

УДК 669.27:519

А.Н. Чичко, А.С. Бороздин

**ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
В СЛИТКЕ, ДВИЖУЩЕМСЯ В ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ**

Предложена математическая модель, а также система начальных и граничных условий для численного моделирования термонапряженного состояния объектов произвольной пространственной конфигурации в условиях ступенчатого нагрева. Представленная модель, в отличие от традиционной модели нагрева слитка, учитывает скорость движения заготовки в многозонном температурном поле рабочего пространства печи. Проведены трехмерные компьютерные расчеты полей температур, напряжений и деформаций, формирующихся при движении слитка, в изменяющемся температурном поле, имитирующем методическую печь металлургического производства.

Введение

Компьютерное моделирование процессов нагрева промышленных слитков является одной из сложнейших и актуальных металлургических задач. Сложность моделирования в значительной степени связана с тем, что промышленные слитки нагреваются в изменяющемся по времени температурном поле. Кроме того, для приближения результатов моделирования к реальным технологиям необходимо решать задачи фактически в четырех измерениях (четвертая координата – время). Значительная часть работ этого направления в большей степени связана с построением иногда очень упрощенных математических моделей в одно- и двухмерном стационарных вариантах [1, 2]. Что же касается конкретных численных расчетов процессов нагрева для трех- или четырехмерного (динамика) случая, то данной теме в литературе уделено еще недостаточно внимания. Например, по-прежнему актуальной является задача численного расчета температурных напряжений для слитка, движущегося в изменяющемся температурном поле. Многочисленные постановки задач в одно- и двухмерном случаях, ориентированные на уравнение теплопроводности, к сожалению, не дают полной пространственной картины изменения температур и напряжений во времени. В то же время расчеты напряжений требуют решения уравнений равновесия совместно с уравнением теплопроводности, причем необходимо использование динамических температурных условий. К сожалению, широко известных и надежных алгоритмов решения таких задач все еще нет.

Целью данной работы является разработка математической модели, алгоритма и компьютерное моделирование термоупругих характеристик объекта типа «слиток» в многозонном температурном поле.

1. Методика расчета

Математическая модель рассматриваемой задачи может быть описана системой дифференциальных уравнений, включающей в себя уравнения расчета нестационарного температурного поля заготовки и уравнения для расчета напряженно-деформированного состояния объекта по заданному температурному полю.

Расчет температурного поля нагреваемого объекта проводился на основе уравнения теплопроводности Фурье. Данное уравнение для декартовых координат может быть записано в виде

$$c(T) \cdot \rho(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad x, y, z, \tau \in \Omega, \quad (1)$$

где $c(T)$ – функция теплоемкости, Дж/(кг·К); $\rho(T)$ – функция плотности, кг/м³; $\lambda(T)$ – функция теплопроводности, Вт/(м·К); $\Omega (0 \leq x < X, 0 \leq y < Y, 0 \leq z < Z, 0 \leq \tau < t)$ – пространственно-временная область расчета.

Для задания краевых условий, учитывающих взаимодействие между нагревающей средой и поверхностью объекта, перемещающегося с постоянной скоростью v в печи с различными тепловыми зонами, использовалась следующая система уравнений [4]:

$$T(x, y, z, \tau) = \begin{cases} T_0, & \tau = 0; \\ T_1, & 0 < \tau \leq \frac{L_1}{v}; \\ \dots & \\ T_n, & \frac{\sum_{k=1}^{n-1} L_k}{v} < \tau \leq \frac{\sum_{k=1}^n L_k}{v}, \end{cases} \quad (2)$$

где T_0 – начальная температура заготовки, °C; n – число тепловых зон в рабочем пространстве печи; T_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – значение температуры в i -й тепловой зоне, °C; L_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – протяженность i -й тепловой зоны, м; v – скорость перемещения заготовки вдоль рабочего пространства печи, м/с.

