ИНФОРМАТИКА

2005 октябрь-декабрь № 4

ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

УДК 519.7

Ю.В. Поттосин, Е.А. Шестаков

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПО ЗАДАННЫМ ВХОДНЫМ ФУНКЦИЯМ*

Предлагается метод разложения (декомпозиции) системы полностью определенных булевых функций в суперпозицию, состоящую из двух систем. При этом считается, что одна из систем, функции которой являются аргументами другой, задана. Метод основан на использовании аппарата покрытий троичной матрицы.

Введение

Обычно под декомпозицией системы булевых функций понимают ее представление в виде суперпозиции нескольких систем [1–9]. При этом из множества возможных суперпозиций выбирается та, которая наилучшим образом удовлетворяет определенным условиям. Эти условия определяются технологическими ограничениями микроэлектронной базы СБИС. Чаще всего рассматриваются простые суперпозиции, состоящие из двух систем: подчиненной и главной. Аргументами подчиненной системы является подмножество аргументов исходной системы. Главная система содержит в качестве аргументов как функции подчиненной системы, так и подмножество аргументов исходной системы. Как главная, так и подчиненная системы в такой суперпозиции заранее неизвестны и находятся в ходе решения задачи декомпозиции. Реже рассматриваются декомпозиции, в которых одна из систем известна. Так, например, в работе [10] предлагается метод построения декомпозиции, в которой известна главная система.

В предлагаемой работе рассматривается задача разложения (декомпозиции) исходной системы, в ходе решения которой ищется суперпозиция, также состоящая из двух систем: подчиненной и главной, причем подчиненная система заранее известна. Метод решения этой задачи основан на аппарате покрытий троичных матриц [4, 5, 8, 9], который успешно используется для решения задач декомпозиции. Этот подход близок к способу решения декомпозиционных задач, предложенному в работах [6, 7].

1. Основные определения, постановка задачи

Пусть система булевых функций задана как векторная функция $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \dots, f_m(\boldsymbol{x}))$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Положим $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, и пусть W, Z являются подмножествами множества X, возможно, пересекающимися. Пусть также из булевых переменных, входящих в подмножества W и Z, составлены векторные переменные $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{z}$. Положим, что $\boldsymbol{w}^*$, $\boldsymbol{z}^*$ и $\boldsymbol{x}^*$ являются значениями векторных переменных $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{x}$ соответственно. Будем говорить, что значения $\boldsymbol{w}^*$ и $\boldsymbol{z}^*$ связаны со значением $\boldsymbol{x}^*$, если вектор $\boldsymbol{w}^*$ составлен из компонент вектора $\boldsymbol{x}^*$, являющихся значениями булевых переменных из подмножества W, а $\boldsymbol{z}^*$ – из компонент $\boldsymbol{x}^*$, являющихся значениями булевых переменных из подмножества Z.

Рассмотрим суперпозицию систем полностью определенных функций $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w})$, где $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}) = (h_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}), h_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}), \dots, h_m(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}))$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}) = (g_1(\boldsymbol{w}), g_2(\boldsymbol{w}), \dots, g_q(\boldsymbol{w}))$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_q)$.

Далее поставим следующую задачу декомпозиции системы булевых функций.

Для систем булевых функций $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w})$ необходимо найти систему $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$, если она существует, такую, что $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$, т. е. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}^*), \boldsymbol{z}^*)$ для любого $\boldsymbol{x}^*$, где векторы

* Работа частично поддержана МНТЦ, проект B-986.

$\boldsymbol{w}^*$, $\boldsymbol{z}^*$ составлены из компонент вектора $\boldsymbol{x}^*$. При этом мощность подмножества Z, равная числу компонент векторной переменной $\boldsymbol{z}$, минимальна и удовлетворяет неравенству $|Z| + q < n$, где q – число компонент векторной переменной $\boldsymbol{u}$, n – число элементов множества X.

Подобная задача, но в более общем виде решается в работе [3]. Там при заданных системах $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w})$ надо найти систему $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, где вектор $\boldsymbol{u}'$ является частью вектора $\boldsymbol{u}$, и требуется оптимально выбрать компоненты из $\boldsymbol{u}$, которые составили бы вектор $\boldsymbol{u}'$.

2. Покрытие троичной матрицы, произведение покрытий

Пусть система булевых функций $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задана парой матриц U, V, представляющей систему дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) [1]. Элементами троичной матрицы U являются 0, 1 и «–». Эта матрица имеет размерность $l \times n$, ее столбцы помечены переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$, а строки представляют элементарные конъюнкции. Матрица V является булевой, она имеет размерность $l \times m$, ее столбцы помечены переменными $y_1, y_2, \dots, y_m$ и показывают принадлежность элементарных конъюнкций различным ДНФ.

Рассмотрим троичный вектор $\boldsymbol{a}$, компонентами которого являются 0, 1, «–», и булев вектор $\boldsymbol{b}$. Будем говорить, что троичный вектор $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ поглощает булев вектор $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, если $\boldsymbol{b}$ можно получить из $\boldsymbol{a}$ заменой символов «–» на 0 или 1. Отдельные строки троичной матрицы можно рассматривать как троичные векторы, обладающие свойством поглощения булевых векторов.

Обозначим через $L = \{1, 2, \dots, l\}$ множество номеров строк матриц U, V, а символом $t(\boldsymbol{x}^*, U)$ – множество номеров строк матрицы U, поглощающих булев вектор $\boldsymbol{x}^*$.

Семейство $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p\}$ различных подмножеств (блоков) множества L, объединение которых совпадает с L, называется покрытием троичной матрицы U [4, 5, 8–10], если для любого значения $\boldsymbol{x}^*$ векторной переменной $\boldsymbol{x}$ существует блок в семействе π, равный $t(\boldsymbol{x}^*, U)$. Другие подмножества множества L не присутствуют в π. Всякому блоку π_i $(1 \le i \le p)$ поставлена в соответствие булева функция $\pi_i(\boldsymbol{x})$, которая при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ принимает значение 1, если и только если $t(\boldsymbol{x}^*, U) = \pi_i$. Если существует значение $\boldsymbol{x}^*$, которое не поглощается ни одной из строк матрицы U, то один из блоков π_j покрытия π является пустым множеством $(\pi_j = \varnothing)$. В этом случае $\pi_j(\boldsymbol{x}^*) = 1$. В качестве блока покрытия может выступать и само множество L.

Выделим из матрицы U подматрицы U^1, U^2 и U^3, которые состоят из столбцов матрицы U, помеченных соответственно переменными из подмножеств W, Z и $W \cup Z$. Обозначим через π^1, π^2, π^3 покрытия матриц U^1, U^2, U^3 соответственно, а через $\boldsymbol{x}'$ – векторную переменную, компонентами которой являются переменные из множества $W \cup Z$.

