ИНФОРМАТИКА

2005 июль-сентябрь № 3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.8

Я.М. Шафранский

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ: НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ И НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматриваются системы обслуживания требований при условии, что значения части числовых параметров требований не заданы, известны лишь диапазоны, которым принадлежат эти значения. Обсуждаются возможные направления исследования задач построения расписаний в системах такого рода. Описываются результаты, полученные как для одностадийных, так и для простейших многостадийных систем обслуживания.

Введение

Известны ситуации, возникающие на практике, в которых построение расписаний обслуживания требований осуществляется в условиях, когда некоторые числовые параметры требований являются неопределенными величинами. Для каждого такого параметра известен лишь отрезок числовой оси, содержащий все возможные его значения. Обсуждение таких ситуаций можно найти в работе [1]. Цель данной статьи состоит не столько в том, чтобы представить новые результаты в этом сравнительно слабо изученном разделе теории расписаний, сколько попытаться в какой-то мере очертить перспективные направления исследований, а также обозначить те направления, где возможность успеха сомнительна.

Рассматриваемые в теории расписаний математические модели формулируются в терминах обслуживания требований в системе, состоящей из одного или более приборов. Требованию сопоставляется несколько приборов. Если каждое требование может быть полностью обслужено любым из этих приборов, то система называется одностадийной. В противном случае – многостадийной. Требованию j обычно сопоставляется несколько параметров: длительность p_{jL} его обслуживания прибором L, коэффициент w_j, характеризующий важность требования, и др. Построить расписание s означает тем или иным способом указать для каждой пары «требование – прибор» интервал времени, в котором этот прибор обслуживает данное требование. При этом следует соблюсти ряд ограничений. Например, на множестве требований может быть задан частичный порядок, который нельзя нарушать, и т. п.

Приведенное описание расписания справедливо лишь для детерминированного случая, когда, по крайней мере, длительности обслуживания требований (выполнения операций) фиксированы и известны. В недетерминированном случае для различных модельных ситуаций понятие расписания может определяться по-разному. Интерес представляет построение допустимого расписания, доставляющего минимум (или, реже, максимум) целевой функции, определенной на множестве расписаний. Такое расписание называется оптимальным и, говоря о решении задачи, обычно имеют в виду построение именно оптимального расписания.

В отличие от детерминированных систем обслуживания, где значение каждого параметра требования фиксировано и известно, в системах с неопределенными параметрами известны лишь нижняя и верхняя границы возможных значений параметра, причем параметр не является управляемым, он может принимать любые значения из интервала, определяемого указанными границами, независимо от воли лица, принимающего решение либо составляющего расписание. Этим системы с неопределенными параметрами отличаются от систем с переменными параметрами, в которых значения некоторых параметров также не фиксированы, но в соответствии с теми или иными правилами могут выбираться составителем расписания, являясь, таким образом, управляемыми.

1. Возможные направления исследований

Трудно не заметить, что описанная выше ситуация относится к разделу исследования операций, известному как теория принятия решений в условиях неопределенности (см., например, [2–5]). В рамках этой теории выработано несколько подходов к работе с оптимизационными задачами при наличии неопределенных факторов. Эти подходы, собственно, и определяют возможные направления исследования задач построения расписаний. Прежде чем переходить к их обсуждению, введем некоторые обозначения и определения.

Большинство известных задач оптимизации можно сформулировать следующим образом. Задана функция $F(x, y, z)$, зависящая от трех групп параметров, где x – управляемые параметры, $x \in X$ (X – множество наборов возможных значений управляемых параметров), y и z – неуправляемые параметры. Необходимо отыскать набор значений $x \in X$ управляемых параметров, доставляющий минимум (или максимум) функции $F(x, y, z)$ при условии, что значения всех параметров y заданы и известны. В зависимости от характера возможного поведения неуправляемых параметров z получаем три типа задач [2, 3].

Тип 1. Если, как и для параметров y, значения параметров z предполагаются заданными, заранее известными, то получаемая задача есть задача детерминированной оптимизации.

Тип 2. Параметры z – случайные величины с заданными, заранее известными законами распределения. Тогда рассматриваемая задача есть задача стохастической оптимизации.