Математическая модель задачи расчета температурных напряжений основана на совместном решении трех систем уравнений из теории термоупругости [3]:

– дифференциального уравнения равновесия в точке твердого тела

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ – нормальные напряжения по осям x, y и z ; $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ – касательные напряжения по осям x, y и z соответственно; X, Y, Z – компоненты объемных сил в направлениях x, y, z соответственно;

– второй формы обобщенного закона Гука, учитывающего влияние температурных деформаций на напряжения,

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{xx} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T; \\ \sigma_{yy} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{yy} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T; \\ \sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{zz} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T; \\ \sigma_{xy} = 2\mu \gamma_{xy}, \quad \sigma_{yz} = 2\mu \gamma_{yz}, \quad \sigma_{zx} = 2\mu \gamma_{zx}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – коэффициенты Ламе; $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ – нормальные деформации;

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – касательные деформации; $e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ – объемная деформация; α – коэффициент линейного расширения материала; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга;

– уравнения Коши, определяющего соотношения между деформациями и перемещениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{array} \right. \quad (5)$$

где u, v, w – компоненты вектора перемещения по осям x, y и z соответственно.

Для практического решения задачи термоупругости при заданном температурном поле была выбрана постановка задачи в перемещениях. Ниже представлено дифференциальное уравнение равновесия для декартовой системы координат, записанное через перемещения (уравнение Ламе) [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u - (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x} + X = 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v - (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial y} + Y = 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^2 w - (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial z} + Z = 0, \end{array} \right. \quad (6)$$

где $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ – объемная деформация.

В представленной математической модели введен ряд упрощающих допущений:

- температура в каждой зоне фиксирована и постоянна, т.е. каждая точка тепловой зоны имеет температуру, соответствующую данной зоне;
- тело считается изотропным – температурное расширение одинаково во всех направлениях;
- деформации, возникающие в теле, не влияют на температурное поле данного объекта;
- деформации, возникающие вследствие температурных напряжений, незначительны и соответствуют упругой области.

На базе конечно-разностной аппроксимации описанной математической модели и клеточно-автоматного подхода был разработан набор алгоритмов и программа для трехмерного моделирования процесса нагрева и термоупругих характеристик объекта типа «слиток» при взаимодействии с динамической нагревающей средой. Численное моделирование на основе клеточно-автоматного подхода представляет собой итерационный алгоритм. Каждый такт (итерация) расчета термонапряженного состояния слитка состоит из последовательного решения ряда подзадач.

На первом этапе рассчитывалось температурное поле объекта моделирования (в данном случае слитка). Расчет проводился решением уравнения (1) с граничными и начальными условиями (2), позволяющими учитывать взаимодействие нагревающей среды и движение нагреваемого объекта с постоянной скоростью v вдоль рабочего пространства печи, которое имеет ряд температурных зон.

Для решения уравнения (1) конечно-разностными методами в декартовой системе координат была введена пространственно-временная сетка следующего вида:

$$\begin{aligned}x_i &= ih_x \quad (i = 0, 1, \dots, N_x); \\y_j &= jh_y \quad (j = 0, 1, \dots, N_y); \\z_k &= kh_z \quad (k = 0, 1, \dots, N_z); \\\tau_l &= lh_\tau \quad (l = 0, 1, \dots, N_t),\end{aligned}$$

где $h_x = X/N_x$, $h_y = Y/N_y$, $h_z = Z/N_z$, $h_\tau = t/N_t$ – пространственно-временные шаги по координатам x , y , z и t соответственно; N_x , N_y , N_z , N_t – число узлов по соответствующей координате.

По двухслойному 14-точечному шаблону была составлена симметричная неявная схема, имеющая погрешность аппроксимации $O(h_\tau^2 + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$:

$$\frac{u_{ijk}^{l+1} - u_{ijk}^l}{h_\tau} = \frac{1}{2} (\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z) (u_{ijk}^{l+1} + u_{ijk}^l). \quad (7)$$

Здесь $u_{ijk}^l = T(x_i, y_j, z_k, \tau_l)$ – проекция функции T на пространство сеточных функций и введены следующие разностные операторы:

$$\begin{aligned}\Lambda_x u_{ijk}^l &= a(T) (u_{i+1jk}^l - 2u_{ijk}^l + u_{i-1jk}^l); \\\Lambda_y u_{ijk}^l &= a(T) (u_{ij+1k}^l - 2u_{ijk}^l + u_{ij-1k}^l); \\\Lambda_z u_{ijk}^l &= a(T) (u_{ijk+1}^l - 2u_{ijk}^l + u_{ijk-1}^l),\end{aligned}$$

где $a(T) = \frac{\lambda(T)}{c(T)\rho(T)}$ – функция температуропроводности.

