ИНФОРМАТИКА

2005 октябрь-декабрь № 4

УДК 681.3

А.Ф. Чернявский, А.М. Аксенов, А.А. Коляда, В.В. Ревинский, Е.В. Шабинская

МУЛЬТИПРОЦЕССОРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ВИНОГРАДА ДЛЯ ДПФ НА ОСНОВЕ МИНИМАЛЬНО ИЗБЫТОЧНОЙ МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ

Рассматривается разработка на основе минимально избыточной модулярной арифметики мультипроцессорной модели алгоритма Винограда для дискретного преобразования Фурье (ДПФ), которая полностью реализуется в режиме модульных вычислений. Это достигается за счет применения больших модулей и таблиц большой емкости. Предлагаемая вычислительная технология обладает высокой производительностью и позволяет также существенно упростить немодульные процедуры.

Введение

В современном процессе развития компьютерных наук и их многочисленных приложений фундаментальную роль играют параллельные вычислительные структуры (ВС). Особое место среди таких структур занимают модулярные ВС [1–3], которые, обладая максимальным уровнем внутреннего параллелизма, представляют собой уникальное средство декомпозиции вычислительных процессов на независимые друг от друга субпроцессы. При небольшой разрядности элементов математических моделей, которые составляют область определения этих субпроцессов, появляются принципиально новые возможности для повышения скорости обработки информации, особенно в рамках вычислительных процедур, имеющих модульные операционные спектры. В связи с крупными успехами, достигнутыми в сфере производства БИС и СБИС, в частности таких, как оптоэлектронные СБИС и СБИС на многозначной логике, в течение последних 10–15 лет модулярное направление в информатике, цифровой обработке сигналов, ряде других областей науки и техники переживает этап бурного развития. Вместе с тем чисто аппаратный подход к построению систем модулярной обработки информации (СМОИ) на практике зачастую встречает существенные затруднения, обусловленные ограничениями на величину модулей $m_1, m_2, \ldots, m_k$ базовой модулярной системы счисления (МСС), а значит, на их число k и, в конечном счете, на мощность рабочего (динамического) диапазона $\mathbf{D}$ СМОИ [4–6]. Отмеченный фактор сужает пределы действия так называемого режима модульных вычислений (РМВ), т. е. режима, при котором выполняются только модульные операции, не требующие обмена данными между помодульными трактами СМОИ. В результате фундаментальные преимущества модулярной арифметики (МА) реализуются не в полной мере.

Исключительно широкие возможности для создания СМОИ, целиком функционирующих в РМВ, обеспечивают так называемые многомашинная [7–9] и мультипроцессорная технологии модулярной обработки информации (ТМОИ). Реализационным аспектам мультипроцессорной ТМОИ применительно к алгоритму Винограда для ДПФ посвящена настоящая статья.

Суть предлагаемого альтернативного подхода состоит в выполнении помодульных компонентов вычислительных процессов в рамках мультипроцессорных позиционных структур на программном уровне. При этом в качестве компьютерно-арифметической базы используется минимально избыточная МА (МИМА) [1], которая отличается от известных аналогов более совершенными немодульными процедурами. Так как при построении программных версий МИМА могут применяться гораздо большие модули, чем в СМОИ на основе БИС- и СБИС-архитектур, то предлагаемая технология открывает принципиально новые возможности для расширения пределов действия РМВ.

1. Кододекомпозиционная форма алгоритма Винограда для ДПФ

Возможность использования в рамках мультипроцессорной ТМОИ динамических диапазонов $\mathbf{D}$ большой мощности ($2^{64} \div 2^{256}$ элементов и более) и расширения за счет этого пределов действия РМВ в совокупности с достигаемом при минимально избыточном модулярном кодировании уменьшении затрат на выполнение в СМОИ немодульных операций теоретически позволяет реализовать фундаментальные преимущества МИМА в полной мере. Идеальную алгоритмическую основу для демонстрации отмеченного факта составляют быстрые процедуры ДПФ и, в частности, рассматриваемая ниже процедура Винограда.

Пусть в СМОИ требуется выполнить ДПФ

$$X(l) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, w_N^{nl}\,(l = \overline{0,\ N-1}), \tag{1}$$

где $X(l)$ и $x(n)$ – отсчеты соответственно выходного $\mathbf{X}=\{X(l)\}_{l=\overline{0,N-1}}$ и входного $\mathbf{x}=\{x(n)\}_{n=\overline{0,N-1}}$ дискретных сигналов; $w_N = e^{-j2\pi/N}$; $N = \prod_{r=0}^{R-1} N_{R-r}$; $N_1, N_2, \ldots, N_R$ – попарно-простые натуральные числа, $R \geq 2$.