Тип 3. Известна лишь область Z возможных значений параметров z. Параметры z не являются случайными величинами либо z – случайные величины с неизвестными законами распределения, которые не могут быть получены к моменту принятия решения.

Задачи и второго, и третьего типа принято относить к категории задач принятия решений в условиях неопределенности. Принципиальное различие этих типов заключается в наличии в задачах второго типа существенной дополнительной информации о поведении параметров z (законы их распределения). В задачах третьего типа никакой информации, кроме области Z возможных значений параметров z, нет, поэтому их обычно именуют просто задачами с неопределенными параметрами. Эти задачи и являются предметом обсуждения данной работы. Далее рассматриваются лишь задачи минимизации той или иной целевой функции, поскольку результаты, полученные для таких задач, в большинстве случаев несложно перенести на задачи поиска максимума.

Приведенная классификация задач, как и любая другая, достаточно условна. Известны и другие версии (см., например, [5]). Важно, что эти версии не противоречат друг другу и отвечают целям, которые стоят перед авторами работ. В нашем случае главное – оттенить отличия рассматриваемых задач от задач первых двух типов. Далее для упрощения записей вместо обозначения $F(x, y, z)$ целевой функции будем использовать запись $F(x, z)$, поскольку группа параметров y не играет какой-либо заметной роли в последующих рассуждениях.

С математической точки зрения, рассматривая задачи третьего типа, как правило, бессмысленно говорить о решении задачи в традиционном смысле, т. е. о поиске такого набора значений $x^* \in X$ управляемых параметров, что $F(x^*, z)$ есть наименьшее значение функции $F(x, z)$ по всем возможным выборам $x \in X$ при любых значениях $z \in Z$. Если не рассматривать изредка встречающиеся вырожденные ситуации, то для любого набора управляемых параметров $x^* \in X$ найдется такой набор $z' \in Z$, что $F(x^*, z') > F(x^0, z')$ для некоторого $x^0 \in X$.

Возможно ли применение математических методов при работе с задачами третьего типа? Может ли исследователь задачи выдать лицу, принимающему решение (ЛПР), рекомендации, позволяющие сделать обоснованный выбор того или иного набора значений управляемых параметров (варианта) в качестве решения? Теория исследования операций дает положительный ответ на эти вопросы (см., например, [3–5]). Можно условно выделить два направления исследований по выработке рекомендаций для ЛПР, действующего в условиях неопределенности.

Первое (основное) направление связано с введением некоторых вспомогательных критериев и решением соответствующих оптимизационных задач с тем же множеством X управляемых параметров. Вспомогательный критерий вводится таким образом, чтобы устранить неопределенность, обеспечивая тем самым переход к задаче детерминированной оптимизации. Известно несколько критериев такого рода [3–5].

Принцип гарантированного результата (критерий Вальда). Искомый набор x^* должен обеспечивать наименьшее значение целевой функции при наихудшем стечении обстоятельств (представленных неопределенными параметрами z). Иначе говоря, отыскивается набор $x^*\in X$, доставляющий минимум функции $V(x)=\max\{F(x,z)| z\in Z\}$.

Критерий Гурвица. Искомый набор x^* должен доставлять минимум функции $\Phi(x) = \lambda \max\{F(x,z) \mid z \in Z\} + (1-\lambda)\min\{F(x,z) \mid z \in Z\}$, где $0\le \lambda \le 1$ – параметр, выбираемый ЛПР.

Критерий Гурвица отражает некий компромисс между двумя противоположными позициями. Одна позиция представлена принципом гарантированного результата, отражающим крайний пессимизм, вторая – расчет на исключительное везение. При $\lambda = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, а при $\lambda = 0$ получаем позицию безоглядного оптимизма.

Критерий Сэвиджа. Искомый набор x^* должен доставлять минимум функции $\Psi(x) = \max\limits_{z\in Z}\{F(x,z) - \min\limits_{x\in X} F(x,z)\}$.

