

УДК 536.75

В.Ф. Дайлюденко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ АТТРАКТОРА ХАОТИЧЕСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Рассматривается метод статистического анализа хаотического временного ряда, основанный на исследовании неравномерности топологической динамики фазовых траекторий при последовательном увеличении размерности фазового пространства аттрактора, восстановленного из исследуемого ряда. Достоверность и сходимость данного метода подтверждаются посредством численного моделирования процессов в нелинейной динамической системе с запаздывающей обратной связью, а также моделирования гидродинамических процессов. При использовании данного метода достигается существенная экономия компьютерных ресурсов и снижение количества требуемых экспериментальных данных.

Введение

В последнее время возрос интерес к исследованию и обработке временных рядов, отображающих эволюцию нелинейных динамических систем с хаотическим поведением, и достигнут значительный прогресс в данной области [1–6]. Это вызвано тем, что хаотические временные ряды (ХВР) позволяют получить достаточно важную информацию о поведении исследуемого объекта. Интегральная неустойчивость фазовых траекторий аттрактора ХВР выражается в наличии положительных показателей Ляпунова, характеризующих расходимость достаточно близких траекторий [2, 5]. Традиционные методы статистического анализа (преимущественно спектрально-корреляционные) не позволяют получить достаточно информации об исследуемых ХВР. В частности, энергетические спектры случайного и хаотического временных рядов имеют одинаковую структуру, поэтому с помощью спектрального анализа обнаружить различие между случайным и хаотическим сигналами не представляется возможным [4]. В связи с этим при обработке ХВР широкое применение получили методы фрактально-топологического анализа, которые можно рассматривать как развитие и дополнение спектрально-корреляционных подходов. Фрактально-топологические методы основаны на анализе метрических свойств исследуемого аттрактора с учетом стохастических особенностей его траекторий и позволяют определить ряд характеристик (например, минимальную размерность вложения, спектр фрактальных размерностей), которые представляют собой важные статистические параметры исследуемых ХВР [6–8].

Основной целью настоящей работы является совершенствование метода анализа топологической стабилизации фазовых траекторий, предложенного в работе [8], и применение данного метода для обработки сигналов с выхода нелинейных динамических систем с последствием, называемых еще системами с запаздывающим аргументом [9–10], а также для моделирования гидродинамических процессов. В статье разрабатывается алгоритм нелинейного статистического анализа ХВР, позволяющий существенно уменьшить количество требуемых компьютерных ресурсов и экспериментальных данных при анализе топологической стабилизации аттрактора, а также повысить точность за счет уменьшения вычислительных операций, обеспечивая тем самым оптимизацию вычислительного процесса. Топологические характеристики, рассчитанные в результате применения данного алгоритма, позволяют определить степень сложности исследуемого нелинейного процесса и дают информацию о топологической структуре аттрактора, что является существенным для реализации математического моделирования (включая реконструкцию аттрактора системы), а также для прогнозирования эволюции исследуемого процесса [2].

1. Локализованный анализ топологической стабилизации аттрактора исследуемого сигнала

Рассмотрим эволюцию сложной системы, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\vec{u}}^{(d)} = \vec{F}^{(d)}(\vec{u}^{(d)}), \quad (1)$$

где $\vec{u}^{(d)}$ и $\vec{F}^{(d)}$ – вектор кинетических переменных и нелинейная векторная функция от этих переменных в d -мерном фазовом пространстве R^d соответственно, т. е. $\vec{F}^{(d)}$ порождает d -мерный поток в R^d . Значение d определяет количество дифференциальных уравнений в формуле (1), необходимых для описания временной эволюции исследуемой системы. Как было доказано Такенсом [11], фазовые траектории аттрактора системы можно восстановить (с сохранением их метрических свойств) по временной последовательности отсчетов $\eta(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, только одной кинетической переменной. Полагаем, что $\eta(i\Delta t)$ представляют собой отсчеты ХВР, измеренных с интервалом Δt на выходе системы, $T=(N-1)\Delta t$ – общее время измерения. В частности, в области биомедицинских исследований, где методы фрактально-топологического анализа применяются весьма широко [3, 6], $\eta(i\Delta t)$ могут быть интерпретированы в качестве отсчетов сигнала, получаемого при регистрации электрокардиограммы, энцефалограммы, электромиограммы и т. д.

Множество точек $\{\vec{z}_i^{(m)}\}$ аттрактора Такенса может быть получено в фазовом пространстве R^m по формуле [2, 6, 11]

$$\vec{z}_i^{(m)} = (\eta_i, \eta_{i+q}, \eta_{i+2q}, \dots, \eta_{i+(m-1)q}), \quad (2)$$

где $\eta(i\Delta t) = \eta_i$, $i=1,2,\dots,L^{(m)}$, $L^{(m)} = N - m + 1$; причем $\tau = q\Delta t$ представляет собой временной интервал, определяющий степень прореживания исходного ХВР при построении фазовых траекторий, m называется размерностью вложения аттрактора. Проблема вложенности геометрических многообразий в метрическое пространство представляет собой достаточно важную проблему топологии [12], которая получила свое дальнейшее развитие для многомерных случаев в связи с исследованиями в теории нелинейных динамических систем [1, 2, 6]. На основании анализа метрических свойств реконструированного по формуле (2) аттрактора показано, что имеет место следующая оценка для размерности вложения (при произвольном τ) [11, 13]:

$$m \geq 2d + 1. \quad (3)$$

Аналогичное соотношение справедливо для оценки m с использованием размерности Хаусдорфа d_0 [11, 7]: $m > 2d_0$. В результате дальнейших исследований топологической структуры аттрактора было установлено [1, 2, 7], что значение m , соответствующее формуле (3), является избыточным и восстановление аттрактора системы с сохранением его топологических свойств может быть произведено при $m \leq 2d + 1$. В то же время значение m ограничено снизу количеством степеней свободы исследуемого потока: $m \geq d$ [6].