Пусть $\pi^1 = \{\pi^1{}_1, \pi^1{}_2, \dots, \pi^1{}_q\}$, $\pi^2 = \{\pi^2{}_1, \pi^2{}_2, \dots, \pi^2{}_r\}$ и $\pi^3 = \{\pi^3{}_1, \pi^3{}_2, \dots, \pi^3{}_s\}$. Образуем множество $\lambda = \{\pi^1{}_i \cap \pi^2{}_j \,/\, \pi^1{}_i \in \pi^1,\ \pi^2{}_j \in \pi^2,\ \pi^1{}_i(\boldsymbol{w}) \wedge \pi^2{}_j(\boldsymbol{z}) \ne 0\}$. Каждому элементу λ_{ij} $(1 \le i \le q$, $1 \le j \le r)$ сопоставим булеву функцию $\lambda_{ij}(\boldsymbol{x}') = \pi^1{}_i(\boldsymbol{w}) \wedge \pi^2{}_j(\boldsymbol{z})$. Построим покрытие π', взяв в качестве его блоков все различные элементы множества λ. Для каждого блока π'_k покрытия π' определим булеву функцию $\pi'_k(\boldsymbol{x}')$ как дизъюнкцию всех булевых функций, которые приписаны элементам множества λ, равным π'_k. Назовем покрытие π' произведением покрытий π^1 и π^2 $(\pi' = \pi^1 \times \pi^2)$. Как показано в работах [4, 5, 9, 10], справедливо равенство $\pi^3 = \pi' = \pi^1 \times \pi^2$. Произведение покрытий коммутативно, ассоциативно и идемпотентно.

Операция произведения покрытий дает способ вычисления покрытия для любой троичной матрицы [4, 5, 9, 10], который заключается в следующем.

Рассмотрим матрицу I^i $(1 \le i \le n)$, представляющую собой один столбец, совпадающий с i-м столбцом матрицы U. Покрытие такой матрицы γ^i является *тривиальным* и состоит из двух блоков $\gamma^i{}_0$ и $\gamma^i{}_1$. Блоку $\gamma^i{}_0$ принадлежат номера строк, содержащих 0 и «–», и приписывается булева функция $\gamma^i{}_0(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_i$, а блоку $\gamma^i{}_1$ – номера строк, содержащих «–» и 1, и приписывается булева функция $\gamma^i{}_1(\boldsymbol{x}) = x_i$. Если все элементы матрицы I^i имеют значения «–», то $\gamma^i{}_0 = \gamma^i{}_1 = L$. Положим, что в этом случае покрытие $\gamma^i = \{L\}$ и этому единственному блоку покрытия приписана булева функция, равная логической единице. Тогда для покрытия π троичной матрицы U справедливо равенство $\pi = \gamma^1 \times \gamma^2 \times \ldots \times \gamma^n$.

3. Компактная таблица и способы ее преобразования

Если $X = W \cup Z$, то по тройке (π^1, π^2, V) можно построить таблицу, называемую в работе [8] компактной, которая задает исходную систему булевых функций $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Строкам этой таблицы приписаны булевы функции $\pi^1{}_1(\boldsymbol{w}), \pi^1{}_2(\boldsymbol{w}), \ldots, \pi^1{}_k(\boldsymbol{w})$, а столбцам – булевы функции $\pi^2{}_1(\boldsymbol{z}), \pi^2{}_2(\boldsymbol{z}), \ldots, \pi^2{}_r(\boldsymbol{z})$. Элемент m_{ij} таблицы принимает значение «*», если $\pi^1{}_i(\boldsymbol{w}) \wedge \pi^2{}_j(\boldsymbol{z}) = 0$, где строке с номером i таблицы приписана булева функция $\pi^1{}_i(\boldsymbol{w})$, а столбцу с номером j – булева функция $\pi^2{}_j(\boldsymbol{z})$. Если $\pi^1{}_i(\boldsymbol{w}) \wedge \pi^2{}_j(\boldsymbol{z}) \neq 0$, то элемент m_{ij} является значением векторной переменной $\boldsymbol{y}$. Это значение равно покомпонентной дизъюнкции строк булевой матрицы V, номера которых содержатся в подмножестве $\pi^1{}_i \cap \pi^2{}_j$. Если $\pi^1{}_i \cap \pi^2{}_j = \varnothing$, то значение m_{ij} является нулевым, т. е. состоит из одних нулевых компонент.

Некоторые из строк и столбцов компактной таблицы, удовлетворяющие определенным условиям, можно совмещать или, наоборот, расщеплять. При этом вновь полученная таблица также будет задавать исходную систему. Рассмотрим условия совмещения и расщепления строк компактной таблицы более подробно.

Две строки компактной таблицы с номерами s и t ($1 \leq s \leq k$, $1 \leq t \leq k$, $s \neq t$) совместимы [8], если и только если в таблице не существует столбца такого, что значения элементов таблицы, находящихся на пересечении этого столбца с данными строками, отличны от «*» и различны.

Подмножество строк компактной таблицы совместимо, если и только если совместима любая пара строк, входящая в это подмножество. Совместимое подмножество строк компактной таблицы можно заменить одной строкой. Элемент этой строки, расположенный на пересечении с j-м столбцом, принимает значение «*», если все элементы компактной таблицы, находящиеся на пересечении строк данного подмножества с j-м столбцом, имеют значение «*». Иначе этот элемент принимает то значение, отличное от «*», которое имеет хотя бы один элемент на пересечении j-го столбца с одной из строк из данного подмножества. Заметим, что значения всех элементов, расположенных на пересечении рассматриваемых совместимых строк с j-м столбцом и отличных от значения «*», равны. Полученной таким образом строке приписывается булева функция, которая получается дизъюнкцией булевых функций, приписанных строкам, входящим в рассматриваемое подмножество. Вновь полученная строка приписывается к компактной таблице, а все строки, входящие в подмножество совместимых строк, из компактной таблицы удаляются. Полученная компактная таблица также будет задавать систему $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Строку с номером s компактной таблицы можно расщепить на две, если булева функция $\pi^1{}_s(\boldsymbol{w})$, приписанная этой строке, может быть представлена в виде дизъюнкции двух функций: $\pi^1{}_s(\boldsymbol{w}) = \pi^1{}_{s1}(\boldsymbol{w}) \vee \pi^1{}_{s2}(\boldsymbol{w})$, где $\pi^1{}_{s1}(\boldsymbol{w}) \wedge \pi^1{}_{s2}(\boldsymbol{w}) = 0$. Первой из двух строк, полученных в результате расщепления, присваивается булева функция $\pi^1{}_{s1}(\boldsymbol{w})$, второй – булева функция $\pi^1{}_{s2}(\boldsymbol{w})$. Положим, что на пересечении строки s с j-м столбцом компактной таблицы находится элемент m_{sj}. Если $\pi^1{}_{s1}(\boldsymbol{w}) \wedge \pi^2{}_j(\boldsymbol{w}) = 0$, то элемент первой из строк, находящийся на пересечении с j-м столбцом компактной таблицы, принимает значение «*». Если $\pi^1{}_{s1}(\boldsymbol{w}) \wedge \pi^2{}_j(\boldsymbol{w}) \neq 0$, то этот элемент принимает значение m_{sj}. Если $\pi^1{}_{s2}(\boldsymbol{w}) \wedge \pi^2{}_j(\boldsymbol{w}) = 0$, то элемент второй строки, находящийся на пересечении с j-м столбцом компактной таблицы, также принимает значение «*». Если $\pi^1{}_{s2}(\boldsymbol{w}) \wedge \pi^2{}_j(\boldsymbol{w}) \neq 0$, то этот элемент принимает значение m_{sj}. Нетрудно показать, что после такого преобразования компактная таблица также будет задавать исходную систему.