В литературе по цифровой обработке сигналов описан целый ряд технологий синтеза быстрых алгоритмов для реализации преобразования (1) длины N рассматриваемого вида. В частности, для получения процедуры Винограда могут быть применены рекурсивный метод взаимно простых делителей, метод представления матрицы N-точечного ДПФ в виде прямого произведения матриц ДПФ длин $N_1, N_2, \ldots, N_R$ и др. [10–13]. Здесь в качестве основы принята так называемая модулярная кододекомпозиционная форма алгоритма Винограда [14–18]. Это обусловлено тем, что данная форма имеет модульную структуру как на внутреннем (компьютерно-арифметическом), так и внешнем (алгоритмическом) уровнях и поэтому естественным образом согласуется с модулярными принципами параллельных (мультипроцессорных) вычислений.

Согласно кододекомпозиционной методологии для декомпозиции ДПФ (1) на наборы элементарных (базовых) ДПФ длин $N_1, N_2, \ldots, N_R$ аргументы n входного и l выходного сигналов представляются в МСС с основаниями $N_1, N_2, \ldots, N_R$, т. е. в виде $n = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_R)$ и $l = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_R)$, где $\nu_i = |n|_{N_i}$, $\lambda_i = |l|_{N_i}$ $(i = \overline{1,\ R})$; $|a|_m$ – элемент кольца $\mathbf{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, который можно сравнить с величиной a, в общем случае рациональной, по модулю m. Это и приводит к быстрому алгоритму (алгоритму Винограда), в рамках которого ДПФ длины N осуществляется согласно рекурсивной схеме за R шагов (итераций). На r-м шаге $(r = \overline{0,\ R-1})$ выполняется N/N_{R-r} базовых ДПФ вида

$$X_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{R-r-1}, \lambda_{R-r+1}, \ldots, \lambda_R}(\lambda_{R-r}) = \\ = \sum_{\nu_{R-r}=0}^{N_{R-r}-1} x_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{R-r-1}, \lambda_{R-r+1}, \ldots, \lambda_r}(\nu_{R-r})\, w_{N_{R-r}}^{\nu_{R-r}|N^{-1} N_{R-r}\lambda_{R-r}|_{N_{R-r}}}, \tag{2}$$

где

$$x_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mathrm{R}-r-1}, \lambda_{\mathrm{R}-r+1}, \ldots, \lambda_r}(\nu_{\mathrm{R}-r}) = \\ = \begin{cases} x(\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_R), & \text{если } r = 0, \\ X_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{R-r}, \lambda_{R-r+2}, \ldots, \lambda_R}(\lambda_{R-r+1}), & \text{если } r > 0; \end{cases} \tag{3}$$

$$\nu_i = \overline{0,\ N_i - 1}\ (i = \overline{1, R-r});\ \lambda_s = \overline{0,\ N_s - 1}\ (s = \overline{R-r, R});\ x(\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_R) = x(n).$$

Искомый N-точечный сигнал формируется из отсчетов выходных сигналов элементарных ДПФ, реализуемых на заключительной $(R-1)$-й итерации алгоритма, по правилу

$$X(l) = X\left(\left|\sum_{i=1}^{R}\frac{N}{N_i}\left|\frac{N_i}{N}\lambda_i\right|_{N_i}\right|_N\right) = X(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_R) = X_{\lambda_2, ..., \lambda_R}(\lambda_1). \qquad (4)$$

2. Обобщенная аддитивно-мультипликативная компьютерная модель процедуры Винограда для ДПФ

В качестве искомой компьютерной модели базовых ДПФ (2) процедуры Винограда примем следующую пару равенств:

$$\begin{cases} X'_{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_{R-r-1}, \lambda_{R-r+1}, ..., \lambda_R}(\lambda_{R-r}) = \sum\limits_{\nu_{R-r}=0}^{N_{R-r}-1}\Big(C_{\gamma_0(r,\nu_{R-r},\lambda_{R-r})}\, x'_{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_{R-r-1}, \lambda_{R-r+1}, ..., \lambda_R} \times \\ \qquad \times(\nu_{R-r}) + C_{\gamma_1(r,\nu_{R-r},\lambda_{R-r})}\, x''_{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_{R-r-1}, \lambda_{R-r+1}, ..., \lambda_R}(\nu_{R-r})\Big), \\ X''_{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_{R-r-1}, \lambda_{R-r+1}, ..., \lambda_R}(\lambda_{R-r}) = \sum\limits_{\nu_{R-r}=0}^{N_{R-r}-1}\Big(C_{\gamma_0(r,\nu_{R-r},\lambda_{R-r})}\, x''_{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_{R-r-1}, \lambda_{R-r+1}, ..., \lambda_R} \times \\ \qquad \times(\nu_{R-r}) + C_{\gamma_1(r,\nu_{R-r},\lambda_{R-r})}\, x'_{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_{R-r-1}, \lambda_{R-r+1}, ..., \lambda_R}(\nu_{R-r})\Big), \end{cases} \qquad (5)$$