Применение неявных схем, устойчивых при любых пространственно-временных шагах, позволяет использовать в численных расчетах достаточно большой временной шаг, что сокращает затраты машинного времени. Это время может стать критическим ресурсом, если объект разбит на большое количество элементов (больше 100 000) и при этом необходимо провести моделирование процесса в большом временном промежутке. В этом случае время машинного счета является серьезной проблемой, затрудняющей решение конкретных прикладных задач, связанных с оптимизацией режимов нагрева. Однако использование неявных схем в чистом виде для многомерных задач требует решения системы из $N_x \times N_y \times N_z$ уравнений вида (7), что из-за большого объема вычислительной работы нецелесообразно. Поэтому решение системы (7) проводилось по экономичной локально-одномерной схеме [5].

Конечно-разностная аппроксимация системы (6) решалась при помощи попеременно-треугольного метода [6]. Численное решение данного уравнения требует задания вектора перемещений для граничной поверхности моделируемого объекта. Вычисление граничных условий для расчета компонент вектора перемещений для объектов типа «слиток» с известным распределением температурного поля проводилось по специально разработанному алгоритму, использующему клеточно-автоматную модель программы.

Далее проводилось определение деформаций на основе вычисленных значений компонент вектора перемещений. Зная компоненты вектора перемещения для всех точек тела и используя разностные аппроксимации (8) для уравнений из системы (5), произведем расчет нормальных и касательных деформаций:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{u_{x+1} - u_{x-1}}{2\Delta x}; \\ \varepsilon_y = \frac{v_{y+1} - v_{y-1}}{2\Delta y}; \\ \varepsilon_z = \frac{w_{z+1} - w_{z-1}}{2\Delta z}; \\ \gamma_{xy} = \frac{v_{x+1} - v_{x-1}}{2\Delta x} + \frac{u_{y+1} - u_{y-1}}{2\Delta y}; \\ \gamma_{yz} = \frac{w_{y+1} - w_{y-1}}{2\Delta y} + \frac{v_{z+1} - v_{z-1}}{2\Delta z}; \\ \gamma_{zx} = \frac{u_{z+1} - u_{z-1}}{2\Delta z} + \frac{w_{x+1} - w_{x-1}}{2\Delta x}, \end{array} \right. \quad (8)$$

Завершает итерацию расчет напряжений, который производится подстановкой рассчитанных значений деформации в систему (4).

На рис. 1 изображена блок-схема описанной выше итерации расчета. Представленный алгоритм был реализован в виде программы для ПЭВМ.

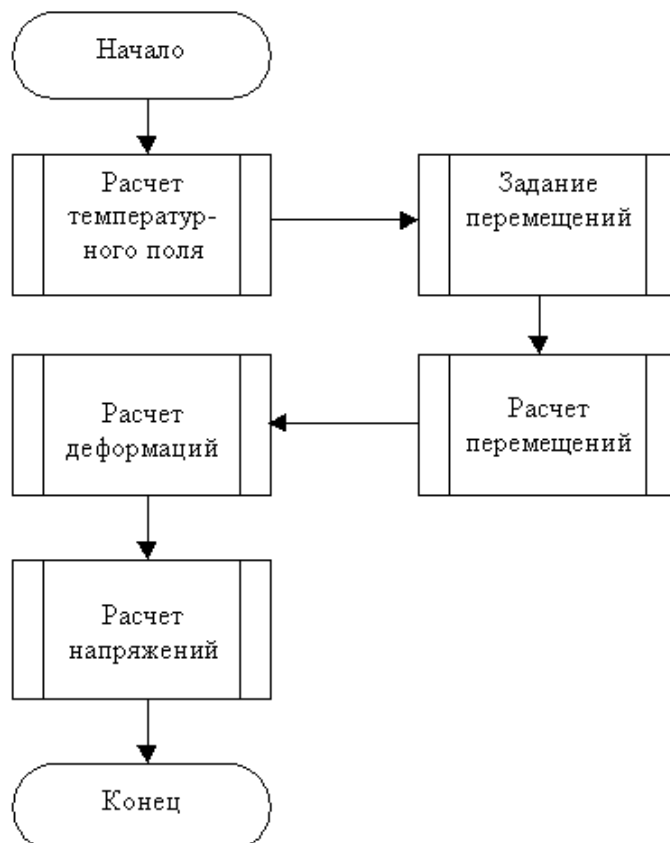


Рис. 1. Алгоритм итерации расчета термонапряженного состояния тела в условиях нестационарного температурного поля