Точно так же, как это было сделано для строк, можно ввести операции совмещения и расщепления столбцов компактной таблицы.

4. Метод декомпозиции

Метод декомпозиции, предлагаемый в настоящей работе, состоит в следующем. Полагаем, что $Z = X$. По системам $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w})$ строим тривиальную компактную таблицу, задающую систему $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Затем посредством применения операций расщепления и совмещения строк этой таблицы удаляем из подмножества Z по одному все несущественные аргументы, если такие имеются. В результате получим таблицу, по которой легко находится система булевых функций $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$ искомой декомпозиции. Если полученная декомпозиция удовлетворяет условиям задачи, т. е. $|Z| + q < n$, где q – число компонент векторной переменной $\boldsymbol{u}$, n – число переменных в X, то она является ее решением. Иначе рассматриваемая задача декомпозиции решения не имеет.

Формирование тривиальной компактной таблицы. Пусть исходная система $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задана матрицами U и V, а $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\}$ является покрытием матрицы U. Тогда пара (π, V) также задает эту систему. Действительно, чтобы вычислить для заданного значения $\boldsymbol{x}^*$ векторной переменной $\boldsymbol{x}$ значение $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$, необходимо выполнить покомпонентную дизъюнкцию строк матрицы V, номера которых находятся в множестве $t(\boldsymbol{x}^*, U)$. Это множество совпадает с одним из блоков π_i покрытия π, причем $\pi_i(\boldsymbol{x}^*) = 1$. Все блоки в покрытии π различны, поэтому блок $\pi_i = t(\boldsymbol{x}^*, U)$ в покрытии π единственный. Соответственно среди булевых функций, приписанных блокам покрытия π, существует единственная булева функция $\pi_i(\boldsymbol{x})$, такая, что $\pi_i(\boldsymbol{x}^*) = 1$. Таким образом, каждому блоку π_i покрытия π, где $1 \le i \le k$, придадим некоторое значение $\boldsymbol{y}_i$ векторной переменной $\boldsymbol{y}$, удовлетворяющее условию $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$, если $\pi_i(\boldsymbol{x}^*) = 1$.

Положим, что система булевых функций $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w})$ задана троичной матрицей H и булевой матрицей E. Обозначим через $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r\}$ покрытие матрицы H. Тогда пара (ρ, E) задает систему $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w})$. Соответственно каждому блоку ρ_j покрытия ρ $(1 \le j \le r)$ придадим значение $\boldsymbol{u}_j$, удовлетворяющее условию $\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}^*)$, если $\rho_j(\boldsymbol{w}^*) = 1$.

Зададим на множестве блоков покрытия ρ разбиение α. Будем считать, что два блока ρ_s и ρ_t $(1 \le s \le r, 1 \le t \le r, s \ne t)$ принадлежат одному классу разбиения, если и только если $\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{u}_t$. Положим, что число классов в разбиении α равно d. Всем блокам покрытия ρ, входящим в j-й класс разбиения α $(1 \le j \le d)$, приписано одно и то же значение векторной переменной $\boldsymbol{u}$, которое обозначим через $\boldsymbol{u}'_j$. Построим по покрытию ρ и разбиению α покрытие $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d\}$. Блок φ_j $(1 \le j \le d)$ этого покрытия равен объединению блоков, входящих в j-й класс разбиения. Булева функция $\varphi_j(\boldsymbol{w})$ равна дизъюнкции булевых функций, приписанных блокам, которые входят в j-й класс разбиения. Блоку φ_j покрытия φ придадим значение $\boldsymbol{u}'_j$. Заметим, что покрытие φ вместе с приписанными его блокам значениями векторной переменной $\boldsymbol{u}$ также задает систему $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w})$.

Построим по покрытиям π и φ тривиальную таблицу G. Эта таблица состоит из k строк и d столбцов. Строкам таблицы приписаны булевы функции $\pi_1(\boldsymbol{x}), \pi_2(\boldsymbol{x}), \dots, \pi_k(\boldsymbol{x})$, а столбцам – булевы функции $\varphi_1(\boldsymbol{w}), \varphi_2(\boldsymbol{w}), \dots, \varphi_d(\boldsymbol{w})$. На пересечении i-й строки с j-м столбцом таблицы G $(1 \le i \le k, 1 \le j \le d)$ находится элемент b_{ij}, значение которого «*», если $\pi_i(\boldsymbol{x}) \wedge \varphi_j(\boldsymbol{w}) = 0$, и $b_{ij} = \boldsymbol{y}_i$, если $\pi_i(\boldsymbol{x}) \wedge \varphi_j(\boldsymbol{w}) \ne 0$. Нетрудно показать, что таблица G задает исходную систему $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ и аналогична компактной таблице.

Особенностью таблицы G является то, что в ней совместимы все столбцы. В этом смысле она является тривиальной.

Пример 1. Пусть система булевых функций $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задана матрицами

$$U = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & - & 0 \\ 1 & 0 & - & - & 1 & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ - & 0 & 1 & 0 & - & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}; \quad V = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array},$$

а система булевых функций $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w})$ – матрицами:

$$H = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ - & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}; \quad E = \begin{array}{c} u_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}.$$