где $C_{\gamma_0(r,\nu_{R-r},\lambda_{R-r})} = \rfloor Q \cos(2\pi\nu_{R-r} \mid N^{-1} N_{R-r}\lambda_{R-r}|_{N_{R-r}} / N_{R-r}) \lfloor$ и $C_{\gamma_1(r,\nu_{R-r},\lambda_{R-r})} = \rfloor Q \sin(2\pi\nu_{R-r} \mid N^{-1} N_{R-r}\lambda_{R-r}|_{N_{R-r}} / N_{R-r}) \lfloor$ – числители рациональных приближений $C_{\gamma_0(r,\nu_{R-r},\lambda_{R-r})}/Q$ и $C_{\gamma_1(r,\nu_{R-r},\lambda_{R-r})}/Q$ к действительной и мнимой частям фурье-коэффициента

$$w_{N_{R-r}}^{\nu_{R-r}|N^{-1}N_{R-r}\lambda_{R-r}|_{N_{R-r}}} = \cos\left(\frac{2\pi}{N_{R-r}}\nu_{R-r}|N^{-1}N_{R-r}\lambda_{R-r}|_{N_{R-r}}\right) - \\ - j\sin\left(\frac{2\pi}{N_{R-r}}\nu_{R-r}|N^{-1}N_{R-r}\lambda_{R-r}|_{N_{R-r}}\right);$$

$\gamma_0(r, \nu_{R-r}, \lambda_{R-r})$ и $\gamma_1(r, \nu_{R-r}, \lambda_{R-r})$ – порядковые номера констант $C_{\gamma_0(r,\nu_{R-r},\lambda_{R-r})}$ и $C_{\gamma_1(r,\nu_{R-r},\lambda_{R-r})}$ соответственно в наборе $\mathbf{C}_{\min} = <C_0, C_1, \ldots, C_{\eta-1}>$ ($C_f \neq C_h$ ($f \neq h$); $f, h = \overline{0, \eta-1}$; ($\eta$ – натуральное число), составленном из всех различных элементов множества

$$\mathbf{C} = \{\forall C'_{s,r} = \rfloor Q\cos\frac{2\pi s}{N_{R-r}}\lfloor \mid s = \overline{0, N_{R-r}-1}; r = \overline{0, R-1}\} \cup \\ \cup \{\forall C''_{s,r} = \rfloor Q\sin\frac{2\pi s}{N_{R-r}}\lfloor \mid s = \overline{0, N_{R-r}-1}; r = \overline{0, R-1}\}.$$

Здесь, как и прежде, действительные компоненты комплексных чисел помечаются одним штрихом, а мнимые – двумя; Q – полумощность диапазона $\{-Q, -Q+1, \ldots, Q\}$ используемых констант; через $\rfloor x \lfloor$ обозначается ближайшее к x целое число.

Из изложенного ясно, что модель (5) базовых ДПФ алгоритма Винограда является результатом замены в (2) фурье-коэффициентов $w_{N_{R-r}}^{\nu_{R-r}|N^{-1}N_{R-r}\lambda_{R-r}|_{N_{R-r}}}$ на целые комплексные числа (ЦКЧ) $C_{\gamma_0(r,\nu_{R-r},\lambda_{R-r})} - jC_{\gamma_1(r,\nu_{R-r},\lambda_{R-r})}$. Так как для указанных коэффициентов приближениями служат дроби $C_{\gamma_0(r,\nu_{R-r},\lambda_{R-r})} - jC_{\gamma_1(r,\nu_{R-r},\lambda_{R-r})}/Q$, а не их числители, то одноименные отсчеты выходных (за исключением нулевого шага) сигналов базовых ДПФ (2) и их целочисленных аналогов (5), естественно, не совпадают. При этом правила формирования входных сигналов элементарных ДПФ и результирующего выходного сигнала алгоритма Винограда (см. (3), (4)) носят общий характер. В соответствии с этим, а также в целях простоты для одноименных отсчетов в рассматриваемых двух различных вариантах базовых ДПФ употребляются одинаковые обозначения. Для получения из отсчетов

$$X_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{R-r-1},\lambda_{R-r+1},\ldots,\lambda_R}(\lambda_{R-r}) =$$
$$= X'_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{R-r-1},\lambda_{R-r+1},\ldots,\lambda_R}(\lambda_{R-r}) + jX_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{R-r-1},\lambda_{R-r+1},\ldots,\lambda_R}(\lambda_{R-r}),$$

которые вычисляются по выражению (5) истинных значений, определяемых согласно (2), необходимо выполнить операции масштабирования

$$\hat{X}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{R-r-1},\lambda_{R-r+1},\ldots,\lambda_R}(\lambda_{R-r}) =$$
$$= \frac{1}{Q^{r+1}} X_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{R-r-1},\lambda_{R-r+1},\ldots,\lambda_R}(\lambda_{R-r})\ (\lambda_{R-r}),\ \text{где } r = \overline{0, R-1}. \qquad (6)$$

Ввиду (3) и (6) истинные значения отсчетов

$$x_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{R-r-1},\lambda_{R-r+1},\ldots,\lambda_R}(\nu_{R-r}) =$$
$$= x'_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{R-r-1},\lambda_{R-r+1},\ldots,\lambda_R}(\nu_{R-r}) + jx''_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{R-r-1},\lambda_{R-r+1},\ldots,\lambda_R}(\nu_{R-r})$$

