

УДК 536.75

В.А. Балдин

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ АТТРАКТОРА, ОПИСЫВАЮЩЕГО ДИНАМИКУ СЛАБОТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА – ТЭЙЛОРА

На основе уравнений Навье – Стокса и неразрывности выводится система обыкновенных дифференциальных уравнений для функций, задающих временную зависимость компонент поля скоростей течения жидкости между коаксиальными цилиндрами, внутренний из которых вращается, в области чисел Тэйлора, близких к переходу течения из ламинарной формы в турбулентную. Выявляется хаотический режим динамики, и впервые аналитически строится аттрактор этой системы.

Введение

При решении многих задач в различных областях физики приходится сталкиваться с явлением динамического хаоса. Хаотическим может быть, в частности, поведение системы трех тел в механике, различных схем в электронике, движущейся жидкости при явлении турбулентности, электромагнитного поля в лазере [1]. Кроме того, жидкость при расчете полей скоростей и температур в подогреваемом снизу слое тоже может демонстрировать сложную динамику, когда интенсивность нагрева достигает определенной величины.

1. Задача о конвекции Рэлея – Бенара

Рассмотрим вначале кратко случай возникновения в подогреваемом снизу слое конвекционных токов (течение Рэлея – Бенара), которые благодаря двумерности рассматриваемой задачи можно рассматривать в сечении как эллипсы (рис. 1).

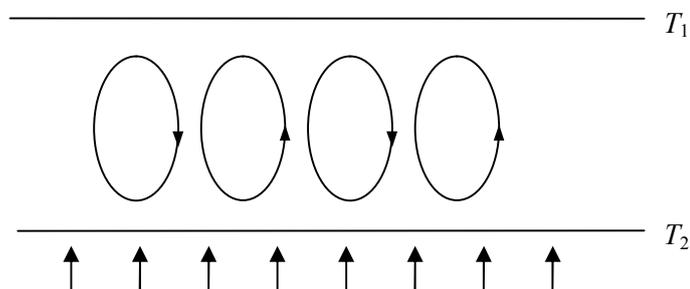


Рис. 1. Конвекция в подогреваемом снизу слое

Изменение во времени полей скоростей $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, температур $T(x, y, z, t)$ и плотностей $\rho(x, y, z, t)$ жидкости задается системой дифференциальных уравнений в частных производных [2, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(T \mathbf{v}) &= \kappa \nabla^2 T; \\ \rho &= \rho_0 (1 - \gamma(T - T_0)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\nabla = \mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y + \mathbf{k}\partial/\partial z$ – векторный дифференциальный оператор Гамильтона ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты прямоугольной системы координат); \mathbf{g} – ускорение свободного падения, рассчитанное для единичного объема; $p(x, y, z)$ – поле давлений; ν – коэффициент кинематической вязкости; κ – коэффициент температуропроводности; γ – коэффициент теплового расширения.

При предположении слабой сжимаемости среды из системы (1) можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= a(q_2 - q_1); \\ \dot{q}_2 &= bq_1 - q_2 - q_1q_3; \\ \dot{q}_3 &= -cq_3 + q_1q_2. \end{aligned} \quad (2)$$

При значениях параметров системы (1), равных $a = 10$, $c = 8/3$, $b = 28$, имеем в фазовом пространстве (q_1, q_2, q_3) этой системы притягивающее множество – аттрактор (рис. 2), описывающий хаотический режим динамики.