В данной работе фазовое пространство R^m считается евклидовым. В соответствии с формулой (2) фазовые траектории, формирующие аттрактор, могут быть представлены в качестве совокупности q разреженных последовательностей X_1, X_2, \dots, X_q , сдвинутых на один отсчет относительно друг друга, т. е. $X_s = \{\vec{z}_{s+q(k-1)}^{(m)}\}_{k=1}^{L_s^{(q,m)}}$. Как показано в работах [8, 14], достаточно точные результаты моделирования топологической динамики могут быть получены при восстановлении R_T^m по одной последовательности X_q , полученной посредством редуцированной последовательности отсчетов ХВР

$$\xi_l = \eta_{lq}, \quad (4)$$

где $l = 1, 2, \dots, N_\tau$, причем $N_\tau \approx N/q$ при $N \gg q$. Фазовые траектории аттрактора R_T^m восстанавливаются следующим образом:

$$\bar{x}_j^{(m)} = (\xi_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{j+m-1}). \quad (5)$$

Будем говорить, что аттрактор R_T^m полностью определен, если известны все координаты точек $\{\bar{x}_j^{(m)}\}$ его фазовых траекторий. Исходными данными для вычисления фрактально-топологических характеристик аттрактора ХВР является множество $P^{(m)}$ значений расстояний $r_{ij}^{(m)}$ между точками $\bar{x}_j^{(m)} \in R_T^m$, $i, j = 1, 2, \dots, L$, $i \neq j$ [1, 2]. Поэтому актуальной задачей является минимизация представления R_T^m через элементы множества $P^{(m)}$, поскольку таким образом может быть решена проблема уменьшения вычислительной сложности алгоритмов топологического анализа. Минимизация полного определения R_T^m с учетом (4), (5) может быть произведена посредством построения множества $A^{(m)}$ [8]:

$$A^{(m)} = \bar{x}_1^{(m)} \cup \{d_l^{(m)}\} \cup \{r_{l\uparrow}^{(m)}\}, \quad (6)$$

где члены ориентационной последовательности $\{d_l^{(m)}\}$ определяются по формуле

$$d_l^{(m)} = -\text{sgn}(\Delta \xi_{l+m-1}^{\xi}),$$

причем предполагается, что $\text{sgn}(0) = 1$. Расстояния $r_{l\uparrow}^{(m)}$ между соседними точками $\bar{x}_l^{(m)}$ и $\bar{x}_{l+1}^{(m)}$ фазовых траекторий R_T^m вычисляются следующим образом:

$$r_{l\uparrow}^{(m)} = \left[\sum_{i=1}^m \Delta \xi_{l+i-1}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

где $\Delta \xi_k^{\xi} = \xi_k - \xi_{k+1}$. В работе [8] показано, что отображение $A^{(m)} \Rightarrow X^{(m)}$, где $X^{(m)} = \{\bar{x}_j^{(m)}\}$, и обратное существуют и единственны, а удаление из $A^{(m)}$ хотя бы одного элемента уже нарушает однозначность отображения $A^{(m)} \Rightarrow X^{(m)}$. Следовательно, множество $A^{(m)}$ содержит минимально возможный набор компонент, необходимых для полного определения R_T^m .

С другой стороны, при последовательном увеличении размерности фазового пространства ($R^m \rightarrow R^{m+1}$) происходит сдвиг значений ориентационной последовательности $\{d_l^{(m)}\}$ на единицу, т. е. $d_l^{(m+1)} = d_{l+1}^{(m)}$, где $l = 1, 2, \dots, L^{(m+1)} - 1$. Иными словами, ориентационная последовательность, соответствующая R_T^m , повторяется при реконструкции R_T^{m+1} , кроме первого члена $d_1^{(m)}$, который исключается в R^{m+1} вследствие уменьшения длины последовательности $\{d_l^{(m)}\}$ на единицу при $R^m \rightarrow R^{m+1}$. Следовательно, для оценки изменений топологической структуры фазовых траекторий при $R^m \rightarrow R^{m+1}$ достаточно исследовать динамику преобразования $\{r_{l\uparrow}^{(m)}\} \Rightarrow \{r_{l\uparrow}^{(m+1)}\}$. Для этого определим последовательность коэффициентов локального растяжения по фазовым траекториям:

$$\delta_j^{(m\uparrow)} = \frac{r_{j\uparrow}^{(m+1)}}{r_{j\uparrow}^{(m)}}. \quad (8)$$

В настоящей работе неравномерность топологических изменений в R_T^m при $R^m \rightarrow R^{m+1}$ предлагается оценивать с помощью ее сравнения со случаем идеальной топологической стабилизации (ИТС) [8], при которой изменение расположения соседних точек фазовой траектории является полностью равномерным (иными словами, подчиняется линейному закону) и имеет место условие $\frac{r_{j\uparrow}^{(m+1)}}{r_{j\uparrow}^{(m)}} = \delta^{(m\uparrow)}$, где значение $\delta^{(m\uparrow)}$ одинаково для всех $\vec{x}_j^{(m)} \in R_T^m$. Для этого