Критерий Сэвиджа можно трактовать как принцип минимизации потерь от принятия данного решения при наихудшем стечении обстоятельств. Здесь минимизируется максимально возможное «расстояние» между значением целевой функции для принятого решения x и значением целевой функции, которое соответствовало бы наилучшему варианту x^0, если бы набор значений неопределенных параметров z был известен заранее.

Используются и другие критерии, представляющие собой ту или иную комбинацию приведенных, а также критерии, включающие вероятностные характеристики неопределенных параметров (см. [4, 5]). Цель данной работы – не анализ достоинств и недостатков перечисленных вспомогательных критериев и не построение их исчерпывающего перечня, а привлечение внимания специалистов, работающих в теории расписаний, к подходу, основанному на введении таких критериев.

Как правило, исследователи задач стараются получить несколько наборов значений управляемых параметров, каждый из которых удовлетворяет хотя бы одному из вспомогательных критериев. Предоставление ЛПР такой подборки вариантов позволяет принимать более обоснованное решение, базирующееся на знании и сравнении свойств вариантов.

Второе направление исследований ориентировано на сокращение множества X. В работе [3], например, предлагается отсекать варианты $x\in X$, которые при любых $z\in Z$ уступают другим вариантам. Такой подход может оказаться полезным, если полученное в результате множество X' невелико по мощности и, кроме того, имеется аппарат выявления характеристик вариантов. В этом случае варианты $x\in X'$ можно проанализировать и предоставить ЛПР информацию о возможных последствиях принятия того или иного $x\in X'$ в качестве решения. Разумным, на первый взгляд, представляется и сужение X до такого минимального множества X', которое для каждого $z\in Z$ содержит хотя бы один вариант $x\in X$, доставляющий минимум исходной целевой функции при этом наборе z значений неопределенных параметров [1].

Нужно, однако, помнить, что нередко подмножество $X'\subset X$, содержащее лишь варианты, каждый из которых оптимален при некотором $z\in Z$, может не содержать ни одного варианта, оптимального в смысле того или иного вспомогательного критерия. Следует также иметь в виду, что работа по получению множества X' может оказаться почти бесполезной, если исследователь не в состоянии выдать ЛПР обоснованные рекомендации для выбора конкретного варианта $x\in X'$ в качестве решения.

При отсутствии варианта $x^*\in X$, являющегося оптимальным при любом наборе $z\in Z$, разумное сужение области X можно рассматривать лишь как вспомогательный этап, а не как способ, обеспечивающий выработку для ЛПР конкретных рекомендаций по выбору решения. Что же можно считать «разумным» сужением? Пусть, например, для каждого из перечисленных вспомогательных критериев итоговое множество X' включает варианты, оптимальные относительно этого критерия. Тогда сужение имеет смысл, если задача отыскания варианта x^0, оптимального с точки зрения вспомогательного критерия, имеет высокую сложность. В таком случае нередко оказывается эффективным двухэтапный подход, где на первом этапе с помощью какой-либо быстрой процедуры сужают область поиска x^0, а на втором этапе, используя трудоемкие процедуры, отыскивают либо x^0, либо «близкий» к нему набор x'.

Как можно «сузить» X, чтобы полученное множество X' удовлетворяло приведенным условиям? Один из возможных вариантов ответа приведен в следующем разделе.

2. Элиминация вариантов

Бинарное отношение $\succ$, определенное на множестве X, назовем *отношением H-доминирования*, если оно транзитивно и для $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \succ x_2$ (вариант x_1 доминирует вариант x_2) следует, что для любого набора $z \in Z$ выполняется соотношение $F(x_1, z) \le F(x_2, z)$.

Варианты $x_1, x_2 \in X$ назовем *эквивалентными*, если $x_1 \succ x_2$ и $x_2 \succ x_1$.

Введенное понятие H-доминирования описывает, вообще говоря, некоторый класс бинарных отношений. Определяя этот класс, автор пытается лишь обобщить уже существующие подходы. Можно заметить, например, что описанное в [4] отношение принадлежит данному классу, а приведенную выше фразу со ссылкой на работу [3] можно трактовать как намек на описание того же класса. Следует отметить также, что по своей структуре и схеме определения отношение H-доминирования схоже с отношением предпочтения по Парето для задач многокритериальной оптимизации (см., например, [6]).