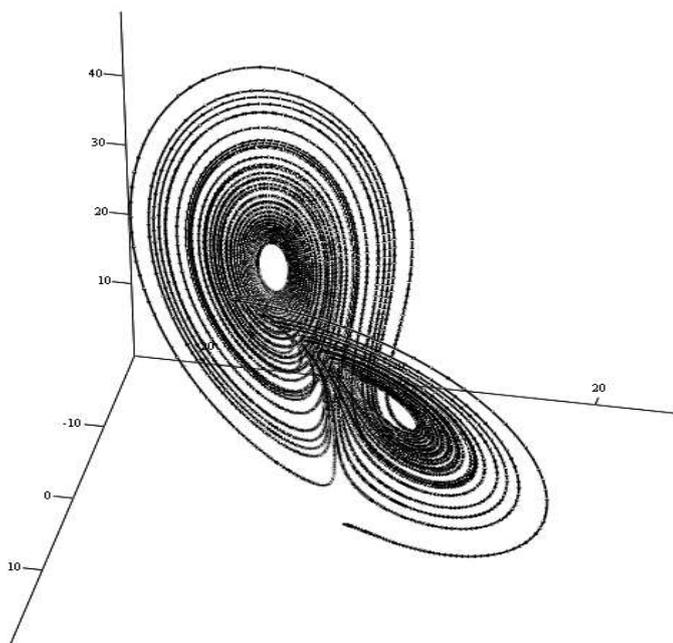


Рис. 2. Аттрактор Лоренца в задаче о конвекции при $a = 10$, $c = 8/3$, $b = 28$

2. Задача о течении между коаксиальными цилиндрами, внутренний из которых вращается

В некотором смысле аналогичным поведению жидкости, описанному в предыдущем разделе, является течение в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами, внутренний из которых вращается, а внешний покоится (так называемое течение Куэтта – Тэйлора) [4]. При достижении скорости вращения некоторой величины в жидкости образуются вихри Тэйлора (рис. 3), сходные с конвекционными токами в упомянутом выше течении Рэлея – Бенара. Кроме того, эта задача также фактически двумерна, ибо картина движения не зависит от угла φ , отсчитываемого в плоскости, перпендикулярной оси цилиндров. В таком случае попытаемся и здесь получить аналогичный результат, описывающий хаотическую динамику. Запишем систему уравнений, характеризующих динамику этой системы, в цилиндрических координатах (r, φ, z) , учитывая симметрию задачи по φ [2, 4]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u; \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} &= \nu \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v; \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w - g; \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0; \\
\rho &= \rho_0 \left(1 + \gamma \frac{\rho_0 \mathbf{V}^2}{2} \right),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; r, φ, z – цилиндрические координаты; u, v, w – соответствующие им компоненты скорости; ν, ρ – соответственно кинематическая вязкость и плотность жидкости; $\gamma = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$ – термическая сжимаемость [2].

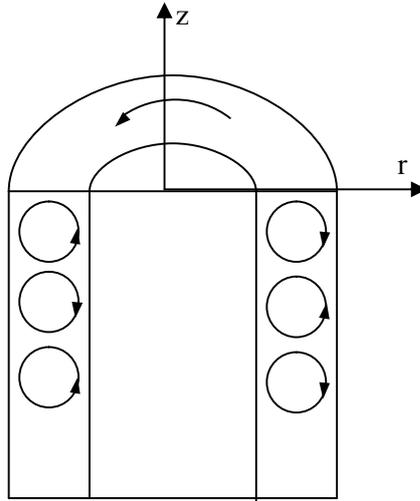


Рис. 3. Вихри Тэйлора при течении между соосными цилиндрами

Ограничиваясь случаем, когда зазор между цилиндрами h гораздо меньше радиуса внутреннего цилиндра R , $h \ll R$, из системы (3) можно получить следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных (см. разд. 5 настоящей статьи):

$$\begin{aligned}
(u_z - w_r)_t &= \frac{2vv_z}{r} + g\gamma\rho_0(uu_r + vv_r + ww_r) - uu_{rz} - ww_{rz} + \\
&+ uw_{rr} + ww_{zr} + \nu(u_{rrz} + u_{zzz} - w_{rrr} - w_{rzz}); \\
v_t &= -w_r - wv_z - \frac{uv}{r} + \nu \left(v_{rr} + v_{zz} + \frac{v_r}{r} - \frac{v}{r^2} \right); \\
u_r + w_z &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Нижний индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной.

3. Случай малых возмущений. Линейное приближение

Сначала рассмотрим случай малых возмущений [5], т. е. будем считать изменения компонент скорости вследствие образования вихрей Тэйлора малыми по сравнению со скоростью $V(r)$ невозмущенного течения. Выбирая начало координат, как показано на рис. 3, а также принимая во внимание периодичность по z , ищем решение (4) в виде

$$u = -ae^{kt}u_1(r)\cos az, \quad w = e^{kt}u_1(r)\sin az, \quad v = V(r) + e^{kt}v_1(r)\cos az, \quad (5)$$

где $\alpha = \pi/l$, $2l$ – период вихревого образования по z ; $V(r) = R\omega(1 - \frac{r-R}{h})$ (такой вид функции радиальной скорости $V(r)$ допустим при выполнении условия $h \ll R$); ω – частота вращения внутреннего цилиндра. Вид функций u и w выбирается с учетом уравнения неразрывности, а именно, из уравнения $u_r + w_z = 0$ (см. (4)) следует, что u и w должны выражаться через производные от одной и той же функции $\psi(r, z, t)$, называемой функцией тока: $u = -\partial\psi/\partial z$, $w = \partial\psi/\partial r$, причем функция $\psi(r, z, t)$ выбирается в виде $\psi = u_1(r)e^{kt}\sin az$. Поиск решения системы (4) в виде (5) фактически означает учет соответствующих членов в разложении возмущения поля скоростей по базисным функциям $\sin naz$ и $\cos maz$ (см., например, [1]).