входных сигналов ДПФ (5) имеют вид

$$\hat{x}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{R-r-1},\lambda_{R-r+1},\ldots,\lambda_R}(\nu_{R-r}) = \frac{1}{Q^r} x_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{R-r-1},\lambda_{R-r+1},\ldots,\lambda_R}(\nu_{R-r});\ r = \overline{0, R-1}.$$

Компьютерная модель (5) быстрой процедуры Винограда рассчитана на реализацию полностью в РМВ, поэтому на практике масштабированию подлежат лишь отсчеты выходных сигналов элементарных ДПФ заключительного (R–1)-го шага. При $r = R-1$ формула (6) дает

$$\hat{X}_{\lambda_2,\ldots,\lambda_R}(\lambda_1) = Q^{-R}\ X_{\lambda_2,\ldots,\lambda_R}(\lambda_1). \qquad (7)$$

Если Q принять равным двоичной экспоненте степени числа 2, то операции масштабирования (7) сводятся к тривиальному переносу запятой на R бит влево в двоичных кодах действительных и мнимых частей отсчетов $X_{\lambda_2,\ldots,\lambda_R}(\lambda_1)$.

Оценка сверху абсолютных величин действительных и мнимых частей ЦКЧ $X_{\lambda_2,\ldots,\lambda_R}(\lambda_1) = X'_{\lambda_2,\ldots,\lambda_R}(\lambda_1) + jX''_{\lambda_2,\ldots,\lambda_R}(\lambda_1)$ показывает, что полумощность M динамического диапазона $\mathbf{D} = \{-M, -M+1, \ldots, M-1\}$ ($M = \prod_{i=0}^{k-1} m_i$; m_0 – вспомогательный модуль, выбираемый из условий $m_0 \ge k-2$ и $m_k \ge k-2m_0+k-2$) минимально избыточной МСС (МИМСС), которая позволяет реализовать расчетные соотношения (5) в РМВ при всех $r = \overline{0,\ R-1}$, должна удовлетворять условию

$$M \geq P\left(\sqrt{2}\,Q\right)^{R} \prod_{i=1}^{R} N_i\,, \tag{8}$$

где P – полумощность диапазона $\hat{\mathrm{D}} = \{-P, -P+1, \ldots, P-1\}$ исходных данных.

3. Модульная компьютерная МИМА-модель трехкаскадного алгоритма Винограда для 1008-точечного ДПФ с основаниями 7, 9, 16

Рассмотрим ДПФ длины $N = N_1\, N_2\, N_3 = 7{\cdot}9{\cdot}16 = 1008$ ($R = 3$; $N_1 = 7$, $N_2 = 9$, $N_3 = 16$):

$$X(l) = \sum_{n=0}^{1007} x(n)\, w_{1008}^{nl}\ \ (l = \overline{0,\ 1007}). \tag{9}$$

Очевидно, что ДПФ (9) может быть осуществлено с помощью трехкаскадной (трехшаговой) процедуры Винограда с основаниями $N_1 = 7$, $N_2 = 9$, $N_3 = 16$. Согласно формулам (3) и (5) в рамках этой процедуры на начальном нулевом шаге ($r = 0$) выполняются $T_0 = N / N_3 = 63$ элементарных ДПФ длины $N_3 = 16$, описываемых системами равенств

$$\begin{cases} X'_{\nu_1,\,\nu_2}(\lambda_3) = \displaystyle\sum_{\nu_3=0}^{15}\Big(C_{\gamma_0(0,\nu_3,\lambda_3)}\, x'(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3) + C_{\gamma_1(0,\nu_3,\lambda_3)}\, x''(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3)\Big), \\ X''_{\nu_1,\,\nu_2}(\lambda_3) = \displaystyle\sum_{\nu_3=0}^{15}\Big(C_{\gamma_0(0,\nu_3,\lambda_3)}\, x''(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3) - C_{\gamma_1(0,\nu_3,\lambda_3)}\, x'(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3)\Big), \end{cases} \tag{10}$$

где $\lambda_3 = \overline{0,\ 15}$ при каждой паре $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbf{Z}_7 \times \mathbf{Z}_9$ ($\nu_1 = \overline{0,\ 6}$; $\nu_2 = \overline{0,\ 8}$).