Разработанная программа была применена для компьютерного моделирования процесса нагрева фрагмента слитка с размерами 250×250×300 мм в шаговой печи, имеющей пять темпе-

ратурных зон. В качестве материала слитка была выбрана сталь 40Х с теплофизическими характеристиками, являющимися функциями от температуры. В табл. 1 приведены значения плотности ρ , теплоемкости c , теплопроводности λ , линейного коэффициента расширения α и модуля упругости E , использовавшихся в расчетах температурных полей и полей напряжений.

Таблица 1

Теплофизические характеристики стали 40Х

Параметр	Температура t , °С								
	0	100	200	300	400	500	600	700	800
ρ , кг/м ³	7820	7800	7770	7740	7700	7670	7630	7590	7610
c , Дж/(кг·°С)	496	508	529	563	592	622	634	664	684
λ , Вт/(м·°С)	41,0	40,0	38,0	36,0	34,0	33,0	31,0	30,0	27,0
α , 10 ⁻⁶ 1/°С	11,8	12,2	13,2	13,7	14,1	14,6	14,8	12,0	12,0
E , 10 ⁹ Н/м ²	214	211	206	203	185	176	164	143	132

Рассмотрим схематическое изображение печи, а также расположение тепловых зон и слитка (рис. 2). Для проведения вычислительных экспериментов в срединном сечении слитка была выбрана плоскость YX . Для всех клеток слитка, которые пересекаются данной плоскостью, рассчитанные значения температурных напряжений сохранялись для последующего анализа. На рис. 2, б секущая плоскость YX выделена штриховкой.