введем следующую интегральную оценку неравномерности топологической динамики:

$$Z_\delta(m) = \sigma(\delta_j^{(m\uparrow)}), \quad (9)$$

где $\sigma(\delta_j^{(m\uparrow)})$ есть среднеквадратическое отклонение значений $\delta_j^{(m\uparrow)}$ по точкам R_T^m , определяемое по формуле

$$\sigma(\delta_j^{(m\uparrow)}) = \left(\frac{1}{\Delta N} \sum_{j=i_0}^{N_{\tau 1}} (\delta_j^{(m\uparrow)} - \langle \delta_j^{(m\uparrow)} \rangle)^2 \right)^{1/2}, \quad (10)$$

где $\langle \delta_j^{(m\uparrow)} \rangle = \frac{1}{\Delta N} \sum_{j=i_0}^{N_{\tau 1}} \delta_j^{(m\uparrow)}$, $\Delta N = N_{\tau 1} - i_0 + 1$. Очевидно, что в случае ИТС выполняется равенство $Z_\delta(m) \equiv 0$.

Теорема. При $m \rightarrow \infty$ имеет место

$$Z_\delta(m) \rightarrow 0, \quad (11)$$

причем данное условие выполняется асимптотически для ХВР.

Доказательство производится так же, как и в работе [8].

В качестве меры отклонения топологической динамики R_T^m от ИТС целесообразно использовать формулу (9). Однако при малых значениях m топологическая нестабильность достигает весьма больших значений [8], поэтому в настоящей работе для оценки топологической нестабильности предлагается следующая нормированная величина:

$$\tilde{Z}_\delta(m) = \frac{Z_\delta(m)}{\langle \delta_j^{(m\uparrow)} \rangle}. \quad (12)$$

С учетом (10) выражение (12) может быть переписано в виде

$$\tilde{Z}_\delta(m) = \left(\frac{1}{\Delta N} \sum_{j=i_0}^{N_{\tau 1}} (\tilde{\delta}_j^{(m\uparrow)} - 1)^2 \right)^{1/2}, \quad (13)$$

где $\tilde{\delta}_j^{(m\uparrow)} = \frac{\delta_j^{(m\uparrow)}}{\langle \delta_j^{(m\uparrow)} \rangle}$. Формула (13) показывает, что характеристика топологической неравномерности, предложенная в настоящей работе, позволяет учесть любые отклонения от

ИТС в отличие от меры, приведенной в работе [8], которая характеризует лишь среднее отклонение от симметричности значений топологической последовательности по отношению к единичному уровню.

Зависимость (13) может быть использована для определения минимальной размерности вложения m_0 аттрактора R_T^m . Значение m_0 необходимо для оценки минимального количества базисных векторов и позволяет найти степень сложности исследуемых ХВР. Определение m_0 предполагается производить с учетом следующих особенностей топологической кривой $\check{Z}_\delta(m)$. Во-первых, при $m \geq m_0$ имеет место $\check{Z}_\delta(m) < \varepsilon$, где ε является достаточно малой величиной, определяющей отклонение от ИТС. С другой стороны, в области $m \in [m_0 - \delta m, m_{\max}]$ топологическая кривая $\check{Z}_\delta(m)$ обнаруживает различное поведение при $m < m_0$ и $m \geq m_0$: в первом случае зависимость $\check{Z}_\delta(m)$ изменяется монотонно, а во втором она принимает приблизительно постоянное значение (т. е. находится в ε -окрестности нулевого уровня, что подтверждается результатами численных экспериментов, полученных в работе [14]). Поэтому следует ожидать, что при $m = m_0$ относительная неравномерность зависимости (13), определяемая по формуле

$$\delta\check{Z}_\delta(m) = \frac{\Delta\check{Z}_\delta(m-1)}{\Delta\check{Z}_\delta(m)},$$

принимает максимальное значение. Это используется в настоящей работе для оценки значения m_0 исследуемого аттрактора. Члены разностной последовательности $\{\Delta\check{Z}_\delta(m)\}$ определяются как $\Delta\check{Z}_\delta(m) = |\check{Z}_\delta(m+1) - \check{Z}_\delta(m)|$. Очевидно, при достаточно больших значениях m последовательность $\{\delta\check{Z}_\delta(m)\}$ может рассматриваться в качестве аппроксимации производной достаточно гладкого отображения $F(x)$

$$\delta\check{Z}_\delta \cong \left| \frac{dF(\check{Z}_\delta(m))}{d\check{Z}_\delta} \right|^{-1}$$

в предположении, что отображение $F(x)$ определяет топологическую кривую с помощью одномерных итераций, т. е. $\check{Z}_\delta(m+1) = F(\check{Z}_\delta(m))$. Поэтому в дальнейшем будем называть $\delta\check{Z}_\delta(m)$ дифференциальной неравномерностью (ДН) топологической кривой (12), причем принцип максимального значения ДН является определяющим при оценке оптимального значения m_0 .