Подставляя (5) в (4) и учитывая, что квадратичными по возмущению членами можно пренебречь ввиду их малости, получаем после сравнения членов при $e^{kt}\sin az$ или $e^{kt}\cos az$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $u_1(r)$ и $v_1(r)$:

$$\begin{aligned} \alpha^2 ku_1 - ku_1^{(2)} &= -\frac{2\alpha v_1}{r}V + v(\alpha^2 u_1^{(2)} - \alpha^4 u_1 - u_1^{(4)} + \alpha^2 u_1^{(2)}); \\ kv_1 + \alpha u_1 \frac{R\omega}{h} &= v(v_1^{(2)} - \alpha^2 v_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) несложно получить обыкновенное дифференциальное уравнение для определения v_1 . Здесь дифференцирование ведется по переменной ξ , связанной с r следующим образом: $r = R + h(\frac{1}{2} + \xi)$. Итак, из (6) получаем

$$\begin{aligned} v_1^{(6)} - (3\lambda^2 + 2\sigma)v_1^{(4)} + \frac{1}{v^2}(3\lambda^4 + 4\lambda^2\sigma + \sigma^2)v_1^{(2)} - \\ - \left(\lambda^6 + 2\lambda^4\sigma + \lambda^2\sigma^2 - 2\lambda^2 Ta^2 \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \right) v_1 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\lambda = ah$, $\sigma = kh^2/v$, $Ta^2 = \omega^2 Rh^3/v^2$. Величина Ta обозначает число Тэйлора [4]. Фактически число Тэйлора является частным случаем числа Рейнольдса $Re = \frac{VD}{v}$ (v – вязкость рассматриваемой жидкости, а V и D – характерные масштабы скорости и координаты соответственно) и может быть введено в уравнения Навье – Стокса вместо него, если положить $D = h\sqrt{\frac{h}{R}}$. Ино-гда с числом Тэйлора рассматриваемой системы связывают число Рейнольдса $Re = \frac{Vh}{v}$ [4].

Граничными условиями, определяемыми из условия равенства нулю компонент возмущения на стенках зазора, для задачи, описываемой уравнением (7), будут следующие [5, 6]:

$$v_1 = v_1^{(2)} = v_1^{(3)} - (\lambda^2 + \sigma)v_1^{(1)} = 0 \text{ при } \xi = \pm \frac{1}{2}. \quad (8)$$

4. Учет квадратичных членов в уравнениях Навье – Стокса в области значений числа Тэйлора, близких к критическому числу, при котором происходит переход к турбулентному течению

Теперь вернемся вновь к системе (4) и рассмотрим случай, когда возмущения настолько велики, что квадратичными от них членами не следует пренебрегать. Именно в этом случае можно получить нелинейные уравнения относительно динамических переменных и выявить хаотическую динамику в течении Куэтта – Тэйлора. Будем искать решение (4) в виде

$$u = -\alpha R_1(r)S_1(t)\cos \alpha z; w = \dot{R}_1(r)S_1(t)\sin \alpha z; v = V + R_2(r)S_2(t)\sin \alpha z + R_3(r)S_3(t)\sin 2\alpha z. \quad (9)$$

Появление в зависимости компоненты скорости v от z членов, пропорциональных $\sin naz$ вместо $\cos \alpha z$ (см. (5)), может быть объяснено тем, что при переходе от ламинарного течения Куэтта к турбулентному через вихревое происходит изменение упомянутой зависимости v от z , т. е. начинают играть существенную роль другие составляющие разложения v по базисным функциям $\sin naz, \cos maz$.