Тогда $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $W = \{x_1, x_2, x_3, x_6\}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, $\boldsymbol{w} = (x_1, x_2, x_3, x_6)$, $\boldsymbol{u} = (u_1)$. Вычислим покрытие π для матрицы U: $\pi = \{\pi_1=\overline{1}, \pi_2=\overline{2}, \pi_3=\overline{3}, \pi_4=\overline{4}, \pi_5=\overline{2,4}, \pi_6=\varnothing\}$, $\pi_1(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_6$, $\pi_2(\boldsymbol{x}) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_5 \bar{x}_6$, $\pi_3(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 x_6$, $\pi_4(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_6 \vee \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 x_6$, $\pi_5(\boldsymbol{x}) = x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 x_6$, $\pi_6(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_1 \bar{x}_6 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee$ $\vee x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_5 \vee x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \vee x_1 x_2 x_6 \vee \bar{x}_1 x_4 x_5$. Найдем $\boldsymbol{y}_1 = (0,0,1)$, $\boldsymbol{y}_2 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{y}_3 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{y}_4 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{y}_5 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{y}_6 = (0,0,0)$. Блоку π_i покрытия π соответствует значение $\boldsymbol{y}_i$ $(1 \le i \le 6)$. Покрытие ρ для матрицы H имеет вид $\rho = \{\rho_1 = \overline{1}, \rho_2 = \overline{2}, \rho_3 = \overline{3}, \rho_4 = \varnothing\}$, $\rho_1(\boldsymbol{w}) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_6$, $\rho_2(\boldsymbol{w}) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_6$, $\rho_3(\boldsymbol{w}) = \bar{x}_2 x_3 x_6$, $\rho_4(\boldsymbol{w}) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_6 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_6 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_6$. Блокам покрытия ρ соответствуют значения $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 = (1)$, $\boldsymbol{u}_4 = (0)$. Согласно этим значениям на множестве блоков покрытия ρ задано разбиение $\alpha = \{\alpha_1 = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}, \alpha_2 = \{\rho_4\}\}$. Построим по покрытию ρ и разбиению α покрытие $\varphi = \{\varphi_1 = \rho_1 \cup \rho_2 \cup \rho_3, \varphi_2 = \rho_4\}$, $\varphi_1(\boldsymbol{w}) = \rho_1(\boldsymbol{w}) \vee \rho_2(\boldsymbol{w}) \vee \rho_3(\boldsymbol{w})$, $\varphi_2(\boldsymbol{w}) = \rho_4(\boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{u}_1{}' = (1)$, $\boldsymbol{u}_2{}' = (0)$. Тривиальная компактная таблица задана в виде табл. 1.

Таблица 1

	$\varphi_1(\boldsymbol{w})$	$\varphi_2(\boldsymbol{w})$
$\pi_1(\boldsymbol{x})$	(0,0,1)	*
$\pi_2(\boldsymbol{x})$	(1,1,1)	(1,1,1)
$\pi_3(\boldsymbol{x})$	(0,1,0)	*
$\pi_4(\boldsymbol{x})$	(1,1,0)	*
$\pi_5(\boldsymbol{x})$	(1,1,1)	*
$\pi_6(\boldsymbol{x})$	(0,0,0)	(0,0,0)

Удаление несущественных аргументов. Для каждой переменной из множества Z определяем, является она несущественным аргументом для функций $\pi_i(\boldsymbol{x})$ $(1 \le i \le k)$ или нет. Переменная x_j $(1 \le j \le n)$ является несущественным аргументом для булевых функций $\pi_1(\boldsymbol{x}), \pi_2(\boldsymbol{x}), \dots, \pi_k(\boldsymbol{x})$, если для любого значения $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j^*, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*)$ векторной переменной $\boldsymbol{x}$ и любого i $(1 \le i \le k)$ выполняется $\pi_i(\boldsymbol{x}^{*\prime}) = \pi_i(\boldsymbol{x}^{*\prime\prime})$, где $\boldsymbol{x}^{*\prime} = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_{j-1}^*, 0, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*)$, $\boldsymbol{x}^{*\prime\prime} = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_{j-1}^*, 1, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*)$. Если это условие не выполняется хотя бы для одного значения векторной переменной $\boldsymbol{x}$ и хотя бы для одной из рассматриваемых булевых функций, то x_j является существенным аргументом. Исходя из этого определения, нетрудно показать, что переменная x_j является несущественным аргументом булевой функции $\pi_i(\boldsymbol{x})$, если и только если ее можно задать в виде ДНФ, каждая элементарная конъюнкция которой не содержит переменную x_j ни с инверсией, ни без инверсии.

Относительно каждой переменной x_j из множества Z устанавливается, является ли она существенным аргументом системы функций $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$. Для этого последовательно просматриваем булевы функции, приписанные строкам таблицы G. Для каждой из этих функций проверяем, существенна ли для нее x_j или нет. Если переменная x_j оказывается несущественной для всех булевых функций, то удаляем ее из подмножества Z. Если же некоторым строкам таблицы G приписаны булевы функции, существенно зависящие от этой переменной, то для каждой из этих строк пытаемся преобразовать таблицу G таким образом, чтобы рассматриваемой строке была приписана булева функция, не зависящая существенно от переменной x_j. Если в результате таких преобразований удается получить таблицу G, где строкам будут приписаны лишь булевы функции, не зависящие от переменной x_j, то переменная x_j удаляется из множества Z. В противном случае x_j остается в Z как существенный аргумент системы $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$.

Преобразование таблицы G. Преобразование компактной таблицы G с целью, чтобы ее строке с номером i $(1 \le i \le k)$ была приписана булева функция, не зависящая существенно от переменной x_j, выполняется следующим образом.

Пусть переменная x_j является существенной для булевой функции $\pi_i(\boldsymbol{x})$ $(1 \le i \le k)$, приписанной строке с номером i компактной таблицы G. Будем считать, что каждая функция $\pi_i(\boldsymbol{x})$ $(1 \le i \le k)$ задана посредством некоторой тупиковой (безызбыточной) ДНФ [1]. Тогда представим $\pi_i(\boldsymbol{x})$ в виде $\pi_i(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_i(\boldsymbol{x}) \vee \pi_i''(\boldsymbol{x})$, где в $\varepsilon_i(\boldsymbol{x})$ собраны все конъюнкции, содержащие x_j с инверсией или без нее, а

$\pi_i''(\boldsymbol{x})$ – все конъюнкции без x_j (в частности, либо тех, либо других конъюнкций может не оказаться, тогда соответствующая функция является константой 0). Пусть $\pi_i'(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_i(\boldsymbol{x}) \wedge \bar{\pi}_i''(\boldsymbol{x})$. В этом случае нетрудно показать, что $\pi_i(\boldsymbol{x}) = \pi_i'(\boldsymbol{x}) \vee \pi_i''(\boldsymbol{x})$ и $\pi_i'(\boldsymbol{x}) \wedge \pi_i''(\boldsymbol{x}) = 0$. Переменная x_j является существенной для функции $\pi_i'(\boldsymbol{x})$ и несущественной для функции $\pi_i''(\boldsymbol{x})$. Если $\pi_i''(\boldsymbol{x}) = 0$, то $\pi_i(\boldsymbol{x}) = \pi_i'(\boldsymbol{x})$ и будем считать, что строке с номером i таблицы G приписана булева функция $\pi_i'(\boldsymbol{x})$.