2. Численное моделирование динамических систем с запаздывающим аргументом

Ряд технических и биологических систем [15–17] описывается при помощи нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида

$$\dot{u} = g_1(u(t)) + g_2(u(t - \Delta T)), \quad (14)$$

где g_1 и g_2 – некоторые в общем случае нелинейные функции, определяющие динамику эволюции исследуемой системы; ΔT – время запаздывания. Для нахождения решения (14) начальное условие $u(t) = \varphi(t)$ должно быть задано на сегменте $t \in [0, \Delta T]$.

Исследованиям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (ДУО), которые могут иметь запаздывание или опережение во времени, уделялось значительное внимание в связи с развитием теории автоматического регулирования и управления, а также ракетостроения [10, 18]. Так, в работе [18] показано, что посредством ДУО может быть осуществлено моделирование процесса сгорания топлива в ракетном двигателе. В связи с этим был достигнут значительный прогресс в области исследований ДУО [17, 19], причем в дальнейшем данные исследования проводились в области применения ДУО к моделированию нелинейных процессов в технике и медицине [20]. По отношению к радиофизическим приложениям уравнение (14) описывает работу генераторов с запаздывающей обратной связью, которые в течение последних нескольких десятилетий являются постоянным объектом теоретических и экспериментальных исследований [9, 15], причем все большее внимание при моделировании таких систем уделяется анализу процессов со стохастической динамикой, в том числе в системах квантовой электроники. Применяя к выражению (14) аппроксимацию Эйлера $\dot{u} \cong \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t}$, перепишем его в виде разностного уравнения

$$u_{n+1} = H(u_n, u_{n-\tilde{n}}), \quad (15)$$

где $\tilde{n} = \frac{\Delta T}{\Delta t}$. Выражение (15) определяет итерационную последовательность, в которой для вычисления каждого последующего отсчета необходимо знать не только значение предыдущего, но и отстоящего от данного на $\tilde{n} + 1$ интервалов дискретизации (характерная черта «немарковского» процесса, в отличие от марковской последовательности, где каждый отсчет полностью определяется предыдущим значением временной последовательности).

С целью упрощения анализа при исследовании основных автоколебательных режимов (затухающего, периодического, стохастического) [9] полагаем в формуле (14) функцию g_1 линейной, тогда (14) сводится к частично нелинейному уравнению с запаздывающим аргументом

$$\dot{u} = \alpha u(t) + g_2(u(t - \Delta T)) + \alpha_0, \quad (16)$$

в котором нелинейный отклик проявляется через \tilde{n} отсчетов, α и α_0 – постоянные. Уравнения типа (16) широко используются в физике, биологии, медицине, экологии [17]. В частности, для моделирования колебательных процессов в эквивалентной электрической схеме, соответствующей рекуррентной нейронной сети Хопфилда, применяется следующая система уравнений, аналогичных уравнению (16) [16]:

$$\dot{v}_i(t) = -\frac{v_i(t)}{\eta_i} + \sum_j T_{ij} f(v_j(t - \Delta T_j)) + \alpha_i I_i,$$

где уровень напряжения $v_i(t)$ определяет состояние i -го нейрона; $f(v_j(t - \Delta T_j))$ представляет сигмоидальную нелинейность, выражаемую через $\tanh(\beta v_i)$; I_i – ток смещения; η_i и α_i – постоянные цепи; T_{ij} – матрица, отображающая взаимодействие между нейронами.

В настоящей работе для компьютерного моделирования автоколебательного процесса для ДУО (16) используется дифференциальное уравнение Маккея – Гласса (аналогично [2])

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{a\xi(t - \Delta T)}{1 + [\xi(t - \Delta T)]^c} - b \xi(t). \quad (17)$$

Начальные условия (17) ($\xi(t) = 0,9$ при $0 \leq t \leq \Delta T$) и значения параметров ($a = 0,2; b = 0,1; c = 10$) принимались такими же, как в работах [1–2, 8, 14]. Для реконструкции ХВР применим к уравнению (17) конечно-разностную аппроксимацию дифференциального оператора и аналогично (15) получим

$$\xi(i) = \beta \xi(i-1) + \Delta t \phi(\xi(i - \Delta \tilde{T} - 1)), \quad (18)$$

где $\beta = 1 - \Delta t b$, $\phi(\xi) = \frac{a\xi}{1 + \xi^c}$. Модель (17), (18) позволяет с небольшими компьютерными за-

тратами получить временные последовательности, иллюстрирующие эволюцию автоколебательной системы и увеличение ее степеней свободы при возрастании величины ΔT : затухание колебаний к фиксированной точке \rightarrow периодические колебания \rightarrow хаотический процесс. Очевидно, что ΔT здесь играет роль управляющего параметра. Полученные численные результаты реконструкции ХВР хорошо согласуются с данными линеаризованного анализа устойчивости (17), согласно которому при $\Delta T > 16,8$ уравнение (17) действительно обнаруживает хаотическое поведение, причем переход к хаосу происходит через бифуркации с последовательным удвоением периода (ссылки на соответствующие источники приведены в работе [8]).

