v_1 v_3 + cv_1 - v_2 \\ u_1^* v_2 + v_1 u_2^* + v_1 v_2 - bv_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

Применяя матричное разложение (14) к (19), оценим следующие члены матричного ряда:

$$L_{3 \times 3}^{(1)} \vec{v} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ -u_3^* + c & -1 & -u_1^* \\ u_2^* & u_1^* & -b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} av_2 - av_1 \\ -v_1 u_3^* + cv_1 - v_2 - u_1^* v_3 \\ v_1 u_2^* + u_1^* v_2 - bv_3 \end{bmatrix}; \quad (20)$$

$$L_{3 \times 9}^{(2)}(\vec{v} \otimes \vec{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_1 v_2 \\ v_1 v_3 \\ v_2 v_1 \\ v_2^2 \\ v_2 v_3 \\ v_3 v_1 \\ v_3 v_2 \\ v_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2v_1 v_3 \\ 2v_1 v_2 \end{bmatrix}. \quad (20,a)$$

Подставляя (20) и (20,a) в (14), нетрудно заметить, что векторная функция (19) может быть аппроксимирована только линейными (20) и квадратичными (20,a) членами матричного ряда [6]:

$$\Delta \vec{f}(\vec{v}, \vec{u}^*) = L_{3 \times 3}^{(1)} \vec{v} + \frac{1}{2!} L_{3 \times 9}^{(2)}(\vec{v} \otimes \vec{v}) = \begin{bmatrix} av_2 - av_1 \\ -v_1 u_3^* + cv_1 - v_2 - u_1^* v_3 \\ v_1 u_2^* + u_1^* v_2 - bv_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -2v_1 v_3 \\ 2v_1 v_2 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Пример 2.2. Аттрактор Энона сложной дискретной НДС может быть описан системой двух нелинейных конечно-разностных уравнений вида [8,9]

$$\begin{cases} u_1[n+1] = u_2[n] + 1 - \alpha u_1^2[n]; \\ u_2[n+1] = \beta u_1^2[n], \end{cases} \quad (22)$$

где α и β - параметры (например, $\alpha = 1,4$ и $\beta = 0,3$ [8]). По аналогии с (18), (19) можно найти $\Delta \vec{f}$:

$$\Delta \vec{f}(\vec{v}, \vec{u}^*) = \vec{f}(\vec{u}^* + \vec{v}) - \vec{f}(\vec{u}^*) = \begin{bmatrix} u_2^* + v_2 + 1 - \alpha(u_1^* + v_1)^2 \\ \beta u_1^* + \beta v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2^* + 1 - \alpha u_1^{*2} \\ \beta u_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 - 2\alpha u_1^* v_1 - \alpha v_1^2 \\ \beta v_1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Очевидно, векторная функция (23) может быть полностью аппроксимирована с помощью линейных и квадратичных членов матричного ряда:

$$L_{2 \times 2}^{(1)} \vec{v} = \begin{bmatrix} -2\alpha u_1^* & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha u_1^* v_1 + v_2 \\ \beta v_1 \end{bmatrix}; \quad (24)$$

$$L_{2 \times 4}^{(2)}(\vec{v} \otimes \vec{v}) = \begin{bmatrix} -2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_1 v_2 \\ v_2 v_1 \\ v_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha v_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (24,a)$$

Действительно, в соответствии с (23), (24), (24,a) следующее уравнение является тождеством [6]:

$$\Delta \vec{f}(\vec{v}) = L_{2 \times 2}^{(1)} \vec{v} + \frac{1}{2!} L_{2 \times 4}^{(2)}(\vec{v} \otimes \vec{v}).$$

Заметим, что $\det L_{2 \times 2}^{(1)} = -\beta$ является якобианом [8]. Учитывая, что $|\beta| < 1$ (в частности, $\beta = 0,3$), получаем хорошо известный эффект сокращения во времени объема потока фазовых траекторий в пространстве состояний сложной НДС [1,2,8].