Если $\pi_i'(\boldsymbol{x}) \neq 0$ и $\pi_i''(\boldsymbol{x}) \neq 0$, то расщепим i-ю строку таблицы G на две строки. Первой из этих строк заменим i-ю строку и припишем ей булеву функцию $\pi_i'(\boldsymbol{x})$, второй строкой дополним таблицу G в виде $(k+1)$-й строки и припишем этой строке булеву функцию $\pi_{k+1}(\boldsymbol{x}) = \pi_i''(\boldsymbol{x})$. Соответственно скорректируем значения элементов обеих строк.

Построим булеву функцию $\mu_i'(\boldsymbol{x})$, ДНФ которой получим из ДНФ функции $\pi_i'(\boldsymbol{x})$, взяв из нее конъюнкции, содержащие переменную x_j, и заменив в них x_j на $\bar{x}_j$ и $\bar{x}_j$ на x_j. Положим $\mu_i(\boldsymbol{x}) = \mu_i'(\boldsymbol{x}) \wedge \bar{\pi}_i'(\boldsymbol{x})$. Как функция $\pi_i'(\boldsymbol{x})$, так и функция $\mu_i(\boldsymbol{x})$ зависят существенно от переменной x_j, но нетрудно показать, что их дизъюнкция от этой переменной уже существенно не зависит. Кроме того, выполняется равенство $\mu_i(\boldsymbol{x}) \wedge \pi_i'(\boldsymbol{x}) = 0$.

Построим множество Q, элементами которого будут строки, выбранные из таблицы G следующим образом. Среди булевых функций, которые приписаны строкам таблицы G, выделим функции, неортогональные функции $\mu_i(\boldsymbol{x})$, т. е. те функции $\pi_s(\boldsymbol{x})$, для которых $\pi_s(\boldsymbol{x}) \wedge \mu_i(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Каждую из строк, которым приписаны выделенные функции, расщепим на две строки следующим образом.

Если $\pi_s(\boldsymbol{x}) \wedge \mu_i(\boldsymbol{x}) \neq \pi_s(\boldsymbol{x})$, то представим эту функцию в виде $\pi_s(\boldsymbol{x}) = \pi_s'(\boldsymbol{x}) \vee \pi_s''(\boldsymbol{x})$, где $\pi_s'(\boldsymbol{x}) = \pi_s(\boldsymbol{x}) \wedge \mu_i(\boldsymbol{x})$, $\pi_s''(\boldsymbol{x}) = \pi_s(\boldsymbol{x}) \wedge \bar{\mu}_i(\boldsymbol{x})$. Отсюда непосредственно следует, что $\pi_s'(\boldsymbol{x}) \wedge \pi_s''(\boldsymbol{x}) = 0$. Расщепим строку s на две. Первой из расщепленных строк припишем булеву функцию $\pi_s'(\boldsymbol{x})$, второй – булеву функцию $\pi_s''(\boldsymbol{x})$. Первой из этих строк заменим строку s таблицы G. Вторую строку припишем снизу к таблице G. Измененную строку таблицы с номером s добавим в множество Q. Если $\pi_s(\boldsymbol{x}) \wedge \mu_i(\boldsymbol{x}) = \pi_s(\boldsymbol{x})$, то просто добавим строку с номером s в множество Q.

Добавим в множество Q строку с номером i, которой приписана булева функция $\pi_i'(\boldsymbol{x})$. Если Q является совместимым множеством, т. е. все строки в нем попарно совместимы [9], то все эти строки можно объединить в одну, приписав ей булеву функцию, равную дизъюнкции всех функций, приписанных объединяемым строкам.

У т в е р ж д е н и е. *Если любые две строки из множества Q совместимы, то булева функция, которая приписана строке, полученной совмещением строк из множества Q, не зависит существенно от переменной x_j.*

Доказательство. Из способа построения компактной таблицы G непосредственно следует, что дизъюнкция булевых функций, приписанных ее строкам, равна логической единице. Отсюда и из способа формирования множества Q следует, что если строки, входящие в множество Q, совместимы, то строке, полученной посредством совмещения этих строк, приписывается булева функция $\alpha_i(\boldsymbol{x}) = \mu_i(\boldsymbol{x}) \vee \pi_i'(\boldsymbol{x})$. Функции $\mu_i(\boldsymbol{x})$ и $\pi_i'(\boldsymbol{x})$ были выбраны таким образом, чтобы их дизъюнкция не зависела существенно от переменной x_j. Утверждение доказано.

Если строки, входящие в множество Q, не являются совместимыми, то невозможно преобразовать таблицу G таким образом, чтобы ее строке с номером i была приписана булева функция, существенно не зависящая от переменной x_j. В этом случае переменную x_j нельзя удалить из множества Z.

Если строки, входящие в множество Q, совместимы, то совмещаем их в одну строку, и этой строкой заменяем строку с номером i таблицы G. Из таблицы G удаляем все строки, входящие в множество Q, за исключением строки с номером i. Если строки, входящие в множество Q, несовместимы, то возвращаемся к тому состоянию таблицы G, которое она имела до начала преобразований для строки с номером i.

Пример 2. Рассматриваем систему функций из примера 1, представленную в виде табл. 1.

Полагаем вначале $Z = X$. Последовательно просматривая переменные из множества Z, попытаемся определить, какие из этих переменных являются несущественными. Выбираем из множества Z переменную x_1. Чтобы определить, существенна эта переменная или нет, попытаемся посредством преобразования табл. 1 добиться, чтобы ее строкам были приписаны булевы функции, не зависящие от переменной x_1. Начнем с первой строки. ДНФ булевой функции $\pi_1(\boldsymbol{x})$ состоит из одной конъюнкции, которая существенно зависит от x_1. В этом случае в представлении $\pi_1(\boldsymbol{x}) = \pi_1'(\boldsymbol{x}) \vee \pi_1''(\boldsymbol{x})$ имеем $\pi_1''(\boldsymbol{x}) = 0$ и $\pi_1'(\boldsymbol{x}) = \pi_1(\boldsymbol{x})$. Заменив x_1 на $\bar{x}_1$ в конъюнкции, представляющей $\pi_1'(\boldsymbol{x})$, получим $\mu_1(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_6$. Среди булевых функций, приписанных строкам табл. 1, только одна $\pi_6(\boldsymbol{x})$ неортогональна функции $\mu_1(\boldsymbol{x})$. Представим функцию $\pi_6(\boldsymbol{x})$ в виде $\pi_6(\boldsymbol{x}) = \pi_6'(\boldsymbol{x}) \vee \pi_6''(\boldsymbol{x})$, где $\pi_6'(\boldsymbol{x}) = \pi_6(\boldsymbol{x}) \wedge \mu_1(\boldsymbol{x})$ (в данном случае $\pi_6(\boldsymbol{x}) \wedge \mu_1(\boldsymbol{x}) = \mu_1(\boldsymbol{x})$) и $\pi_6''(\boldsymbol{x}) = \pi_6(\boldsymbol{x}) \wedge \bar{\mu}_1(\boldsymbol{x}) = x_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \vee \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_5 \vee x_2 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4$. Расщепим шестую строку таблицы на две строки и получим табл. 2.