Представление возмущения азимутальной составляющей скорости v в виде суммы двух компонент, соответствующих $\sin \alpha z$ и $\sin 2\alpha z$, согласуется с результатами экспериментов (см., например, [7]). Эти эксперименты показывают, что течение, от которого происходит переход к турбулентному, действительно состоит из пары разных вихрей, транслированной вдоль оси системы.

При подстановке (9) система уравнений (4) переходит в следующую:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= aS_2S_3 + bS_2 + cS_1; \\ \dot{S}_2 &= dS_1S_3 + eS_2; \\ \dot{S}_3 &= fS_1S_2 + gS_3; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{где } a = -\frac{\alpha R_2 R_3}{r(\alpha^2 R_1 - R_1^{(2)})}; b = \frac{g\gamma\rho(VR_3^{(1)} + V_r R_2)}{(\alpha^2 R_1 - R_1^{(2)})}; c = \frac{v(2\alpha^2 R_1^{(2)} - \alpha^4 R_1 - R_1^{(4)})}{(\alpha^2 R_1 - R_1^{(2)})}; \quad (11)$$

$$d = \alpha \frac{1}{2R_2} (R_1 R_3^{(1)} + 2R_1^{(1)} R_3 + \frac{R_1 R_3}{r}); e = \frac{v(R_2^{(2)} - \alpha^2 R_2 + \frac{R_2^{(1)}}{r} - \frac{R_2}{r^2})}{R_2}; \quad (11a)$$

$$f = \alpha \frac{1}{2R_3} (R_1 R_2^{(1)} - R_1^{(1)} R_2 + \frac{R_1 R_2}{r}); g = \frac{v(R_3^{(2)} - 4\alpha^2 R_3 + \frac{R_3^{(1)}}{r} - \frac{R_3}{r^2})}{R_3}. \quad (11б)$$

Воспользовавшись заменой переменных $S_1 = Aq_1; S_2 = Bq_2; S_3 = Cq_3; t = D\tau$, можно перейти от (10) к более простой системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= a_1 q_2 - q_1 - q_2 q_3; \\ \dot{q}_2 &= q_1 q_3 - b_1 q_2; \\ \dot{q}_3 &= q_1 q_2 - c_1 q_3, \end{aligned} \quad (12)$$

где a_1, b_1, c_1 выражаются через R_1, R_2, R_3 и т. д. следующим образом:

$$a_1 = -Ta \frac{g\gamma\rho_0 \sqrt{R} [(h + R - r)R_3^{(1)} - R_2]}{h^{5/2} (2\alpha^2 R_1^{(2)} - \alpha^4 R_1 - R_1^{(4)})} \left[\frac{r(\alpha^2 R_1 - R_1^{(2)})(R_1 R_3^{(1)} + 2R_1^{(1)} R_3 + \frac{R_1 R_3}{r})}{2R_2^2 R_3} \right]^{1/2}; \quad (13)$$

$$b_1 = \frac{(\alpha^2 R_1 - R_1^{(2)})(R_2^{(2)} - \alpha^2 R_2 + R_2^{(1)}/r - R_2/r^2)}{R_2(2\alpha^2 R_1^{(2)} - \alpha^4 R_1 - R_1^{(4)})}; \quad (13a)$$

$$c_1 = \frac{(\alpha^2 R_1 - R_1^{(2)})(R_3^{(2)} - 4\alpha^2 R_3 + R_3^{(1)}/r - R_3/r^2)}{R_3(2\alpha^2 R_1^{(2)} - \alpha^4 R_1 - R_1^{(4)})}. \quad (13б)$$

Здесь Ta , входящее в формулу для управляющего параметра a_1 , – число Тэйлора, определяемое таким же образом, что и в формуле (7).

При значениях параметров $a_1 = 20$, $b_1 = 10$, $c_1 = 3$ наблюдается хаотический режим динамики и аттрактор, по структуре сходный с лоренцовским (рис. 4). При уменьшении же параметра a_1 (числа Тэйлора) наблюдается затухание возмущения скорости.