Как использовать введенное отношение для сокращения исходного множества X?

Множество $X^H \subseteq X$ назовем *H-эффективным*, если для любого варианта $x \in X \backslash X^H$ найдется такой вариант $x' \in X^H$, что $x' \succ x$ и X^H не содержит такой пары x_1, x_2, что $x_1 \succ x_2$ либо $x_2 \succ x_1$.

Из определения следует, что эффективное множество минимально по включению. Нетрудно также проверить, что любые эффективные подмножества $X_1^H, X_2^H \subset X$ совпадают с точностью до эквивалентных вариантов и если X – конечное множество, то $|X_1^H| = |X_2^H|$.

На множестве X может быть задано, вообще говоря, несколько различных отношений H-доминирования. Каким условиям должно удовлетворять отношение, чтобы эффективное подмножество было минимальным по мощности (в случае конечного множества X)?

Заданное на конечном множестве X отношение H-доминирования $\succ$ назовем *минимальным*, если для любого другого отношения H-доминирования $\succ'$ выполняется $|X^H(\succ)| \le$ $\le |X^H(\succ')|$. Здесь $X^H(\succ)$ – H-эффективное множество, определяемое отношением $\succ$.

Теорема 1. *Отношение H-доминирования является минимальным тогда и только тогда, когда из существования вариантов $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $F(x_2,z) \le F(x_1,z)$ при любых $z \in Z$, следует, что $x_2 \succ x_1$, либо $x_1 \succ x_2$, либо существует такой вариант $x_3 \in X$, что $x_3 \succ x_1$ или $x_3 \succ x_2$.*

Доказательство. Пусть $\succ$ является минимальным отношением H-доминирования, и существует такая пара $x_1, x_2 \in X$, что $F(x_2,z) \le F(x_1,z)$ при любых $z \in Z$, но не выполняется ни $x_2 \succ x_1$, ни $x_1 \succ x_2$ и не существует такого $x_3 \in X$, что $x_3 \succ x_1$ или $x_3 \succ x_2$. В этом случае $x_1, x_2 \in X^H(\succ)$. Построим новое отношение $\succ'$, полагая $x \succ' x'$, если $x \succ x'$ и, кроме того, $x_2 \succ' x_1$. Отношение $\succ'$ является отношением H-доминирования и $|X^H(\succ)| > |X^H(\succ')|$, поскольку $x_1 \notin X^H(\succ')$. Последнее неравенство противоречит минимальности отношения $\succ$.

Покажем, что условие теоремы является достаточным для минимальности $\succ$. Пусть условие выполнено, но отношение $\succ$ не является минимальным. Тогда должно существовать такое отношение H-доминирования $\succ'$, что $|X^H(\succ)| > |X^H(\succ')|$. Положим $X_1 = X^H(\succ) \backslash X^H(\succ')$, $X_2 = X^H(\succ') \backslash X^H(\succ)$, тогда $|X_1| > |X_2|$. Отметим, что при выполнении условия теоремы невозможна ситуация $x_1, x_2 \in X^H(\succ)$, если x_1, x_2 таковы, что при любых $z \in Z$ выполняется $F(x_2, z) \le F(x_1, z)$.

Рассмотрим вариант $x \in X_1$. Из определения эффективного множества следует существование такого $x' \in X^H(\succ')$, что $x' \succ' x$, а это, в свою очередь, влечет выполнение неравенства $F(x', z) \le F(x, z)$ для любых $z \in Z$. Поскольку условие теоремы предполагается выполненным, то x и x' не могут одновременно принадлежать множеству $X^H(\succ)$, поэтому $x' \in X_2$. С другой стороны, из $x' \notin X^H(\succ)$ следует существование такого $x'' \in X^H(\succ)$, что $x'' \succ x'$. Последнее соотношение означает, что $F(x'', z) \le F(x', z)$ для любых $z \in Z$, следовательно, $F(x'', z) \le F(x, z)$ для любых $z \in Z$. Поскольку $x, x''\in X^H(\succ)$, то последнее неравенство противоречит предположению о том, что условие теоремы выполнено. Для того чтобы снять это противоречие, остается предположить, что $x = x''$. Отсюда получаем $F(x,z) = F(x',z)$ для любых $z\in Z$.