Таблица 2

	$\varphi_1(\boldsymbol{w})$	$\varphi_2(\boldsymbol{w})$
$\pi_1(\boldsymbol{x})$	(0,0,1)	*
$\pi_2(\boldsymbol{x})$	(1,1,1)	(1,1,1)
$\pi_3(\boldsymbol{x})$	(0,1,0)	*
$\pi_4(\boldsymbol{x})$	(1,1,0)	*
$\pi_5(\boldsymbol{x})$	(1,1,1)	*
$\pi_6'(\boldsymbol{x}) = \mu_1(\boldsymbol{x})$	*	(0,0,0)
$\pi_6''(\boldsymbol{x}) = \pi_6(\boldsymbol{x}) \wedge \bar{\mu}_1(\boldsymbol{x})$	(0,0,0)	(0,0,0)

Множество Q состоит из первой и шестой строк табл. 2. Эти строки совместимы. Совместив их, получим табл. 3. Она также задает исходную систему, и ее первой строке приписана булева функция, не зависящая от переменной x_1. Булева функция $\pi_2(\boldsymbol{x})$, приписанная второй строке табл. 3, существенно зависит от переменной x_1. Попытаемся преобразовать эту таблицу так, чтобы булева функция, приписанная ее второй строке, не зависела существенно от переменной x_1. Здесь $\pi_2''(\boldsymbol{x}) = 0$ и $\pi_2'(\boldsymbol{x}) = \pi_2(\boldsymbol{x})$. Построим $\mu_2(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 x_5 \vee \vee x_1 \bar{x}_2 x_5 \bar{x}_6$, заменив в выражении для $\pi_2(\boldsymbol{x})$ литерал x_1 на $\bar{x}_1$. Из функций, приписанных строкам табл. 3, функции $\mu_2(\boldsymbol{x})$ неортогональна лишь $\pi_6''(\boldsymbol{x})$, причем $\pi_6''(\boldsymbol{x}) \wedge \mu_2(\boldsymbol{x}) = \mu_2(\boldsymbol{x})$. Представим функцию $\sigma_6(\boldsymbol{x}) = \pi_6''(\boldsymbol{x})$, приписанную шестой строке табл. 3, в виде $\sigma_6(\boldsymbol{x}) = \sigma_6'(\boldsymbol{x}) \vee \sigma_6''(\boldsymbol{x})$, где $\sigma_6'(\boldsymbol{x}) = \sigma_6(\boldsymbol{x}) \wedge \mu_2(\boldsymbol{x})$ и $\sigma_6''(\boldsymbol{x}) = \sigma_6(\boldsymbol{x}) \wedge \bar{\mu}_2(\boldsymbol{x})$ Легко получить $\sigma_6'(\boldsymbol{x}) = \mu_2(\boldsymbol{x})$ и $\sigma_6''(\boldsymbol{x}) = \pi_6''(\boldsymbol{x}) \wedge \bar{\mu}_2(\boldsymbol{x}) = x_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 x_6 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee x_2 x_5 x_6 \vee x_3 x_4 \bar{x}_5$. Расщепив шестую строку табл. 3 на две, получим табл. 4. Множество Q состоит из второй и шестой строк этой таблицы. Эти строки несовместимы, следовательно, невозможно преобразовать табл. 4 так, чтобы для всех приписанных ее строкам функций переменная x_1 стала существенным аргументом.

Таблица 3

	$\varphi_1(\boldsymbol{w})$	$\varphi_2(\boldsymbol{w})$
$\pi_1(\boldsymbol{x}) \vee \mu_1(\boldsymbol{x})$	(0,0,1)	(0,0,0)
$\pi_2(\boldsymbol{x})$	(1,1,1)	(1,1,1)
$\pi_3(\boldsymbol{x})$	(0,1,0)	*
$\pi_4(\boldsymbol{x})$	(1,1,0)	*
$\pi_5(\boldsymbol{x})$	(1,1,1)	*
$\pi_6''(\boldsymbol{x}) = \pi_6(\boldsymbol{x}) \wedge \bar{\mu}_1(\boldsymbol{x})$	(0,0,0)	(0,0,0)

Таблица 4

	$\varphi_1(\boldsymbol{w})$	$\varphi_2(\boldsymbol{w})$
$\pi_1(\boldsymbol{x}) \vee \mu_1(\boldsymbol{x})$	(0,0,1)	(0,0,0)
$\pi_2(\boldsymbol{x})$	(1,1,1)	(1,1,1)
$\pi_3(\boldsymbol{x})$	(0,1,0)	*
$\pi_4(\boldsymbol{x})$	(1,1,0)	*
$\pi_5(\boldsymbol{x})$	(1,1,1)	*
$\mu_2(\boldsymbol{x})$	(0,0,0)	(0,0,0)
$\pi_6''(\boldsymbol{x}) \wedge \bar{\mu}_2(\boldsymbol{x})$	(0,0,0)	(0,0,0)

Возвращаемся к табл. 1 и выбираем из множества Z переменную x_2. Булева функция, приписанная первой строке табл. 1, существенно зависит от переменной x_2. Эту таблицу невозможно изменить так, чтобы функция, приписанная ее первой строке, не зависела существенно от переменной x_2. Следовательно, переменная x_2 существенна.

Снова возвращаемся к табл. 1 и выбираем из множества Z переменную x_3. Булева функция $\pi_1(\boldsymbol{x})$, приписанная первой строке таблицы, существенно зависит от переменной x_3. Попытаемся преобразовать табл. 1 так, чтобы ее первой строке была приписана булева функция, не зависящая от переменной x_3. Аналогично проведенным выше построениям получаем $\pi_1'(\boldsymbol{x}) = \pi_1(\boldsymbol{x})$ и $\mu_1(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_6$. Функция $\mu_1(\boldsymbol{x})$ неортогональна лишь функции $\pi_6(\boldsymbol{x})$. Представим функцию $\pi_6(\boldsymbol{x})$ в виде $\pi_6(\boldsymbol{x}) = \pi_6'(\boldsymbol{x}) \vee \pi_6''(\boldsymbol{x})$, где $\pi_6'(\boldsymbol{x}) = \pi_6(\boldsymbol{x}) \wedge \mu_6(\boldsymbol{x}) = \mu_6(\boldsymbol{x})$, $\pi_6''(\boldsymbol{x}) = \pi_6(\boldsymbol{x}) \wedge \bar{\mu}_1(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_1 \bar{x}_6 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \vee x_1 x_2 x_6 \vee$ $\vee \bar{x}_1 x_4 x_5$. Расщепив шестую строку табл. 1 на две, получим таблицу, отличающуюся от табл. 2 только видом функций $\pi_6'(\boldsymbol{x})$ и $\pi_6''(\boldsymbol{x})$, приписанных последним двум строкам. Совместив первую и шестую строки этой таблицы, получим таблицу, отличающуюся от табл. 3 только видом функций, приписанных первой и шестой строкам. Приписанная первой строке функция $\pi_1(\boldsymbol{x}) \vee \mu_1(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 x_4 \bar{x}_6$ не зависит от переменной x_3.