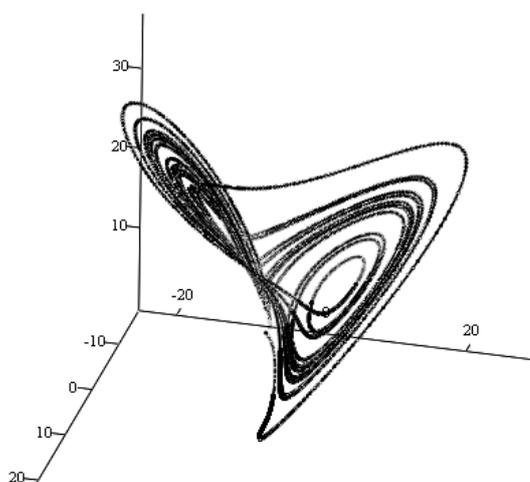


Рис. 4. Аттрактор системы (17) при $a_1 = 20$, $b_1 = 10$, $c_1 = 3$

Для иллюстрации хаотического режима динамики рассматриваемой системы при данных значениях параметров a_1 , b_1 , c_1 на рис. 5 приведен график функции $q_1(t)$, который соответствует хаотическому изменению направления обращения в вихрях Тэйлора [7].

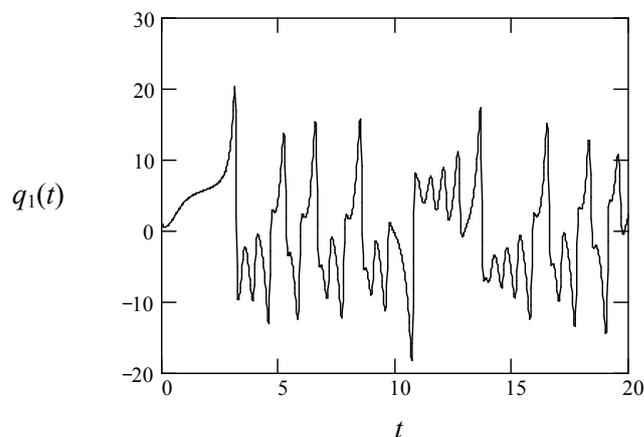


Рис. 5. Зависимость функции $q_1(t)$ от времени при $a_1 = 20$, $b_1 = 10$, $c_1 = 3$

Далее, исходя из упомянутых значений параметров системы и формул (13)–(13б), следует попытаться найти функции $R_1(r)$, $R_2(r)$, $R_3(r)$, например, численным методом, используя результаты экспериментов по определению значений ω , R , h , при которых наблюдается переход от ламинарного вихревого течения к турбулентному, ибо, как показывают эксперименты [4], при увеличении ω через некоторое время после перехода исчезает периодичность течения по z , из-за чего рассматриваемое приближение может уже не дать достаточно точных результатов.

5. Вывод системы дифференциальных уравнений (4) для течения между коаксиальными цилиндрами

С учетом того, что нижний индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной, перепишем систему (3) в более компактном виде:

$$\begin{aligned} u_t + uu_r + wu_z - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u; \\ v_t + uv_r + wv_z + \frac{uv}{r} &= v \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v; \\ w_t + uw_r + ww_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \nabla^2 w - g; \\ \frac{1}{r} (ru)_r + w_z &= 0; \\ \rho &= \rho_0 \left(1 + \gamma \frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Выберем начало координат, как показано на рис. 3. Тогда для давления будет справедлива формула

$$p = p_0 - \rho_0 g z (1 + \gamma \tilde{p}) - \tilde{p}, \quad (15)$$

где p_0 – атмосферное давление; $\tilde{p} = \frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2}$ – отклонение давления от гидростатического. Найдем фигурирующие в системе (14) частные производные p по r и z , а также запишем выражение для $1/\rho$:

$$p_r = -\rho_0 g z \gamma \tilde{p}_r - \tilde{p}_r, \quad p_z = -\rho_0 g (1 + \gamma \tilde{p}) - \rho_0 g z \gamma \tilde{p}_z - \tilde{p}_z, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} (1 - \gamma \tilde{p}). \quad (16)$$

Далее, найдем p_r/ρ и p_z/ρ с точностью до членов порядка γ :

$$\frac{1}{\rho} p_r = -g z \gamma \tilde{p}_r - \frac{\tilde{p}_r}{\rho_0} + \frac{\tilde{p}_r}{\rho_0} \gamma \tilde{p}, \quad \frac{1}{\rho} p_z = -g - g z \gamma \tilde{p}_z - \frac{\tilde{p}_z}{\rho_0} + \frac{\tilde{p}_z}{\rho_0} \gamma \tilde{p}. \quad (17)$$