На следующем шаге ($r = 1$) алгоритма Винограда реализуется $T_1 = N / N_2 = 112$ элементарных ДПФ длины $N_2 = 9$:

$$\begin{cases} X'_{\nu_1,\,\lambda_3}(\lambda_2) = \displaystyle\sum_{\nu_2=0}^{8}\Big(C_{\gamma_0(1,\nu_2,\lambda_2)}\, X'_{\nu_1,\,\nu_2}(\lambda_3) + C_{\gamma_1(1,\nu_2,\lambda_2)}\, X''_{\nu_1,\,\nu_2}(\lambda_3)\Big), \\ X''_{\nu_1,\,\lambda_3}(\lambda_2) = \displaystyle\sum_{\nu_2=0}^{8}\Big(C_{\gamma_0(1,\nu_2,\lambda_2)}\, X''_{\nu_1,\,\nu_2}(\lambda_3) - C_{\gamma_1(1,\nu_2,\lambda_2)}\, X'_{\nu_1,\,\nu_2}(\lambda_3)\Big), \end{cases} \tag{11}$$

где $\lambda_2 = \overline{0,\ 8}$ при каждой паре $(\nu_1, \lambda_3) \in \mathbf{Z}_7 \times \mathbf{Z}_{16}$ ($\nu_1 = \overline{0,\ 6}$; $\lambda_3 = \overline{0,\ 15}$).

На заключительном шаге ($r = 2$) выполнению подлежат $T_2 = N / N_1 = 144$ элементарных ДПФ длины $N_1 = 7$:

$$\begin{cases} X'_{\lambda_2,\,\lambda_3}(\lambda_1) = \displaystyle\sum_{\nu_1=0}^{6}\Big(C_{\gamma_0(2,\nu_1,\lambda_1)}\, X'_{\nu_1,\,\lambda_3}(\lambda_2) + C_{\gamma_1(2,\nu_1,\lambda_1)}\, X''_{\nu_1,\,\lambda_3}(\lambda_2)\Big), \\ X''_{\lambda_2,\,\lambda_3}(\lambda_1) = \displaystyle\sum_{\nu_1=0}^{6}\Big(C_{\gamma_0(2,\nu_1,\lambda_1)}\, X''_{\nu_1,\,\lambda_3}(\lambda_2) - C_{\gamma_1(2,\nu_1,\lambda_1)}\, X'_{\nu_1,\,\lambda_3}(\lambda_2)\Big), \end{cases} \tag{12}$$

где $\lambda_1 = \overline{0,\ 6}$ при каждой паре $(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{Z}_9 \times \mathbf{Z}_{16}$ ($\lambda_2 = \overline{0,\ 8}$; $\lambda_3 = \overline{0,\ 15}$).

Конечным результатом (см. формулы (8) и (13)) осуществляемого преобразования является сигнал

$$\hat{X} = \left\{X(l)\right\}_{l=\overline{0,\,1007}} = \left\{ X(l)/Q^3 \right\}_{l=\overline{0,\,1007}} = \left\{ X(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3)/Q^3 \right\}_{(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3)\in Z_7\times Z_9\times Z_{16}} =$$

$$= \left\{ \left(X'_{\lambda_2,\,\lambda_3}(\lambda_1) + j\, X''_{\lambda_2,\,\lambda_3}(\lambda_1) \right) / Q^3 \right\}_{(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3)\in Z_7\times Z_9\times Z_{16}}. \qquad (13)$$

Для получения отсчетов $\hat{X}(l)$ сигнала $\hat{X}$ в естественном порядке, т. е. в порядке возрастания значений аргумента l от 0 до 1007 в формуле (13) вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ должен пробегать кодовое пространство $\mathbf{C}_{\text{МСС}}(7, 9, 16)$ МСС с основаниями $N_1 = 7$, $N_2 = 9$, $N_3 = 16$, начиная со слова (0, 0, 0) с шагом (1, 1, 1).

Фигурирующие в системах равенств (10)–(12) константы

$$C_{\gamma_0(0,\,\nu_3,\,\lambda_3)} = \rfloor Q\cos\left(\frac{2\pi}{N_3}\,\nu_3\left|\frac{N_3}{N}\lambda_3\right|_{N_3}\right)\lfloor = \rfloor Q\cos\left(\frac{2\pi}{N_3}\left|\frac{N_3}{N}\,\nu_3\,\lambda_3\right|_{N_3}\right)\lfloor =$$

$$= \rfloor Q\cos\left(\frac{\pi}{8}\left|-\nu_3\,\lambda_3\right|_{16}\right)\lfloor = \rfloor Q\cos\left(\frac{\pi}{8}\left|\nu_3\,\lambda_3\right|_{16}\right)\lfloor; \qquad (14)$$

$$C_{\gamma_1(0,\,\nu_3,\,\lambda_3)} = \rfloor -Q\sin\left(\frac{\pi}{8}\left|\nu_3\,\lambda_3\right|_{16}\right)\lfloor; \qquad (15)$$

$$C_{\gamma_0(1,\,\nu_2,\,\lambda_2)} = \rfloor Q\cos\left(\frac{2\pi}{N_2}\left|\frac{N_2}{N}\,\nu_2\,\lambda_2\right|_{N_2}\right)\lfloor =$$

$$= \rfloor Q\cos\left(\frac{2\pi}{9}\left|-2\nu_2\,\lambda_2\right|_{9}\right)\lfloor = \rfloor Q\cos\left(\frac{2\pi}{9}\left|2\nu_2\,\lambda_2\right|_{9}\right)\lfloor; \qquad (16)$$