Для локализованного топологического анализа аттрактора, восстановленного из ХВР, вычислялась следующая топологическая зависимость:

$$\Delta Z_{\delta}^{msv}(m) = \sigma_{\mathfrak{Z}}(\Delta \tilde{Z}_{\delta}(m_1)), \quad (19)$$

где $\sigma_{\mathfrak{Z}}(\cdot)$ есть среднеквадратическое отклонение по сегменту $\mathfrak{Z}(m) \subset \Omega$, т.е. $m_1 \in \mathfrak{Z}(m) = [m, m + \delta m - 1]$, $m = 1, 2, \dots, m_{\max} - \delta m - 1$, причем $\Omega = [1, m_{\max} - 1]$ представляет собой область, на которой определена зависимость $\Delta \tilde{Z}_{\delta}(m) = |\tilde{Z}_{\delta}(m+1) - \tilde{Z}_{\delta}(m)|$. При этом в пределах сегмента $\mathfrak{Z}(m)$ m_1 последовательно принимает значения $m_1 = m, m+1, \dots, m + \delta m - 1$. Оценка ДН кривой топологической неустойчивости производилась в соответствии с соотношением

$$\delta Z_{\delta}^{msv}(m) = (A_{nor}(m))^3 \frac{\Delta Z_{\delta}^{msv}(m-1)}{\Delta Z_{\delta}^{msv}(m)}, \quad (20)$$

где $m = 2, 3, \dots, m_{\max} - \delta m - 2$; дополнительный нормирующий множитель A_{nor} определяется по формуле

$$A_{nor}(m) = \frac{S(m)}{\tilde{Z}_{\delta}(m) + 1}, \quad (21)$$

причем показатель стабилизации $S(m)$ вычисляется на основании соотношения

$$S(m) = \frac{\tilde{Z}_{\delta}(m+1) + 1}{\tilde{Z}_{\delta}(m) + 1}. \quad (22)$$

Применение дополнительного поэлементного сглаживания в формулах (19), (20) позволяет повысить точность анализа неравномерности топологической кривой по сравнению с непосредственным вычислением $\delta \tilde{Z}_{\delta}(m)$. Действительно, при прямой обработке зависимости (12), полученной из отсчетов ХВР, любая пара отсчетов, достаточно близких друг к другу по

величине, может привести к резкому увеличению ДН и получению таким образом «ложного» максимума при определении значения m_0 . Использование же сглаживающего метода позволяет получить кривую, в которой происходит уменьшение локальных неоднородностей (такие локальные неоднородности могут носить случайный характер, особенно при измерении ХВР на выходе реальных объектов, из-за наличия шумов). В результате получаем кривую (19), в которой более точно выражено «критическое» изменение топологической неравномерности в точке $m = m_0$. Заметим, что подобные сглаживающие методы широко применяются при обработке сигналов, причем сегменты \mathfrak{Z} могут быть при этом как постоянной длины [6] (такое моделирование проведено в настоящей работе аналогично методу «скользящего среднего»), так и иметь возрастающую длину [3] (это позволяет произвести интегрирующие преобразования последовательности, учесть корреляцию на интервалах достаточно большой длительности и в то же время уменьшить влияние шумовой составляющей).

В ходе вычислительных экспериментов получена асимптотическая сходимость алгоритма, обоснованная в предыдущем разделе, а также показано резкое уменьшение уровня $\tilde{Z}_\delta(m)$ в точке $m = m_0$. Результаты численного моделирования ДН (рис. 1, 2) показывают достаточно высокую точность определения m_0 . При этом зависимость $\tilde{Z}_\delta(m)$ была получена по формуле (13) при следующих граничных значениях: $i_0 = \left[\frac{\Delta T + 2}{\tau} \right] + 1$; $N_{\tau 1} = N_\tau - m - 2$;

[.] означает целую часть числа. В качестве исходного временного ряда $\{\xi(i)\}$ использовалась последовательность отсчетов, полученная в соответствии с формулой (18). Далее производились прореживание $\{\xi(i)\}$ с целью получения редуцированной последовательности $\{\xi_j\}$ (в соответствии с выражением (4)) и расчет последовательности $\{\delta_j^{(m\uparrow)}\}$ по формулам (7), (8), после чего и рассчитывалась зависимость (13). Затем производилось сглаживание разностной топологической кривой в соответствии с выражением (19), что, по существу, означает замену разностной топологической зависимости среднеквадратическим отклонением по ее сегментам. Наконец, расчет ДН согласно выражениям (20)–(22) позволяет определить значение $m = m_0$, после которого зависимость (13) имеет асимптотически постоянный, близкий к нулю уровень.

Нормировка (21) с использованием показателя стабилизации $S(m)$ позволяет устранить ложные максимумы при $m < m_0$, которые могут иметь место из-за высокой топологической нестабильности фазовых траекторий при начальных значениях m , в то время как при $m \geq m_0$ данная нормировка практически не изменяет значений неравномерности из-за того, что при этом $S(m) \approx 1$ и $\tilde{Z}_\delta \leq \varepsilon \ll 1$. Определение m_0 на основе расчета ДН (20) является более предпочтительным, чем при анализе ε -сходимости кривых (12), (13), поскольку значения ε являются различными при изменении ΔT .

На рис. 1 представлены результаты численного моделирования ДН (20) для наиболее типичных случаев (исследованных в работе [2] с помощью алгоритма Грассбергера – Прокаччия). Как следует из изображенных на рис. 1 зависимостей, значения m_0 равны при этом соответственно 4, 4, 6 и 17. Данные результаты определения m_0 полностью совпадают с полученными в работе [2], что подтверждает достоверность предложенного алгоритма. В то же время данные значения были получены в настоящей работе при $N=1500$, что в среднем на порядок меньше, чем в работе [2]. Дополнительное уменьшение вычислительных операций при определении m_0 достигается по сравнению с алгоритмом Грассбергера – Прокаччия за счет того, что при локально-топологическом исследовании достаточно построения лишь одной топологической зависимости с последующим анализом ее ДН, в то время как при определении корреляционных

размерностей необходимо при каждом значении m строить log-log зависимость, отображающую фрактальные свойства распределения точек R_T^m по ячейкам достаточно малого размера.