Итак, для любого варианта $x\in X_1$ существует такой $x'\in X_2$, что $x'\succ' x$ и $F(x,z) = F(x',z)$ для любых $z\in Z$. Поскольку $|X^H(\succ)|>|X^H(\succ')|$, то должна существовать такая тройка вариантов $x_0, x_1, x'\in X$, что $x_0, x_1\in X_1$, $x'\in X_2$ и $x'\succ' x_0$, $x'\succ' x_1$. В этом случае $F(x_0,z) = F(x',z)$ и $F(x_1,z) = F(x',z)$ для любых $z\in Z$. Таким образом, $F(x_0,z) = F(x_1,z)$ для любых $z\in Z$. Поскольку $x_0, x_1\in X^H(\succ)$, получаем противоречие предположению о выполнении условия теоремы. ■

Пусть на множестве X заданы функции $f_1(x) = \max\limits_{z\in Z} F(x,z)$, $f_2(x)=\min\limits_{z\in Z} F(x,z)$, $f_3(x) = \max\limits_{z\in Z}\{F(x,z)-\min\limits_{x\in X}F(x,z)\}$, $f_4(x) = F(x,z')$, $z'\in Z$ и $\theta(x) = \theta(f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x))$, причем функция $\theta(f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x))$ является неубывающей по каждому из четырех аргументов.

Теорема 2. *H-эффективное множество X^H содержит вариант $x^*\in X$, доставляющий минимум функции $\theta(x)$ на множестве X.*

Доказательство. Пусть $x^0\in X$ удовлетворяет условию $\theta(x^0) = \min\{\theta(x)|x\in X\}$ и $x^0\notin X^H$. Тогда должен существовать такой $x^*\in X^H$, что $x^*\succ x^0$ и, следовательно, для любого $z\in Z$ выполняется $F(x^*,z)\le F(x^0,z)$. Введем функцию $\Psi'(x,z) = F(x,z)-\min\limits_{x\in X}F(x,z)$. Обозначим через $z_1, z_2, z_3\in Z$ такие наборы значений неопределенных параметров, что $F(x^0,z_1) = \max\limits_{z\in Z}F(x^0,z)$, $F(x^0,z_2) = \min\limits_{z\in Z}F(x^0,z)$ и $\Psi'(x^0,z_3) = \max\limits_{z\in Z}\{F(x^0,z)-\min\limits_{x\in X}F(x,z)\}$. Аналогично пусть $z_1^*, z_2^*, z_3^*\in Z$ – наборы, удовлетворяющие условиям $F(x^*,z_1^*) = \max\limits_{z\in Z}F(x^*,z)$, $F(x^*,z_2^*) = \min\limits_{z\in Z}F(x^*,z)$ и $\Psi'(x^*,z_3^*) = \max\limits_{z\in Z}\{F(x^*,z)-\min\limits_{x\in X}F(x,z)\}$. Покажем, что $\theta(x^*)\le\theta(x^0)$. В силу монотонности функции $\theta(x)$ для доказательства этого неравенства достаточно показать, что $f_k(x^*)\le f_k(x^0)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Из $x^*\succ x^0$ следует, что $F(x^*,z_1^*)\le F(x^0,z_1^*)$, а из определения z_1 следует $F(x^0, z_1^*)\le F(x^0, z_1)$, т. е. $f_1(x^*)\le f_1(x^0)$. Аналогично $F(x^*,z_2^*)\le F(x^*,z_2)\le F(x^0,z_2)$, или $f_2(x^*)\le f_2(x^0)$ и точно так же $\Psi'(x^*,z_3^*)\le\Psi'(x^0,z_3^*)\le\Psi'(x^0,z_3)$, что эквивалентно $f_3(x^*)\le f_3(x^0)$. Очевидно, что $f_4(x^*)\le f_4(x^0)$. ■

Следствие 1. *H-эффективное множество X^H содержит варианты, оптимальные относительно критериев Вальда, Гурвица (при любом $0\le\lambda\le 1$) и Сэвиджа.*

Следствие 2. *H-эффективное множество X^H для любого $z\in Z$ содержит такой вариант $x(z)$, что $F(x(z), z) = \min\{F(x,z)\,|\,x\in X\}$.*

Таким образом, эффективное множество X^H, определяемое любым отношением H-доминирования, содержит как варианты, оптимальные относительно критериев Вальда, Гурвица и Сэвиджа, так и (для каждой из возможных реализаций неопределенных параметров) варианты, доставляющие минимум исходной целевой функции при этой реализации.