Пример 2.3. *Аттрактор Рёсслера* непрерывной сложной НДС описывается системой трёх обыкновенных дифференциальных уравнений [2,8] :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -u_2 - u_3; \\ \dot{u}_2 = u_1 + au_2; \\ \dot{u}_3 = b + u_1 \cdot u_3 - cu_3, \end{cases} \quad (25)$$

где a , b и c – некоторые параметры (например, если $a = b = 0,2$, $c = 5,7$, то решения уравнений описывают хаотическое поведение [8]). С использованием матричного обозначения (2) система уравнений (25) может быть представлена с помощью следующей векторной функции:

$$\vec{f}(\vec{u}) = \begin{bmatrix} -u_2 - u_3 \\ u_1 + au_2 \\ b + u_1 \cdot u_3 - cu_3 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Принимая во внимание (18), найдем приращение векторной функции (26):

$$\begin{aligned} \Delta \vec{f}(\vec{v}, \vec{u}^*) &= \vec{f}(\vec{u}^* + \vec{v}) - \vec{f}(\vec{u}^*) = \\ &= \begin{bmatrix} -u_2^* - v_2 - u_3^* - v_3 \\ u_1^* + v_1 + au_2^* + av_2 \\ b + (u_1^* + v_1) \cdot (u_3^* + v_3) - cu_3^* - cv_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -u_2^* - u_3^* \\ u_1^* + au_2^* \\ b + u_1^* \cdot u_3^* - cu_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 - v_3 \\ v_1 + av_2 \\ u_1^* v_3 + v_1 u_3^* + v_1 v_3 - cv_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Применяя матричное разложение (14) к (27), получим следующие члены матричного ряда:

$$L_{3 \times 3}^{(1)} \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ u_3^* & 0 & u_1^* - c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 - v_3 \\ v_1 + av_2 \\ u_3^* v_1 + u_1^* v_3 - cv_3 \end{bmatrix}; \quad (28)$$

$$L_{3 \times 9}^{(2)} (\vec{v} \otimes \vec{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_1 v_2 \\ v_1 v_3 \\ v_2 v_1 \\ v_2^2 \\ v_2 v_3 \\ v_3 v_1 \\ v_3 v_2 \\ v_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 v_3 + v_3 v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2v_1 v_3 \end{bmatrix}. \quad (28,a)$$

Подставляя (28) и (28,a) в (14), нетрудно видеть, что векторная функция (27) может быть полностью аппроксимирована только линейными (28) и квадратичными (28,a) членами [6]:

$$\Delta \vec{f}(\vec{v}, \vec{u}^*) = L_{3 \times 3}^{(1)} \vec{v} + \frac{1}{2!} L_{3 \times 9}^{(2)} (\vec{v} \otimes \vec{v}) = \begin{bmatrix} v_2 - v_3 \\ v_1 + av_2 \\ u_3^* v_1 + u_1^* v_3 - cv_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2v_1 v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 - v_3 \\ v_1 + av_2 \\ u_3^* v_1 + (u_1^* - c + v_1) v_3 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Сравнивая (29) с (27), получим тождество.

Пример 2.4. *Аттрактор Фитц-Хью* непрерывной сложной НДС описывается системой двух дифференциальных уравнений [10,11] :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = cu_1 - \frac{c}{3} u_1^3 + cu_2 + cg; \\ \dot{u}_2 = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} u_2 - \frac{1}{c} u_1, \end{cases} \quad (30)$$

где g - бифуркационная характеристика; a, b, c параметры сложной НДС, описывающей активную среду (в частности, $a = 0,7, b = 0,8, c = 3,0$).

Аналогично примерам 2.1 и 2.2 можно показать, что векторная функция для этого аттрактора (30) может быть полностью аппроксимирована линейными, квадратичными и кубическими членами:

$$\vec{\Delta f}(\vec{v}, \vec{u}^*) = L_{2 \times 2}^{(1)}(\vec{u}^*)\vec{v} + \frac{1}{2!} L_{2 \times 4}^{(2)}(\vec{u}^*)(\vec{v} \otimes \vec{v}) + \frac{1}{3!} L_{2 \times 8}^{(3)}(\vec{u}^*)(\vec{v} \otimes \vec{v} \otimes \vec{v}), \quad (31)$$

где

$$\vec{\Delta f}(\vec{v}, \vec{u}^*) = \begin{bmatrix} -cv_1 - c(u_1^{*2} v_1 + u_1^* v_1^2 + \frac{1}{3} v_1^3) + cv_2 \\ \frac{b}{c} v_2 - \frac{1}{c} v_1 \end{bmatrix}; \quad (32)$$

$$L_{2 \times 2}^{(1)}(\vec{u}^*) = \begin{bmatrix} -c - cu_1^{*2} & c \\ -\frac{1}{c} & \frac{b}{c} \end{bmatrix}; \quad (32,a)$$

$$L_{2 \times 4}^{(2)}(\vec{u}^*) = \begin{bmatrix} -2cu_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (32,b)$$

$$L_{2 \times 8}^{(3)}(\vec{u}^*) = \begin{bmatrix} -2c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (32,v)$$

3. Численный анализ аттрактора Лоренца посредством матричной декомпозиции

Универсальным и единственно возможным методом исследования сложных НДС, описываемых посредством систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, является метод конечных разностей, или метод сеток [12]. Лоренц [7] исследовал конвективное движение жидкости в эксперименте Бенара путем численного решения соответствующих дифференциальных уравнений. Для математического моделирования этого движения он использовал весьма упрощенную модель, описываемую системой трех обыкновенных, но нелинейных дифференциальных уравнений вида (16), в которых $a = Pr$ - число Прандтля, b - безразмерная величина, характеризующая систему, c - внешний управляющий (или бифуркационный) параметр, пропорциональный разности температур ΔT : $c = Ra/Ra_c \sim \Delta T$, причем Ra - число Рэлея [13], а Ra_c - его критическое значение.