$$C_{\gamma_1(1,\,\nu_2,\,\lambda_2)} = \rfloor -Q\sin\left(\frac{2\pi}{9}\left|2\nu_2\,\lambda_2\right|_{9}\right)\lfloor; \qquad (17)$$

$$C_{\gamma_0(2,\,\nu_1,\,\lambda_1)} = \rfloor Q\cos\left(\frac{2\pi}{N_1}\left|\frac{N_1}{N}\,\nu_1\,\lambda_1\right|_{N_1}\right)\lfloor = \rfloor Q\cos\left(\frac{2\pi}{7}\left|2\nu_1\,\lambda_1\right|_{7}\right)\lfloor; \qquad (18)$$

$$C_{\gamma_1(2,\,\nu_1,\,\lambda_1)} = \rfloor Q\sin\left(\frac{2\pi}{7}\left|2\nu_1\,\lambda_1\right|_{7}\right)\lfloor. \qquad (19)$$

рассматриваются как элементы упорядоченного тем или иным способом 30-компонентного набора $\mathbf{C}_{\min}$.

Важнейшей отличительной особенностью предлагаемой модулярной реализации процедуры Винограда, описываемой соотношениями (10)–(12), является явное использование при выполнении операций умножения вместо значений констант C_γ их порядковых номеров $\gamma \in \mathbf{Z}_{30}$ в множестве $\mathbf{C}_{\min}$.

Пусть

$$\chi'_{\nu_1,\nu_2,\nu_3|i} = |\, x'(\nu_1,\ \nu_2,\nu_3)\,|_{m_i}\,, \qquad \chi''_{\nu_1,\nu_2,\nu_3|i} = |\, x''(\nu_1,\ \nu_2,\nu_3)\,|_{m_i}\,;$$
$$\mathrm{X}'_{\nu_1,\nu_2,\lambda_3|i} = |\, X'_{\nu_1,\,\nu_2}(\lambda_3)\,|_{m_i}\,, \qquad \mathrm{X}''_{\nu_1,\nu_2,\lambda_3|i} = |\, X''_{\nu_1,\,\nu_2}(\lambda_3)\,|_{m_i}\,;$$
$$\mathrm{X}'_{\nu_1,\lambda_2,\lambda_3|i} = |\, X'_{\nu_1,\,\lambda_3}(\lambda_2)\,|_{m_i}\,, \qquad \mathrm{X}''_{\nu_1,\lambda_2,\lambda_3|i} = |\, X''_{\nu_1,\,\lambda_3}(\lambda_2)\,|_{m_i}\,;$$
$$\mathrm{X}'_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3|i} = |\, X'_{\lambda_2,\,\lambda_3}(\lambda_1)\,|_{m_i}\,, \qquad \mathrm{X}''_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3|i} = |\, X''_{\lambda_2,\,\lambda_3}(\lambda_1)\,|_{m_i}\,;$$

$$\left.\begin{aligned}
\chi'_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\lambda_3,0|i} &= |\,\chi'_{\nu_1,\nu_2,\nu_3|i}\ C_{\gamma_0(0,\nu_3,\lambda_3)}\,|_{m_i}\,,\\
\chi''_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\lambda_3,0|i} &= |\,\chi''_{\nu_1,\nu_2,\nu_3|i}\ C_{\gamma_0(0,\nu_3,\lambda_3)}\,|_{m_i}\,,\\
\chi''_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\lambda_3,1|i} &= |\,\chi''_{\nu_1,\nu_2,\nu_3|i}\ C_{\gamma_1(0,\nu_3,\lambda_3)}\,|_{m_i}\,,\\
\chi'_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\lambda_3,1|i} &= |\,\chi'_{\nu_1,\nu_2,\nu_3|i}\ C_{\gamma_1(0,\nu_3,\lambda_3)}\,|_{m_i}\,;
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}
\chi'_{\nu_1,\nu_2,\lambda_2,\lambda_3,0|i} &= |\,\mathrm{X}'_{\nu_1,\nu_2,\lambda_3|i}\ C_{\gamma_0(1,\nu_2,\lambda_2)}\,|_{m_i}\,,\\
\chi''_{\nu_1,\nu_2,\lambda_2,\lambda_3,0|i} &= |\,\mathrm{X}''_{\nu_1,\nu_2,\lambda_3|i}\ C_{\gamma_0(1,\nu_2,\lambda_2)}\,|_{m_i}\,,\\
\chi''_{\nu_1,\nu_2,\lambda_2,\lambda_3,1|i} &= |\,\mathrm{X}''_{\nu_1,\nu_2,\lambda_3|i}\ C_{\gamma_1(1,\nu_2,\lambda_2)}\,|_{m_i}\,,\\
\chi'_{\nu_1,\nu_2,\lambda_2,\lambda_3,1|i} &= |\,\mathrm{X}'_{\nu_1,\nu_2,\lambda_3|i}\ C_{\gamma_1(1,\nu_2,\lambda_2)}\,|_{m_i}\,;
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned}
\chi'_{\nu_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,0|i} &= |\,\mathrm{X}'_{\nu_1,\lambda_2,\lambda_3|i}\ C_{\gamma_0(2,\nu_1,\lambda_1)}\,|_{m_i}\,,\\
\chi''_{\nu_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,0|i} &= |\,\mathrm{X}''_{\nu_1,\lambda_2,\lambda_3|i}\ C_{\gamma_0(2,\nu_1,\lambda_1)}\,|_{m_i}\,,\\
\chi''_{\nu_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,1|i} &= |\,\mathrm{X}''_{\nu_1,\lambda_2,\lambda_3|i}\ C_{\gamma_1(2,\nu_1,\lambda_1)}\,|_{m_i}\,,\\
\chi'_{\nu_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,1|i} &= |\,\mathrm{X}'_{\nu_1,\lambda_2,\lambda_3|i}\ C_{\gamma_1(2,\nu_1,\lambda_1)}\,|_{m_i}
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