Отношение доминирования может быть введено и иным, более «мягким», способом.

На множестве X введем бинарное отношение $\blacktriangleright_z$ для $z\in Z$. Отношение $\blacktriangleright_z$ назовем *отношением S-доминирования*, если оно транзитивно и для $x_1, x_2\in X$ из $x_1\blacktriangleright_z x_2$ следует, что для набора значений $z\in Z$ неопределенных параметров выполняется соотношение $F(x_1,z)\le F(x_2,z)$. В этом случае будем говорить, что вариант x_1 доминирует вариант x_2 относительно $z\in Z$.

Корректнее сказать, что на X введено множество отношений доминирования $\blacktriangleright_z$ – свое отношение для каждого $z\in Z$, но для краткости будем говорить все же об одном отношении.

Будем говорить, что множество вариантов $X'\subset X$ *S-доминирует* вариант $x\in X$, если для каждого $z\in Z$ найдется такой $x(z)\in X'$, что $x(z)\blacktriangleright_z x$. В этом случае будем писать $X'\blacktriangleright x$.

Назовем множество $X^S\subseteq X$ *S-эффективным*, если для любого варианта $x\in X\backslash X^S$ выполняется $X^S\blacktriangleright x$ и ни для какого $x'\in X^S$ не существует такого подмножества $X'\subset X^S$, что $X'\blacktriangleright x'$.

Как и в случае H-доминирования, понятие S-доминирования описывает класс отношений. Отношение H-доминирования является частным случаем отношения S-доминирования, когда для каждого доминируемого варианта существует одноэлементное S-доминирующее множество. Отношение S-доминирования, налагая более слабые условия на сравниваемые варианты, не наследует свойств отношения H-доминирования (нетрудно построить пример, в котором для множества X^S не справедлив аналог следствия 1). Справедливо лишь следующее утверждение (аналог следствия 2).

Замечание. S-эффективное множество X^S для любого $z \in Z$ содержит такой вариант $x(z)$, что $F(x(z), z) = \min\{F(x, z) | x \in X\}$.

3. Задачи построения расписаний

Перейдем к рассмотрению задач построения расписаний при неопределенности некоторых параметров требований. Будем рассматривать *два направления*: *элиминацию вариантов и построение расписаний*, *оптимальных относительно вспомогательных критериев*. Представляется естественным начать исследование с задач, детерминированные аналоги которых полиномиально разрешимы. Это не означает, что задачи с NP-трудными детерминированными аналогами настолько безнадежны, что и браться за них нет смысла. Как и в детерминированной ситуации, исследование относительно легких задач может породить идеи, пригодные для использования при решении трудных задач.

3.1. Элиминация расписаний

Рассмотрим класс задач, в которых расписание может быть задано перестановкой требований, а целевой функционал является приоритето-порождающим [7]. Примеры таких задач можно найти в работах [7, 8]. Ограничимся обсуждением задач, в которых множество допустимых расписаний совпадает с множеством перестановок, допустимых относительно строгого порядка, заданного на множестве требований $N=\{1, \ldots, n\}$.

На множестве N задано отношение строгого порядка $\to$, представленное своим графом редукции $G = (N, U)$. Перестановка $\pi = (j_1, \ldots, j_r)$, $r \le n$, из элементов множества N называется допустимой относительно строгого порядка $\to$, если из $j_k \to j_l$ (или, что эквивалентно, в графе G из вершины j_k существует путь в вершину j_l) следует $k < l$. Вершина j_k называется предшественником вершины j_l, а j_l называется потомком j_k. Если $(j_k, j_l) \in U$, то j_k называется непосредственным предшественником вершины j_l, а j_l называется прямым потомком j_k. Для вершин i и j будем писать $i \sim j$, если не выполняется ни $i \to j$, ни $j \to i$. Множество всех предшественников и потомков вершины j обозначим соответственно через $B(j)$ и $A(j)$, а множества непосредственных предшественников и прямых потомков – через $B^0(j)$ и $A^0(j)$.