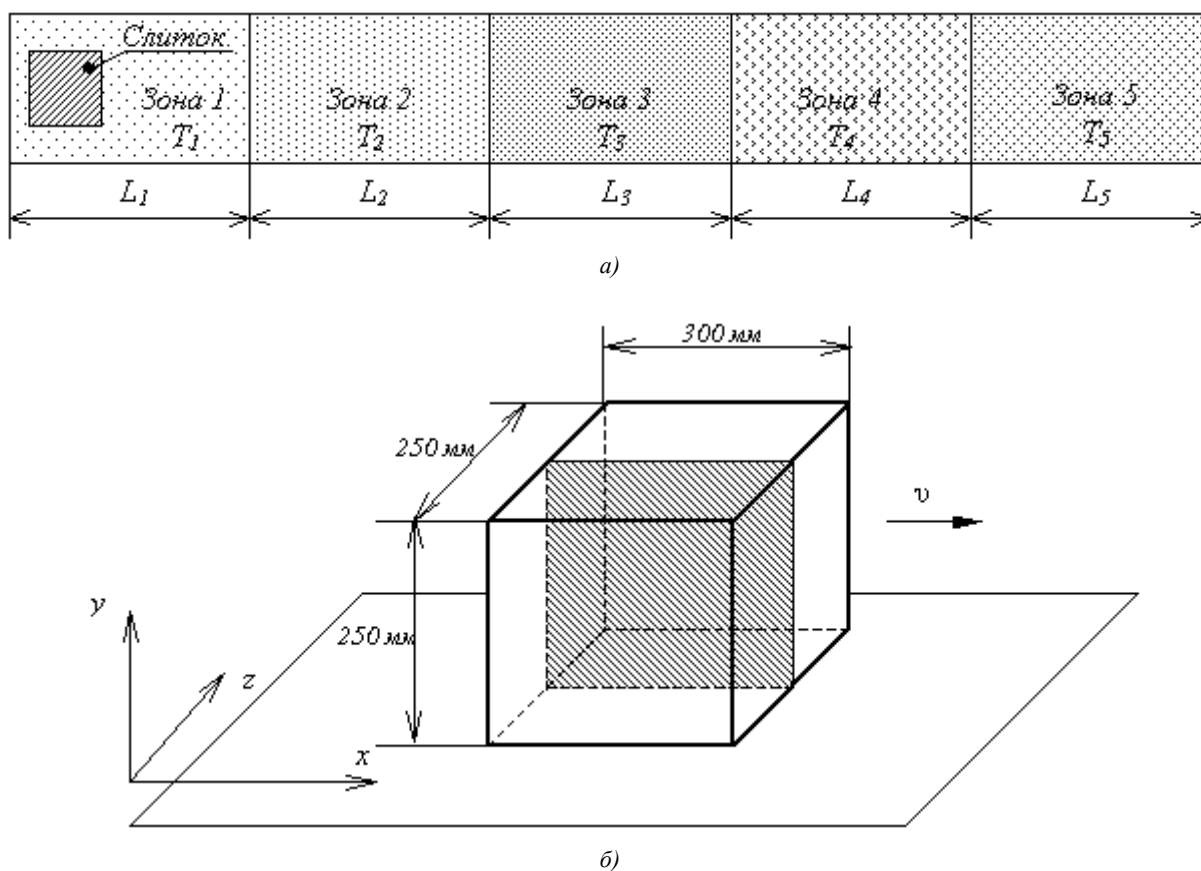


Рис. 2. Схема рабочего пространства печи и слитка: а) расположение температурных зон и слитка б) пространственная модель фрагмента слитка и расположение секущей плоскости

Предполагалось, что рабочее пространство печи заполнено воздухом с теплофизическими характеристиками $\lambda = 0,034 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, $c = 1009 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$ и температурой, зависящей от конкретной тепловой зоны. Расчеты проводились для трех вариантов конфигураций рабочего пространства печи. Значения температур каждой тепловой зоны для моделируемых режимов нагрева приведены в табл. 2.

Таблица 2

Варианты конфигураций рабочего пространства модельной печи

Варианты режимов нагрева	$T_1, \text{ }^\circ\text{C}$	$T_2, \text{ }^\circ\text{C}$	$T_3, \text{ }^\circ\text{C}$	$T_4, \text{ }^\circ\text{C}$	$T_5, \text{ }^\circ\text{C}$
1	800	800	800	800	800
2	180	330	490	640	800
3	200	350	500	550	800

Время моделирования выбиралось таким, чтобы при заданной скорости движения слитков прошел вдоль всего рабочего пространства печи.

2. Результаты моделирования

Далее представлены результаты проведенных вычислительных экспериментов по расчету напряженно-деформированного состояния слитка. На рис. 3 изображены поверхности, описывающие поле температурных напряжений $\sigma^* = 1/3(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ для сечения слитка плоскостью YX .

Каждая конфигурация поверхности напряжений соответствует различным моментам времени. Из рис. 3 видно, что поверхности напряжений для слитков имеют куполообразную конфигурацию, изменяющуюся в процессе движения слитка. Поверхности напряжений позволяют наглядно оценить пиковые значения напряжений в конкретный момент времени процесса нагрева для выбранного сечения слитка.

На рис. 4 показана динамика изменения нормальных напряжений вдоль оси X (σ_{xx}) с течением времени при его нагреве. Из анализа зависимостей на рис. 4, а видно, если температурное поле печи однородно (все тепловые зоны имеют одинаковую температуру), то напряжения в слитке имеют тенденцию к уменьшению. При неоднородном температурном поле рабочего пространства печи поля напряжений имеют сложный характер даже после достаточно продолжительного нагрева. В свою очередь, при однородном температурном поле печи пиковые значения напряжений существенно больше. Скачки напряжений, проявляющиеся в начальных стадиях нагрева, являются следствием большой разницы в температурах между нагревающей средой и слитком, что в случае реального процесса может привести к образованию трещин и стать причиной брака (см. рис. 4, б, в).

Заключение

По экономичной трехмерной схеме разработаны алгоритм и программа, позволяющие рассчитать поля температур, деформаций и напряжений при нагреве движущейся заготовки в различных сечениях объекта типа «слитков». Представленные вычислительные эксперименты наглядно демонстрируют возможности компьютерного моделирования и анализа температурных напряжений, возникающих при нагреве слитков с динамическими характеристиками нагревающей среды. Предложенная математическая модель процесса термоупругости позволяет рассчитать динамику характеристик термонапряженного состояния (напряжения, деформации и перемещения) при нагреве слитков. Рассчитаны поверхности температурных напряжений для слитка, нагреваемого при различных вариантах многозонной методической печи.