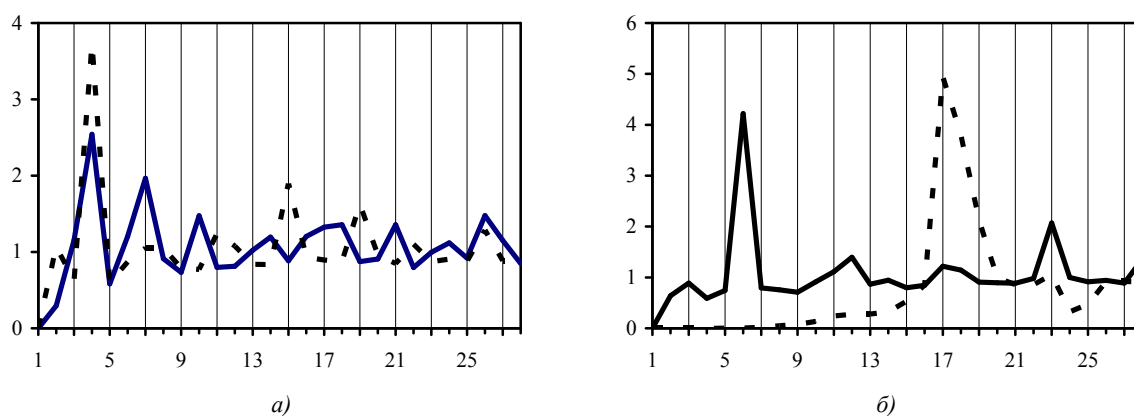


Рис. 1. Зависимость дифференциальной неравномерности $\delta Z_\delta^{msv}(m)$, рассчитанная при $\Delta t = 1$ с целью подтверждения достоверности алгоритма:
 а) $\tau=6, \Delta T=17$ (сплошная линия) и $\tau=9, \Delta T=30$ (пунктирная);
 б) $\tau=6, \Delta T=30$ (сплошная линия) и $\tau=6, \Delta T=100$ (пунктирная)

На рис. 2 изображены кривые ДН, отображающие изменение характера топологической стабилизации в зависимости от прореживания, произведенного согласно формуле (4). Из рис. 1, 2 следует, что на достаточно большом интервале изменения τ значение m_0 монотонно уменьшается с ростом τ . Это хорошо согласуется с результатами, полученными в работе [1], где показано, что увеличение интервала прореживания (в соответствии с выражениями (2), (4)) временного ряда, полученного при интегрировании уравнения (17), действительно приводит к уменьшению размерности вложения аттрактора, восстановленного из ХВР согласно (2), в частности, при $\Delta T=30$ и $4 < \tau < 10$.

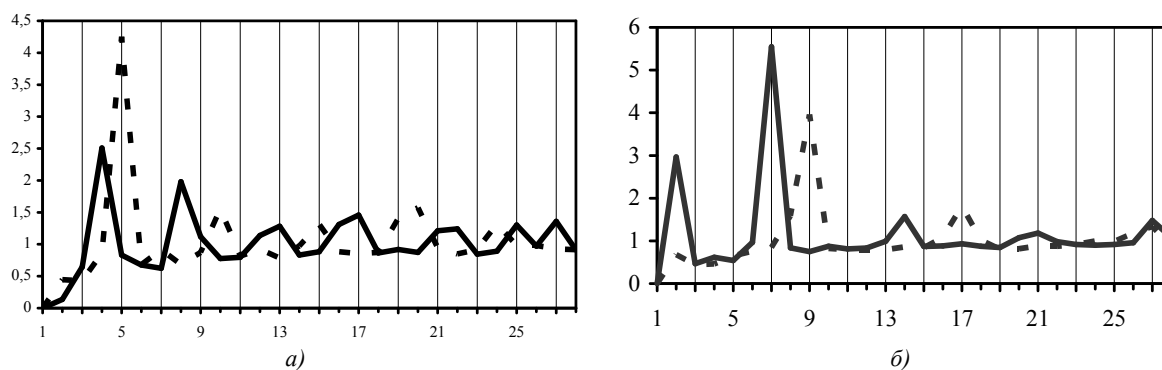


Рис. 2. Влияние прореживания фазовых траекторий (т. е. параметра τ) на величину минимальной размерности вложения показано посредством расчета зависимости $\delta Z_\delta^{msv}(m)$ при $\Delta T = 30$:
 а) $\tau=8$ (сплошная линия) и $\tau=7$ (пунктирная); б) $\tau=5$ (сплошная линия) и $\tau=4$ (пунктирная)

3. Численное моделирование алгоритма для гидродинамических процессов

Моделирование гидродинамических процессов проводилось посредством решения дифференциального уравнения Навье – Стокса конечноэлементными методами в пакете STAR-CD [21]. Исходные данные временной эволюции давления были получены в результате вычислительного эксперимента моделирования газового потока, проходящего через цилиндрическую замкнутую область, в которой размещалась вращающаяся турбина с одной лопастью. Скорость

вращения турбины составляла 300 об/мин, плотность рабочего вещества $1,205 \text{ кг/м}^3$, вязкость $1,81 \cdot 10^{-5}$. Данные рассчитывались в двух контрольных точках: на боковой поверхности лопасти (точка 1) и в рабочей области камеры на некотором удалении от лопасти (точка 2). Полученные временные ряды показаны на рис. 3, а, б соответственно, они отражают динамику квазипериодического процесса. Численное моделирование топологической стабилизации для аттракторов, соответствующих полученным временным рядам, производилось по формулам (13), (19). Из результатов, представленных на рис. 4, следует, что вычислительный процесс обнаруживает монотонную сходимость в точках 1 и 2, причем для аттракторов в точке 1 $m_0 \approx 3$, в то время как для точки 2 $m_0 \approx 4$.