при $i = \overline{1,\ k}$.

С помощью введенных обозначений искомые модулярные аналоги расчетных соотношений (10)–(12) компьютерного алгоритма для 1008-точечного ДПФ с основаниями 7, 9, 16 можно записать следующим образом:

$$\begin{cases}
\mathrm{X}'_{\nu_1,\nu_2,\lambda_3|i} = \left|\displaystyle\sum_{\nu_3=0}^{15}\left(\chi'_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\lambda_3,0|i} + \chi''_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\lambda_3,1|i}\right)\right|_{m_i}\,,\\[2ex]
\mathrm{X}''_{\nu_1,\nu_2,\lambda_3|i} = \left|\displaystyle\sum_{\nu_3=0}^{15}\left(\chi''_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\lambda_3,0|i} - \chi'_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\lambda_3,1|i}\right)\right|_{m_i}\,,
\end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases}
\mathrm{X}'_{\nu_1,\lambda_2,\lambda_3|i} = \left|\displaystyle\sum_{\nu_2=0}^{8}\left(\chi'_{\nu_1,\nu_2,\lambda_2,\lambda_3,0|i} + \chi''_{\nu_1,\nu_2,\lambda_2,\lambda_3,1|i}\right)\right|_{m_i}\,,\\[2ex]
\mathrm{X}''_{\nu_1,\lambda_2,\lambda_3|i} = \left|\displaystyle\sum_{\nu_2=0}^{8}\left(\chi''_{\nu_1,\nu_2,\lambda_2,\lambda_3,0|i} - \chi'_{\nu_1,\nu_2,\lambda_2,\lambda_3,1|i}\right)\right|_{m_i}\,,
\end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} X'_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3|i} = \left| \sum_{\nu_1=0}^{6} \left(\chi'_{\nu_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,0|i} + \chi''_{\nu_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,1|i} \right) \right|_{m_i}, \\ X''_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3|i} = \left| \sum_{\nu_1=0}^{6} \left(\chi''_{\nu_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,0|i} - \chi'_{\nu_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,1|i} \right) \right|_{m_i}, \end{cases} \tag{25}$$

где $\lambda_1 = \overline{0,\ 6}$ при каждой паре $(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{Z}_9 \times \mathbf{Z}_{16}$ ($\lambda_2 = \overline{0,\ 8}$; $\lambda_3 = \overline{0,\ 15}$); $i = \overline{1,\ k}$; $\lambda_2 = \overline{0,\ 8}$ при каждой паре $(\nu_1, \lambda_3) \in \mathbf{Z}_7 \times \mathbf{Z}_{16}$ ($\nu_1 = \overline{0, 6}$; $\lambda_3 = \overline{0,\ 15}$); $i = \overline{1,\ k}$; $\lambda_3 = \overline{0,\ 15}$ при каждой паре $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbf{Z}_7 \times \mathbf{Z}_9$ ($\nu_1 = \overline{0,\ 6}$; $\nu_2 = \overline{0, 8}$); $i = \overline{1,\ k}$.

Из выражений (13), (20)–(25) видно, что синтезированная компьютерная МИМА-модель алгоритма Винограда для ДПФ практически имеет абсолютно модульный операционный спектр и, несмотря на рекурсивную структуру, полностью реализуется в РМВ с помощью мультипроцессорной ТМОИ на k процессорах.

Заключение

В результате проведенных исследований по проблематике создания на основе МИМА новой мультипроцессорной вычислительной технологии решены следующие основные задачи.

1. В рамках модулярной кододекомпозиционной формы алгоритма Винограда для ДПФ разработана реализационная МИМА-модель, которая укладывается в аддитивно-мультипликативную модель вычислительных процессов, выполняемых полностью в РМВ.

2. Получена нижняя оценка для мощности динамического диапазона базовой МИМСС мультипроцессорной ТМОИ, обеспечивающая корректность применения РМВ в условиях возрастания величины отсчетов выходных сигналов элементарных ДПФ с увеличением номера итерации алгоритма Винограда.