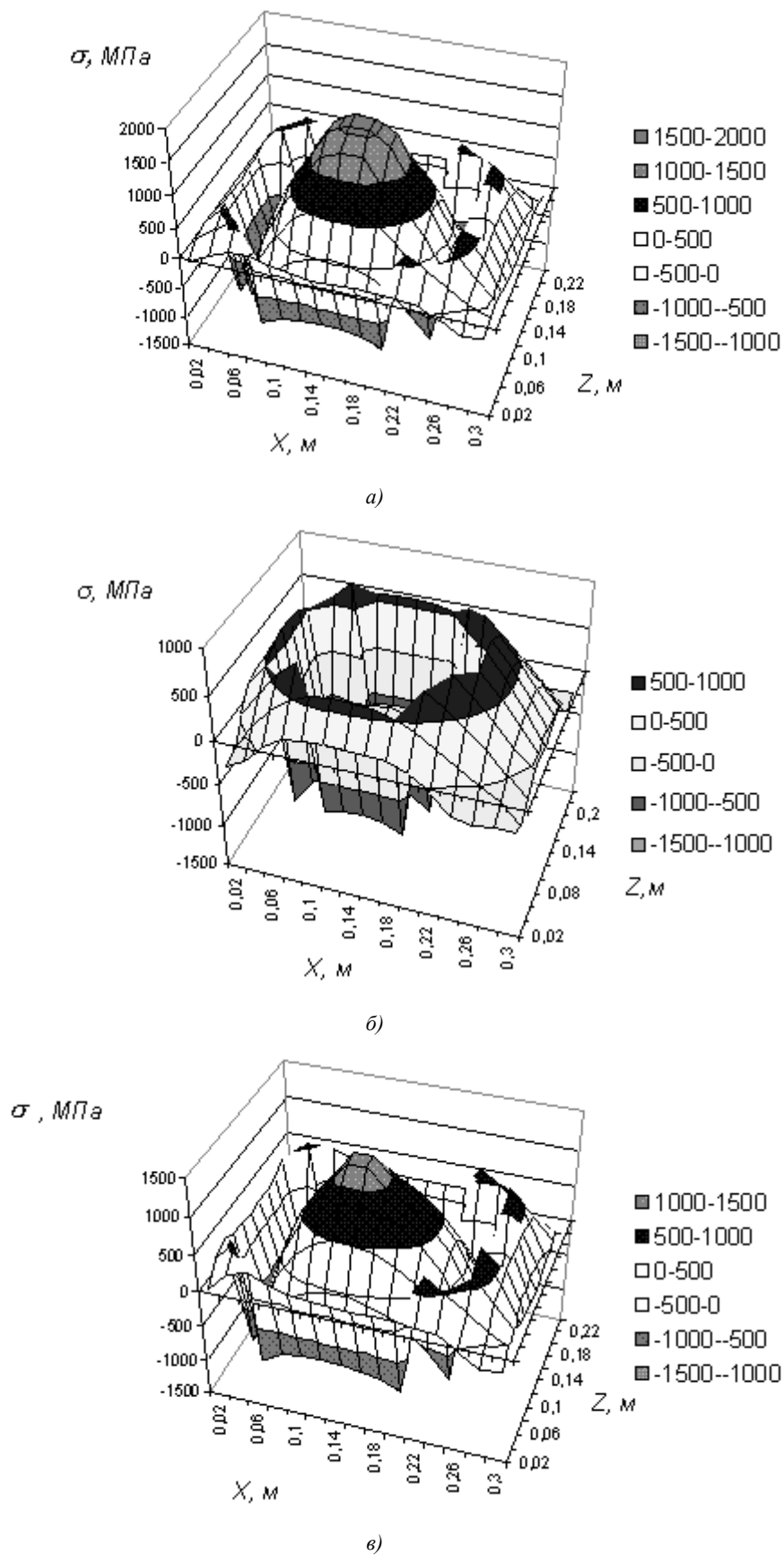
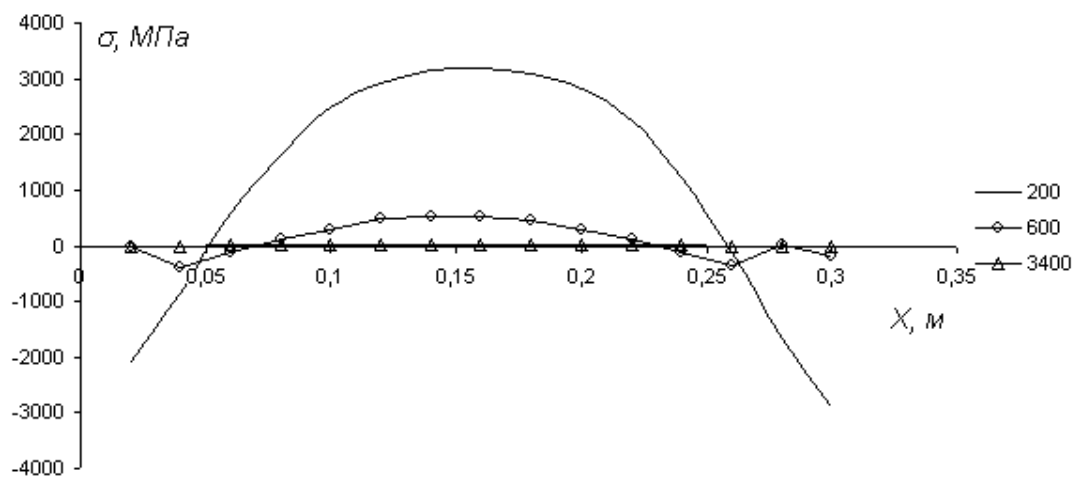
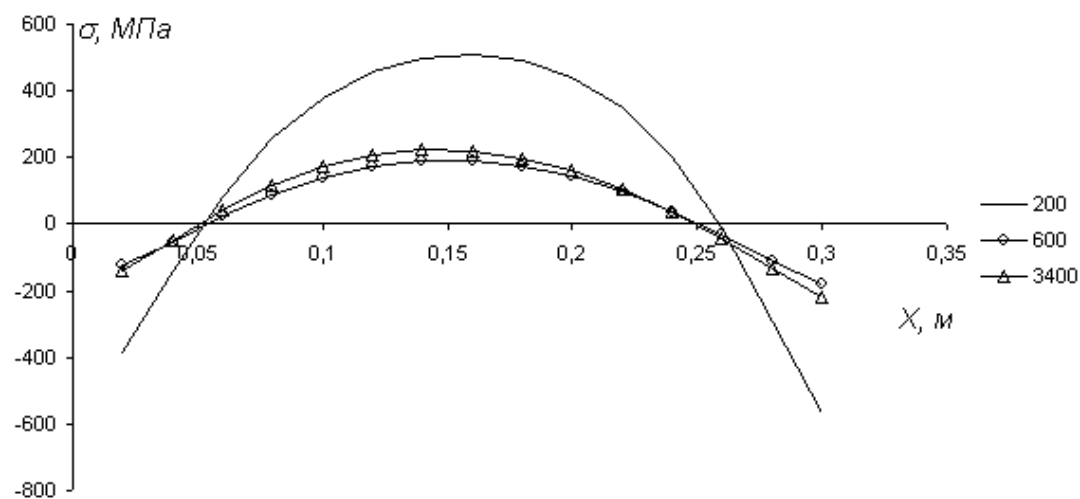