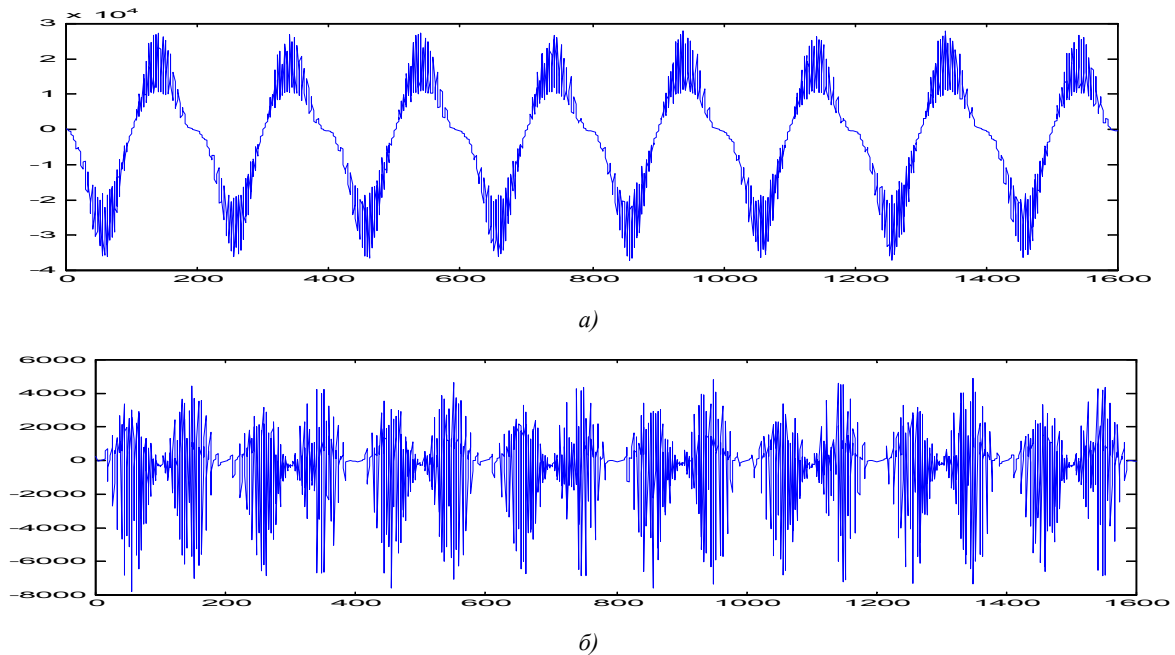


Рис. 3. Отсчеты временного ряда, полученные в результате моделирования измерения давления P (Па) в двух различных точках рабочей области

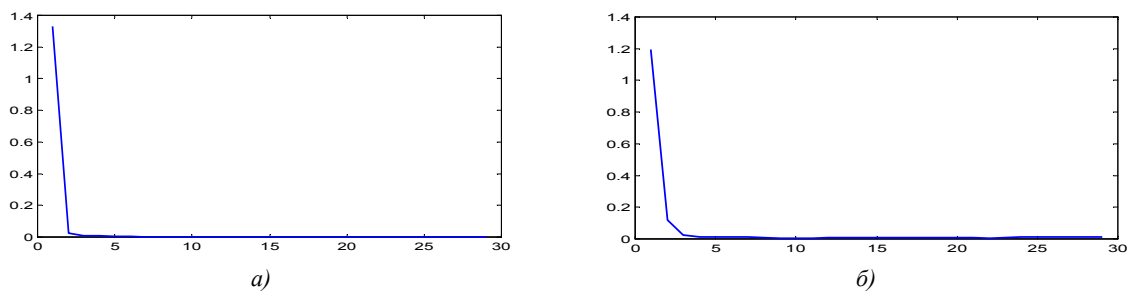


Рис. 4. Топологическая зависимость $\Delta Z_{\delta}^{msv}(m)$: а) для точки 1; б) для точки 2 рабочей области

Данные значения показывают увеличение сложности процесса по мере удаления от поверхности лопастей. Это вызвано тем, что по мере удаления от поверхности равномерно вращающейся лопасти в рабочей области уменьшается воздействие периодического движения и возрастает интенсивность вихревых и турбулентных потоков.