Булева функция $\pi_2(\boldsymbol{x})$, приписанная второй строке табл. 3 существенно зависит от переменной x_3. Попытаемся преобразовать эту таблицу так, чтобы приписанная этой строке функция не зависела от x_3. Представим функцию $\pi_2(\boldsymbol{x})$ в виде $\pi_2(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_2(\boldsymbol{x}) \vee \pi_2''(\boldsymbol{x})$, где $\varepsilon_2(\boldsymbol{x}) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_5$, $\pi_2''(\boldsymbol{x}) = x_1 \bar{x}_2 x_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_5 \bar{x}_6$. Вычислим $\pi_2'(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_2(\boldsymbol{x}) \wedge \bar{\pi}_2''(\boldsymbol{x}) =$ $= x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 x_6$. В этом случае $\pi_2(\boldsymbol{x}) = \pi_2'(\boldsymbol{x}) \vee \pi_2''(\boldsymbol{x})$ и $\pi_2'(\boldsymbol{x}) \wedge \pi_2''(\boldsymbol{x}) = 0$. Расщепим вторую строку табл. 3 с приписанной функцией $\pi_2(\boldsymbol{x}) = \pi_2'(\boldsymbol{x}) \vee \pi_2''(\boldsymbol{x})$ на две и получим табл. 5.

Таблица 5

	$\varphi_1(\boldsymbol{w})$	$\varphi_2(\boldsymbol{w})$
$\pi_1(\boldsymbol{x}) \vee \mu_1(\boldsymbol{x})$	(0,0,1)	(0,0,0)
$\pi_2'(\boldsymbol{x})$	*	(1,1,1)
$\pi_3(\boldsymbol{x})$	(0,1,0)	*
$\pi_4(\boldsymbol{x})$	(1,1,0)	*
$\pi_5(\boldsymbol{x})$	(1,1,1)	*
$\pi_6''(\boldsymbol{x})$	(0,0,0)	(0,0,0)
$\pi_2''(\boldsymbol{x})$	(1,1,1)	(1,1,1)

Построим $\mu_2(\boldsymbol{x}) = x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 x_6$, заменив $\bar{x}_3$ в выражении для $\pi_2'(\boldsymbol{x})$ на x_3. Эта функция равна функции $\pi_5(\boldsymbol{x})$, и нет необходимости в расщеплении пятой строки табл. 5. Множество Q содержит две строки: вторую и пятую. Эти строки совместимы, и совместив их, получим табл. 6.

Таблица 6

	$\varphi_1(\boldsymbol{w})$	$\varphi_2(\boldsymbol{w})$
$\pi_1(\boldsymbol{x}) \vee \mu_1(\boldsymbol{x})$	(0,0,1)	(0,0,0)
$\pi_2''(\boldsymbol{x})$	(1,1,1)	(1,1,1)
$\pi_3(\boldsymbol{x})$	(0,1,0)	*
$\pi_4(\boldsymbol{x})$	(1,1,0)	*
$\pi_5(\boldsymbol{x}) \vee \pi_2'(\boldsymbol{x})$	(1,1,1)	(1,1,1)
$\pi_6''(\boldsymbol{x})$	(0,0,0)	(0,0,0)

Продолжая процесс преобразования табл. 6, построим табл. 7, где строкам приписаны булевы функции, не зависящие от переменной x_3: $\sigma_1(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 x_4 \bar{x}_6$, $\sigma_2(\boldsymbol{x}) = x_1 \bar{x}_2 x_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_5 \bar{x}_6$, $\sigma_3(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_1 x_2 x_4 \bar{x}_5 x_6$, $\sigma_4(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_6 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5 x_6$, $\sigma_5(\boldsymbol{x}) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_5 x_6$, $\sigma_6(\boldsymbol{x}) = \bar{x}_1 \bar{x}_6 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee$ $\vee \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \vee x_1 x_2 x_6 \vee \bar{x}_1 x_4 x_5$.

Таблица 7

	$\varphi_1(\boldsymbol{w})$	$\varphi_2(\boldsymbol{w})$
$\sigma_1(\boldsymbol{x})$	(0,0,1)	(0,0,0)
$\sigma_2(\boldsymbol{x})$	(1,1,1)	(1,1,1)
$\sigma_3(\boldsymbol{x})$	(0,1,0)	(0,0,0)
$\sigma_4(\boldsymbol{x})$	(1,1,0)	(0,0,0)
$\sigma_5(\boldsymbol{x})$	(1,1,1)	(1,1,1)
$\sigma_6(\boldsymbol{x})$	(0,0,0)	(0,0,0)

Переменная x_3 является несущественным аргументом для функций $\sigma_2(\boldsymbol{x})$, $\sigma_2(\boldsymbol{x})$, $\sigma_3(\boldsymbol{x})$, $\sigma_4(\boldsymbol{x})$, $\sigma_5(\boldsymbol{x})$, $\sigma_6(\boldsymbol{x})$ и удаляется из множества Z.

Переменные x_4 и x_5 могли быть несущественными аргументами для функций, приписанных строкам таблицы рассмотренного вида, если бы они были несущественными для исходных функций. Поэтому переходим сразу к рассмотрению существенности переменной x_6. В качестве исходной берем табл. 7 и окончательно получаем табл. 8, где $\boldsymbol{z} = (x_1, x_2, x_4, x_5)$, $\tau_1(\boldsymbol{z}) = x_1 x_2 x_4$, $\tau_2(\boldsymbol{z}) = x_1 \bar{x}_2 x_4 x_5$, $\tau_3(\boldsymbol{z}) = \bar{x}_1 x_2 x_4 \bar{x}_5$, $\tau_4(\boldsymbol{z}) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5$, $\tau_5(\boldsymbol{z}) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_5$, $\tau_6(\boldsymbol{z}) = x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_4 x_5 \vee \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_5$.

Таблица 8

	$\varphi_1(\boldsymbol{w})$	$\varphi_2(\boldsymbol{w})$
$\tau_1(\boldsymbol{z})$	(0,0,1)	(0,0,0)
$\tau_2(\boldsymbol{z})$	(1,1,1)	(1,1,1)
$\tau_3(\boldsymbol{z})$	(0,1,0)	(0,0,0)
$\tau_4(\boldsymbol{z})$	(1,1,0)	(0,0,0)
$\tau_5(\boldsymbol{z})$	(1,1,1)	(1,1,1)
$\tau_6(\boldsymbol{z})$	(0,0,0)	(0,0,0)

Табл. 8 можно упростить, так как в ней вторая строка совместима с пятой. Объединим эти строки и получим табл. 9. В этой таблице $\tau_2'(\boldsymbol{z}) = x_1 \bar{x}_2 x_5$.