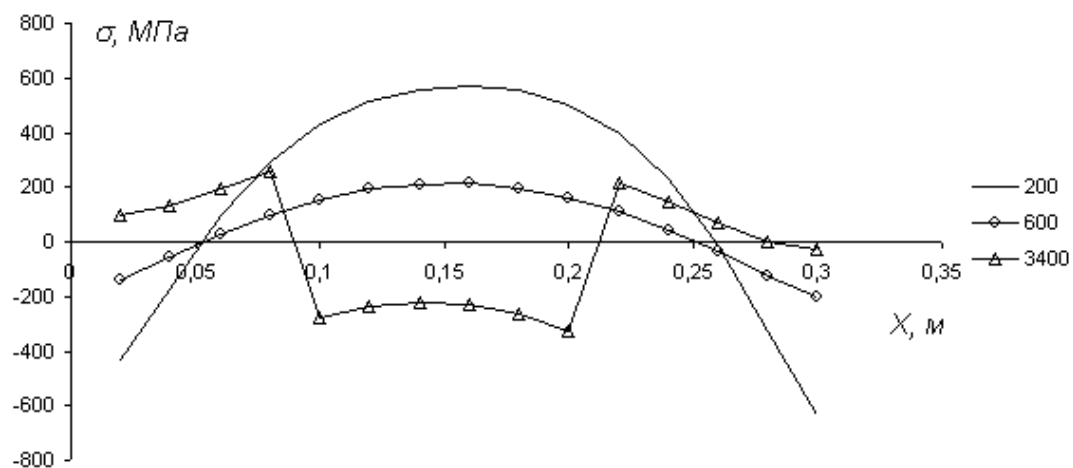
Рис. 3. Поверхности температурных напряжений для центрального слитка плоскостью XZ при различных режимах нагрева: а) режим 1; б) режим 2; в) режим 3