Для дальнейшего преобразования системы (14) подставим в нее (17). Кроме того, чтобы исключить из системы уравнений величину \tilde{p} , продифференцируем первое уравнение по z , третье – по r , а затем вычтем их друг из друга. В результате получим

$$\begin{aligned}
 (u_z - w_r)_t &= \frac{2vw_z}{r} + g\gamma\rho_0(uu_r + vv_r + ww_r) - u_zu_r - uu_{rz} - w_zu_z - wu_{rz} + \\
 &+ u_rw_r + uw_{rr} + w_rw_z + ww_{zr} + v\left(u_{rrz} + u_{zzz} + \frac{u_{rz}}{r} - \frac{u_z}{r^2} - w_{rrr} - w_{rzz} - \frac{w_{rr}}{r}\right); \\
 v_t &= -uv_r - wv_z - \frac{uv}{r} + v\left(v_{rr} + v_{zz} + \frac{v_r}{r} - \frac{v}{r^2}\right); \\
 u_r + w_z + \frac{u}{r} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Ограничиваясь также случаем, когда зазор между цилиндрами h гораздо меньше радиуса внутреннего цилиндра R , $h \ll R$ (используем это приближение, чтобы пренебречь $\frac{u}{r}, \frac{w}{r}$ по сравнению с $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial r}$ на большей части зазора), из (18) можно получить систему дифференциальных уравнений в частных производных (4).

Заключение

Обратим внимание на сходство систем дифференциальных уравнений (2) и (12), которое приводит к сходству соответствующих аттракторов (см. рис. 2, 4). Это обстоятельство неудивительно, если учесть, что обе рассмотренные системы имеют, в некотором смысле, сходные картины движения жидкости при переходе течения от ламинарного к турбулентному (подразумевается система Лоренца для случая конвекционного течения, хотя она может описывать и другие явления [1]).

Можно сказать, что хаотический характер течения Куэтта – Тэйлора может быть выявлен при учете нелинейных по возмущению членов в уравнениях Навье – Стокса, а также сжимаемости среды, что приводит к появлению в уравнениях величины γ , которая прямо пропорциональна управляющему параметру a_1 (см. (13)). Вероятно, усложнение характера течения связано с увеличением числа характеристик системы, на которые влияет изменение скорости вращения внутреннего цилиндра, а следовательно, и управляющего параметра системы.

В то же время нужно сказать, что построение наиболее полной картины течения между коаксиальными цилиндрами при хаотическом режиме динамики требует решения уравнений (13) относительно функций $R_i(r)$, что само по себе является довольно сложной задачей и, скорее всего, может быть сделано лишь численным методом.

Дальнейшее детальное исследование течения между двумя коаксиальными цилиндрами, несомненно, имеет большое значение по той причине, что данную систему можно сравнительно легко сконструировать и исследовать различные возникающие в ней режимы течения [8]. При этом существует общность явлений (совпадение либо подобие систем уравнений), наблюдаемых в рассмотренной системе, подогреваемом снизу слое, одномодовом лазере, диссипативном осцилляторе с инерционной нелинейностью и т. д. [1]. Следовательно, изучая явления, наблюдаемые в системе Куэтта – Тэйлора, можно попытаться путем аналогии добиться значительного расширения области приложения полученных результатов.

Список литературы

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. – М.: Физматлит, 2001. – 295 с.
2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
3. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. – М.: Мир, 1991. – 368 с.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 711 с.
5. Chandrasekhar S. The stability of viscous flow between rotating cylinders in the presence of a magnetic field // Proc. Roy. Soc. A. – 1953. – V. 216. – P. 293.

6. Стюарт Дж.Т. О нелинейной механике в теории гидродинамической устойчивости // Механика. – 1959. – № 3 (56). – С. 19–38.

7. Brandstater A., Swinney H.L. Strange attractors in weakly turbulent Couette – Taylor flow // Phys. Rev. A. – 1987. – V. 35. – P. 2207–2220.

Поступила 25.11.04

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: delfinarium@tut.by*

V.A. Baldin

**ANALYTICAL BUILDING THE ATTRACTOR, DESCRIBING THE DYNAMICS
OF WEAKLY TURBULENT COUETTE – TAYLOR FLOW**

On the basis of Navier – Stokes and continuity equations the set of ordinary differential equations for functions, determining time dependence of velocity components in the case of coaxial cylinders, with the inner rotating, has been obtained in Taylor number's region, close to flow change from laminar to turbulent form. The chaotic dynamics mode has been revealed and the attractor of the system has been built analytically for the first time.