В уравнениях (16) переменная u_1 пропорциональна скорости циркулирующей жидкости, u_2 характеризует разность температур между восходящими и нисходящими потоками жидкости, u_3 пропорциональна отклонению вертикального профиля температуры от равновесного значения.

Поскольку в общем случае модель Лоренца не интегрируема, её решения могут быть найдены с помощью численных методов, если зафиксировать три параметра a, b и c , зависящих от времени t . Стационарные решения (16) по определению таковы, что

$$\dot{u}_1 = \dot{u}_2 = \dot{u}_3 = 0,$$

откуда непосредственно следует, что

$$u_2 = u_1; \quad u_3 = \frac{1}{b} u_1^2; \quad u_1 = \pm [b(c-1)]^{1/2}.$$

При значениях $0 \leq c \leq 1$ существует только одно решение, описывающее чисто теплопроводящее состояние, т.е. состояние теплопроводности без движения жидкости ($c \rightarrow 1$):

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0.$$

Когда параметр c становится больше 1, то это решение теряет устойчивость. Возникают два стационарных решения, соответствующих движущимся валам:

$$u_1 = u_2 = \pm [b(c-1)]^{1/2}; \\ u_3 = c - 1.$$

В результате получаем бифуркацию типа вилки, при которой устойчивая неподвижная точка рождает две другие неустойчивые неподвижные точки [8]. Этот результат следует из инвариантности системы (16) относительно симметрии:

$$(u_1, u_2, u_3) \rightarrow (-u_1, -u_2, -u_3).$$

Достаточно простые вычисления подтверждают, что два решения при значениях $c \geq 1$ являются линейно независимыми. Физически они соответствуют наступлению конвекции, при этом каждое из них связано с одним из двух возможных направлений вращения валов. Они теряют устойчивость при $c = 24,74$, причем каждое решение претерпевает субкритическую бифуркацию Хопфа [1,2,8]. При бифуркации Хопфа наблюдается гистерезис, а при значениях параметра r от 24,06 до 24,74 существуют три аттрактора: два стационарных решения и «странный» аттрактор, который иногда называют «нестандартным» [8]. При значениях $c \in [24,74; 30,1]$ только «странный» аттрактор составляет устойчивое решение системы (16).

Используя приведённые выше результаты, полученные методами матричной декомпозиции системы Лоренца, с помощью языка программирования Java было реализовано численное интегрирование системы Лоренца трёх обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с параметрами $a = 10$; $b = 8/3$; $c = 24,27$. Разработанная программа также воспроизводит изображение аттрактора Лоренца в проекции на двумерную плоскость (рис.1). Данная программа обозначает различными цветами области, соответствующие разным режимам движения точки по аттрактору: розовым цветом прорисовываются те участки, где ускорение движения точки положительное, а желтым и зеленым – где оно отрицательное (при этом зеленый цвет соответствует большому замедлению).

Как указывалось в примере 2.1, в матричных обозначениях система уравнений (16) может быть описана посредством векторных функций (17). Используя результаты матричной декомпозиции (19)-(21), находим, что приращение векторной функции (17) аппроксимируется только линейным и квадратичным членами. Принимая во внимание тот факт, что значения производных первого и второго порядков могут быть вычислены посредством численных методов (например, метода Рунге-Кутты), оценим $\Delta \vec{f}^{est}(\vec{v}, \vec{u}^*)$ из вычислительного эксперимента.