a)



б)



в)

Рис. 4. Нормальные напряжения к оси X , возникающие в центральном сечении слитка в моменты времени 200, 600 и 3400 с для различных режимов нагрева слитка: а) по режиму 1; б) режиму 2; в) режиму 3

Список литературы

1. Самойлович Ю.А. Системный анализ кристаллизации слитка. – Киев: Наукова думка, 1983. – 246 с.
2. Самойлович Ю.А. Формирование слитка. – М.: Металлургия, 1977. – 158 с.
3. Боли Б., Уэнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
4. Чичко А.Н., Бороздин А.С. Численное моделирование процесса нагрева движущегося слитка // Литье и металлургия. – 2003. – № 4. – С. 60–63.
5. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности: в 2 ч. – М.: Высш. шк., 1982. – 327 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.

Поступила 01.04.05

*Белорусский национальный
технический университет,
Минск, пр. Независимости, 65
e-mail: chichko_a_n@mail.ru,
a_born@mail.ru*

A.N. Chichko, A.S. Barazdzin**NUMERIC MODELS OF TEMPERATURE TENSIONS CALCULATION
IN A BAR THAT MOVES IN ALTERING TEMPERATURE FIELD**

The mathematical model and the system of initial and boundary conditions for numerical modeling the thermotension state of any space configuration objects in conditions of grade heating is offered. Presented model and numerical algorithm differ from well known ones by accounting the velocity of bar that moves in multiple zone temperature field of furnace working space. Three-dimensional computer based calculations of temperature, tensions and deformations that exist while bar is moving in altering temperature field that simulate metallurgical plant furnace.

АВТОРЫ

статьи «**ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
В СЛИТКЕ, ДВИЖУЩЕМСЯ В ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ**»

представленной от Белорусского национального технического университета,
кафедры «Машины и технология литейного производства»

Чичко Александр Николаевич - доктор физико-математических наук, профессор
220140, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Притыцкого, д. 98, кв. 1
тел. раб.: (375-17) 231-05-46, тел. дом.: (375-17) 215-23-28
E-mail: chichko_a_n@mail.ru

Бороздин Андрей Сергеевич, аспирант БНТУ
220047, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Герасименко, д. 58, корп. 2, кв. 60,
тел. дом.: (375-17) 242-42-79, тел. моб. (375-29)706-12-16.
E-mail: a_born@mail.ru

РЕФЕРАТ

Статья 10 с, 4 рис., 2 табл., 6 источников

КЛЕТОЧНЫЙ АВТОМАТ, ЭКОНОМИЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ, ТЕРМОУПРУГОСТЬ, КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, СТУПЕНЧАТЫЙ НАГРЕВ.

Объектом исследования является модель температурных напряжений при ступенчатом нагреве.

Цель работы – разработка алгоритмов и программы для моделирования температурных напряжений, возникающих в объекте с пространственно распределенными характеристиками с динамическими граничными условиями.

Предложена модель и алгоритм для определения динамики изменения температурного поля и термических напряжений в слитке, движущемся в многозонной термической среде. Представлены результаты изменения температурных напряжений в движущемся слитке при различных вариантах тепловой обработки имитирующей работу методической печи нагрева.