3. На примере трехшаговой процедуры Винограда для 1008-точечного ДПФ с основаниями 7, 9, 16 продемонстрированы уникальные возможности мультипроцессорной ТМОИ в части повышения скорости за счет применения таблиц умножения на константы большой емкости, таблично-аккумулятивного метода суммирования вычетов по модулям МИМСС, а также больших и сверхбольших модулей.

4. Показано, что в рамках РМВ достигается значительное упрощение базовой версии МИМА вследствие использования минимального набора немодульных операций, включающего лишь входное и выходное кодовые преобразования.

Представленные разработки выполнены при финансовой поддержке Государственной программы ориентированных фундаментальных исследований «ИНФОТЕХ».

Список литературы

1. Коляда А.А., Пак И.Т. Модулярные структуры конвейерной обработки цифровой информации. – Мн.: Университетское, 1992. – 256 с.

2. Высокоскоростные методы и системы цифровой обработки информации / А.Ф. Чернявский, В.В. Данилевич, А.А. Коляда и др. – Мн.: Белгосуниверситет, 1996. – 376 с.

3. Ирхин В.П. Проектирование непозиционных специализированных процессоров. – Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1999. – 136 с.

4. А.с. №1732353 СССР. Устройство для вычисления ДПФ / Л.Н. Василевич, И.И. Гунько, А.А. Коляда // Открытия. Изобретения. – 1992. – № 17. – С. 121.

5. Alia G., Martinelli E. Optimal VLSI complexity design for high-speed pipeline FFT using RNS // Comput. and Elec. Eng. – 1998. – Vol. 24. – № 3. – P. 167–182.

6. RNS–FPT nerget architectures for orthogonal DWT / J. Ramirez, A. Garsia, P. Fernandez et al. // Electron. Lett. – 2000. – Vol. 36. – № 4. – P. 1198–1199.

7. Plessmann K. A parallel highly modular object-oriented computer architecture // 10-й юбил. Междунар. симп. по проблемам модулярных информационно-вычислительных систем и сетей: пленар. докл. Санкт-Петербург, Россия, 13–18 сентября, 1993. – М., 1996. – С. 97–109.

8. A modular multi-PC system for real-time applications / K. Plessmann, J. Wollert et al. // Там же. – С. 110–119.

9. Инютин С.А. Модулярные вычисления в сверхбольших компьютерных диапазонах // Изв. вузов. Сер. Электроника. – 2001. – № 6. – С. 65–73.

10. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: справочник. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.

11. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988. – 488 с.

12. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1989. – 448 с.

13. Крот А.М., Минервина Е.Б. Быстрые алгоритмы и программы цифровой спектральной обработки сигналов и изображений. – Мн.: Наука и техника, 1995. – 408 с.

14. Василевич Л.Н., Коляда А.А. Структура арифметических устройств модулярных процессоров БПФ конвейерного типа // Электронное моделирование. – 1989. – Т. 11. – № 6. – С. 15–20.

15. An architecture of high speed FFT processors, based on modular computer arithmetic / L.N. Vasilevich, A.A. Kolyada, E.A. Otlivanchik et al. // 5-th Int. Workshop on Digital Image Processing and Computer Graphics (DIP'94). Samara, Russia, aug. 22–26, 1994. – Washington, 1994. – P. 33–34.

16. Модулярные принципы построения процессоров ДПФ на основе алгоритма Винограда / А.М. Аксенов, Л.Н. Василевич, А.А. Коляда и др. // Современные методы обработки сигналов в системах измерения, контроля, диагностики и управления ОС-95: мат. науч.-техн. конф. Минск, Беларусь, 18–22 декабря 1995 г. – Мн., 1995. – Ч. 2. – С. 16–20.

17. Метод декомпозиции дискретного преобразования Фурье с помощью систем счисления / А.А. Коляда, В.В. Ревинский, М.Ю. Селянинов и др. // Современные вопросы оптического, радиационного материаловедения, информатики, радиофизики и электроники. – Мн.: Белгосуниверситет, 1996. – Ч. 2. – С. 36–41.

18. Модулярные принципы построения процессоров для дискретного преобразования Фурье / Л.Н. Василевич, А.А. Коляда, М.Ю. Селянинов и др. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2001. – № 4. – С. 108–117.

Поступила 12.05.05

Научно-исследовательское учреждение
«Институт прикладных физических проблем
им. А.Н. Севченко» Белгосуниверситета,
Минск, Курчатова, 7
e-mail: KOLYADA@bsu.by

A.F. Chernyavsky, A.M. Aksenov, A.A. Kolyada, V.V. Revinsky, H.V. Shabinskaya

MULTIPROCESSOR REALIZATION OF WINOGRAD'S ALGORITHM FOR DFT ON THE BASIS OF MINIMALLY SUPERFLUOUS MODULAR ARITHMETICS

On the basis of minimally superfluous modular arithmetics the multiprocessor computing model of Winograd's algorithm for DFT focused on the complete realization in a mode of modular calculations (MMC) is created. The estimation of the capacity of dynamic range to provide the correctness of MMC application is obtained.