В результате нетрудно найти из (21) значения параметров аттрактора Лоренца:

$$a = \frac{\Delta f_1^{est}}{v_2 - v_1}; \quad (33)$$

$$c = \frac{\Delta f_2^{est} + v_1 u_3^* + v_2 + (u_1^* + v_1) \cdot v_3}{v_1}; \quad (33,a)$$

$$b = - \frac{\Delta f_3^{est} - v_1 u_2^* - (u_1^* + v_1) \cdot v_2}{v_3} \quad (33,6)$$

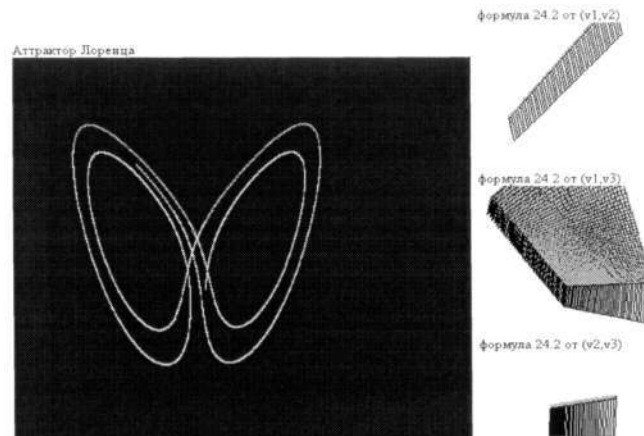


Рис. 1. Численный анализ аттрактора Лоренца на основе матричной декомпозиции

Очевидно, что значения параметров a , b и c зависят от времени, поскольку величины $v_j(t)$ являются функциями времени. Соотношения (33)-(33,6) могут быть положены в основу алгоритма идентификации текущего динамического состояния конвективной жидкости; в частности, соотношение (33,а) определяет значение управляющего параметра, позволяющего выявить хаотические режимы движения конвективной жидкости.

Заключение

Несмотря на то, что теория сложных НДС интенсивно развивается в течение последних десятилетий, интерес к ней не ослабевает и в настоящее время, свидетельством чему являются последние издания [14-16].

Разработанный в этой статье метод анализа аттракторов сложных НДС на основе матричного ряда в пространстве состояний использовался для нахождения значений характеристических параметров, описывающих динамическое состояние сложных НДС (в настоящей статье это показано на примере сложной НДС с аттрактором Лоренца). Предложенный подход может быть взят за основу построения алгоритма идентификации текущего динамического состояния сложной НДС.

Список литературы

1. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. – М.: Мир, 1979. – 512с.
2. Хакен Г. Синергетика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980.- 404с.
3. Krot A.M. Matrix decompositions of vector functions and shift operators on the trajectories of a nonlinear dynamical system // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. - 2001. - Vol. 4. - N2.- P. 106-115.
4. Krot A.M. Chaotic dynamic methods based on decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space // Proc. 10th Mediterranean Electrotechnical Conference (Melecon 2000). Lemesos, Cyprus, May 29-31, 2000. - Vol.2. - P.643-646.

5. Krot A.M. The decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space of nonlinear dynamic system //Proc. X European Signal Processing Conference (EUSIPCO-2000), Tampere, Finland, September 4-8, 2000. - Vol.3. - P.2453-2456.
6. Krot A.M. Application of expansion into matrix to analysis of attractors of complex nonlinear dynamical systems //Proc. 14th International Conference on Digital Signal Processing (DSP-2002), Santorini, Greece, July 1-3, 2002. - P.959-962.
7. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of Atmospheric Sciences. – 1963. - Vol. 20. - P. 130 -141.
8. Берже П., Помо И., Видадь К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. – М.: Мир, 1991. - 368 с.
9. Henon M. Communications in Mathematical Physics, 1976. - Vol. 50. - P.69.
10. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane //Biophys. J. – 1961. - Vol.1. - P.445-446.
11. Nagumo J.S., Arimoto S., Yoshisawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc.IRE. – 1962. - Vol.50. - P.2061-2070.
12. Самарский А.А, Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978. – 591 с.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
14. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. - М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
15. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. – Springer-Verlag: NY, Berlin etc., 1990.
16. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем. – Мн.: Дизайн ПРО, 1997. – 640 с.

Поступила 19.01.04

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова 6
e-mail: alxkrot@newman.bas-net.by*

A.M. Krot

ANALYSIS OF ATTRACTORS OF COMPLEX DYNAMICAL SYSTEMS BASED ON MATRIX SERIES INTO STATE-SPACE

The new method for analysis of attractors of complex nonlinear dynamical systems (NDS), whose well-known examples are Lorenz, Henon, Rossler, FitzHugh attractors based on proposed matrix series in a state space (or phase space) has been developed. The proposed method implementation allowed to develop a program module on the basis of JAVA for the quantitative analysis of Lorenz attractors. This paper shows an application of the matrix decomposition method to determination of values of control parameters of NDS for example of Lorenz attractor. Unlike of traditional approaches, the proposed method for analysis of attractors of complex NDS has not only qualitative character, but the quantitative one and it is an effective tool for diagnostics and identification of states of dynamical objects.