Таблица 9

	$\varphi_1(\boldsymbol{w})$	$\varphi_2(\boldsymbol{w})$
$\tau_1(\boldsymbol{z})$	(0,0,1)	(0,0,0)
$\tau_2'(\boldsymbol{z}) = \tau_2(\boldsymbol{z}) \vee \tau_5(\boldsymbol{z})$	(1,1,1)	(1,1,1)
$\tau_3(\boldsymbol{z})$	(0,1,0)	(0,0,0)
$\tau_4(\boldsymbol{z})$	(1,1,0)	(0,0,0)
$\tau_6(\boldsymbol{z})$	(0,0,0)	(0,0,0)

Формирование системы $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$. Положим, что тривиальная компактная таблица G за счет вышеописанных преобразований приведена к такому виду, что все переменные, входящие в подмножество Z, являются существенными. При преобразованиях таблицы G менялись строки и элементы таблицы, а также булевы функции, приписанные ее строкам. Неизменным осталось число столбцов и булевы функции, приписанные этим столбцам. Напомним, что столбцам таблицы G приписаны булевы функции $\varphi_1(\boldsymbol{w}), \varphi_2(\boldsymbol{w}), \ldots, \varphi_d(\boldsymbol{w})$. Булевой функции $\varphi_t(\boldsymbol{w})$ $(1 \le t \le d)$ приписано значение $\boldsymbol{u}'_t$ векторной переменной $\boldsymbol{u}$.

Разобьем все множество значений векторной переменной $\boldsymbol{u}$ на классы $N_1, N_2, \ldots, N_d$ так, чтобы $\boldsymbol{u}'_t \in N_t$, $1 \le t \le d$. Сформируем множество булевых функций $c_1(\boldsymbol{u}), c_2(\boldsymbol{u}), \ldots, c_d(\boldsymbol{u})$. Для всякого значения $\boldsymbol{u}^*$ векторной переменной $\boldsymbol{u}$ и значения t $(1 \le t \le d)$ выполняется: если $\boldsymbol{u}^* \in N_t$, то $c_t(\boldsymbol{u}^*) = 1$, иначе $c_t(\boldsymbol{u}^*) = 0$. Рассматриваемая таблица G, столбцам которой приписаны булевы функции $c_1(\boldsymbol{u}), c_2(\boldsymbol{u}), \ldots, c_d(\boldsymbol{u})$, задает искомую систему $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$. По этой таблице легко построить ее матричное представление [4, 5, 9].

Пример 3. Для системы булевых функций из примеров 1 и 2 задача декомпозиции, рассматриваемая в данной работе, имеет решение, поскольку выполняется неравенство $|Z| + q < n$, где q – число компонент векторной переменной $\boldsymbol{u}$, $|Z| = 4$, $q = 1$, $n = |X| = 6$. По табл. 9 построим таблицу, задающую систему $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$, где в данном случае $\boldsymbol{u}$ является однокомпонентной векторной переменной (u_1), множество значений которой разбивается на классы $N_1=\{(1)\}$ и $N_2=\{(0)\}$. В этом случае $c_1(\boldsymbol{u}) = u_1$, $c_2(\boldsymbol{u}) = \bar{u}_1$ и табл. 10 задает систему булевых функций $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$.

Таблица 10

	$c_1(\boldsymbol{u})$	$c_2(\boldsymbol{u})$
$\tau_1(\boldsymbol{z})$	(0,0,1)	(0,0,0)
$\tau_2'(\boldsymbol{z})$	(1,1,1)	(1,1,1)
$\tau_3(\boldsymbol{z})$	(0,1,0)	(0,0,0)
$\tau_4(\boldsymbol{z})$	(1,1,0)	(0,0,0)
$\tau_6(\boldsymbol{z})$	(0,0,0)	(0,0,0)

По табл. 10 найдем матричное представление системы $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$. Эта система задается матрицами

$$S = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & x_1 & x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & - \\ - & 1 & 0 & - & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & - \\ 1 & - & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}, \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}.$$

Заключение

Метод решения рассматриваемой в настоящей работе задачи декомпозиции сводится к задаче поиска и удаления несущественных аргументов. В результате удаления несущественных аргументов тривиальная таблица преобразуется в таблицу, по которой легко находится искомая система булевых функций.

Список литературы

1. Закревский А.Д. Логический синтез каскадных схем. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

2. Бибило П.Н., Енин С.В. Синтез комбинационных схем методами функциональной декомпозиции. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 189 с.

3. Бибило П.Н. Синтез комбинационных ПЛМ-структур для СБИС. – Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 232 с.

4. Шестаков Е.А. Декомпозиция системы полностью определенных булевых функций по покрытию аргументов // Автоматика и вычислительная техника. – 1994. – № 1. – С. 12–20.

5. Pottosin Yu., Shestakov E. Decomposition of systems of completely specified Boolean functions using their compact table representation // Boolean Problems. 4th International Workshop. – Freiberg (Sachen), 2000. – P. 135–142.

6. Brzozowski J.A., Lou J.J. Decomposition of Boolean functions specified by cubes // Research Report CS–97–01, Department of Computer Science, University of Waterloo. – Waterloo, Canada, 1997. – 36 p.

7. Brzozowski J.A., Luba T. Decomposition of Boolean Functions Specified by Cubes, Part 1: Theory of Serial Decompositions Using Blankets, Research Report CS-97-01, Dept. of Comp. Sci., University of Waterloo. – Waterloo, Canada, 1998.

8. Поттосин Ю.В., Шестаков Е.А. О табличном задании систем полностью определенных булевых функций // Информатика. – 2004. – № 1. – С. 139–147.

9. Поттосин Ю.В., Шестаков Е.А. Декомпозиция систем полностью определенных булевых функций по их заданию в виде компактных таблиц // Информатика. – 2004. – № 2. – С. 35–44.

10. Поттосин Ю.В., Шестаков Е.А. Декомпозиция системы булевых функций по заданной системе выходных функций // Методы логического проектирования. Вып. 1. – Мн.: ОИПИ НАН Беларуси, 2002. – С. 75–84.

Поступила 26.05.05

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail:{pott,she}@newman.bas-net.by

Yu.V. Pottosin, E.A. Shestakov

DECOMPOSITION OF A SYSTEM OF BOOLEAN FUNCTIONS USING GIVEN INPUT FUNCTIONS

A method for decomposition of the system of completely specified Boolean functions into a superposition consisting of two systems is suggested. It is assumed that one of the systems, whose functions are arguments of the other, is given. The method is based on the ternary matrix cover technique.