Заключение

В работе представлена модификация локально-топологического анализа аттрактора ХВР, позволяющая повысить точность и достоверность определения минимальной размерности вложения. Предложенный метод позволяет осуществить моделирование динамики топологической

структуры аттрактора, восстановленного из ХВР, при последовательном увеличении размерности вложения и получить статистическую оценку неравномерности изменения метрических свойств аттрактора. На основании предложенного метода разработан вычислительный алгоритм, позволяющий с помощью анализа ДН полученной топологической кривой определить значение m_0 по максимальному значению ДН. Благодаря локализации вычислительного процесса данный алгоритм обеспечивает значительное уменьшение количества экспериментальных данных и компьютерных ресурсов по сравнению с известными [1, 2, 6]. Результаты компьютерного моделирования подтвердили асимптотическую сходимость и достаточно высокую точность алгоритма. Предложенный алгоритм может быть использован для обработки различных временных последовательностей, содержащих ХВР, в различных биомедицинских и технических приложениях. В частности, в гидродинамике данный подход может быть использован для оценки степеней свободы исследуемого процесса m_0 и для определения перехода к турбулентности, поскольку такой переход сопровождается резким увеличением m_0 , как это показано в результате многочисленных теоретических и экспериментальных исследований [22].

Список литературы

1. Liebert W., Pawelzik K., Schuster H.G. Optimal embedding of chaotic attractor from topological consideration // *Europhys. Lett.* – 1991. – V. 14. – № 6. – P. 521–526.
2. Casdagli M. Nonlinear prediction of chaotic time series // *Physica D.* – 1989. – V. 35. – № 3. – P. 335–356.
3. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series / C.-K. Peng, S. Havlin, H.E. Stanley, A.L. Goldberger // *Chaos.* – 1995 – V. 5. – № 1. – P. 82–87.
4. Tsonis A.A., Elsner J.B. Nonlinear prediction as a way of distinguishing chaos from random fractal sequences // *Nature.* – 1992. – V. 358. – № 6362. – P. 217–222.
5. Прогноз качественного поведения динамической системы по хаотическому временному ряду / А.М. Фейгин, Я.И. Мольков и др. // *Изв. вузов. Сер. Радиофизика.* – 2001. – Т. 44. – № 5–6. – С. 376–398.
6. Nonlinear time series analysis of electrocardiograms / A. Bezerianos, T. Bountis, G. Papaioannou, P. Polydoropoulos // *Chaos.* – 1995. – V. 5. – № 1. – P. 95–101.
7. Albano A.M., Rapp P.E., Passamante A. Kolmogorov – Smirnov test distinguishes attractors with similar dimensions // *Phys. Rev. E.* – 1995. – V. 52. – № 1. – P. 196–206.
8. Dailyudenko V.F. Nonlinear time series processing by means of ideal topological stabilization analysis and scaling properties investigation // *Proc. of the SPIE's Conf. on Applications and Science of Computational Intelligence II.* V. 3722. – Orlando, Florida, USA, 1999. – P. 108–119.
9. Кузнецов С.П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью // *Изв. вузов. Сер. Радиофизика.* – 1982. – Т. 25. – № 12. – С. 1410–1428.
10. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 340 с.
11. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Math.* – Springer, Berlin, 1981. – V. 898. – P. 366–381.
12. Келдыш Л.В. Некоторые вопросы топологии евклидовых пространств // *УМН.* – 1961. – Т. 16. – № 1 (97). – С. 3–18.
13. Broomhead D.S., Jones R., King G.P. Topological dimension and local coordinates from time series data // *J. Phys. A.: Math. Gen.* – 1987. – V. 20. – № 9. – P. L563–L569.
14. Dailyudenko V.F. Biomedical systems investigation by delayed feedback modeling and locally asymptotic approaches // *Proc. of the Second Int. ICSC Congress on Computational Intelligence: Methods & Applications, Advanced Computing in Biomedicine (ACBM 2001).* – Bangor, U.K., 2001. – P. 91–97.
15. Бифуркации и хаос в системе связанных генераторов с запаздыванием и инерционностью / Р.В. Беляев, Э.В. Кальянов, В.Я. Кислов и др. // *Радиотехника и электроника.* – 2000. – Т. 45. – № 6. – С. 722–734.

16. Marcus C.M., Waugh F.R., Westervelt R.M. Nonlinear dynamics and stability of analog neural network // *Physica D*. – 1991. – V. 51. – № 1–3. – P. 234–247.
17. Schmitt K. *Delay and Functional Differential Equations and Their Applications*. – New York & London: Academic Press, 1972. – 396 p.
18. Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. – Киев: Вища школа, 1979. – 247 с.
19. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом / А.Н. Зверкин, Г.А. Каменский и др. // Тр. семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Университет дружбы народов, 1963. – Т. 2. – С. 3–49.
20. Landa P.S., Rosenblum M.G. Modified Mackey – Glass model of respiration control // *Phys. Rev. E*. – 1995. – Vol. 52. – № 1. – P. R36 – R39.
21. *METHODOLOGY for STAR-CD VERSION 3.15A*. – Computational Dynamics Limited, 2002.
22. Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидромеханика*. Т.1. – М.: Наука, 1965. – 640 с.

Поступила 11.08.05

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: selforg@newman.bas-net.by*

V.F. Dailyudenko

MODELING OF TOPOLOGICAL DYNAMICS OF CHAOTIC TIME SERIES ATTRACTOR

A method of statistical analysis of chaotic time series is presented. The method is based on the investigation of nonuniformity of topological dynamics of phase trajectories with successive enlarging the dimensionality of phase space of the attractor reconstructed from the time series under investigation. Reliability and convergence of the method is shown by means of numerical modeling processes in a nonlinear dynamical system with delayed feedback, as well as by modeling hydrodynamic processes. The algorithm allows to achieve an essential reduction of computation resources and required experimental data.