Для $v, h \in N$ обозначим $\overline{B}(h,v) = B(h)\backslash(B(v) \cup v)$, $\overline{A}(h,v) = A(v)\backslash(A(h) \cup h)$.

Перестановка π называется частичной, если в нее входят не все элементы множества N. В этом случае $\{\pi\}$ – множество элементов перестановки π, а число $\theta = |\{\pi\}|$ называется длиной перестановки π. Если $\{\pi\} = \phi$, то говорят о перестановке нулевой длины. Обозначим через $\overline{\Pi}$ множество всех перестановок из элементов множества N (включая частичные и нулевой длины). Пусть $\Pi \subseteq \overline{\Pi}$, обозначим через $S[\Pi]$ множество сегментов перестановок из Π, т. е. $\pi' \in S[\Pi]$, если существуют такие $\sigma_1, \sigma_2 \in \overline{\Pi}$, что $(\sigma_1, \pi', \sigma_2) \in \Pi$.

Функционал $F(\pi)$, определенный на некотором множестве Π^0, называется *приоритето-порождающим на множестве* $\Pi \subseteq \Pi^0$, если на множестве $S[\Pi]$ может быть определен функционал $\omega(\pi)$, обладающий следующими свойствами. Для любых $\alpha, \beta \in S[\Pi]$ и любых таких перестановок $\pi' = (\sigma_1, \alpha, \beta, \sigma_2)$ и $\pi'' = (\sigma_1, \beta, \alpha, \sigma_2)$, что $\pi', \pi'' \in \Pi$, справедливость неравенства $\omega(\alpha) \ge \omega(\beta)$ влечет справедливость неравенства $F(\pi') \le F(\pi'')$. В этом случае $\omega(\pi)$ называется *функционалом приоритета* для $F(\pi)$.

Обозначим через $\Pi(G)$ множество всех полных перестановок элементов множества N, допустимых относительно строгого порядка $\to$, определяемого графом G.

Рассмотрим задачу отыскания перестановки $\pi^* \in \Pi(G)$, доставляющей минимум целевому функционалу $F(\pi)$, который является приоритето-порождающим на множестве $\Pi(G)$.

***Теорема* 3** [7]. *Пусть функционал $F(\pi)$ является приоритето-порождающим на множестве $\Pi(G)$, $B^0(h)=v$ и $\omega(h)\geq\omega(j)$ для всех $j\in \overline{A}(h,v)\cup v$. Тогда для любой перестановки $\pi = (\ldots, v, \sigma, h, \ldots)\in \Pi(G)$ найдется такая перестановка $\pi^0 = (\ldots, v, h, \ldots)\in\Pi(G)$, что $F(\pi^0) \leq F(\pi)$.*

***Теорема* 4** [7]. *Пусть функционал $F(\pi)$ является приоритето-порождающим на множестве $\Pi(G)$, $h\sim v$ и $\omega(j) \geq \omega(i)$ для всех $j\in \overline{B}(h,v)\cup h$ и $i\in \overline{A}(h,v)\cup v$. Тогда для любой перестановки $\pi(\ldots, v, \sigma, h, \ldots)\in\Pi(G)$ найдется такая перестановка $\pi^0 = (\ldots, h, v, \ldots)\in\Pi(G)$, что $F(\pi^0) \leq F(\pi)$.*

Предположим, что каждому требованию $j\in N$ сопоставлено несколько параметров, в том числе длительность p_j обслуживания требования j. Рассмотрим ситуацию с элементами неопределенности, в частности, будем считать, что длительности p_j не заданы, а для каждого $j\in N$ известен лишь интервал $[P_j^{\min}, P_j^{\max}]$, $0 < P_j^{\min} \leq P_j^{\max}$, такой, что $p_j\in [P_j^{\min}, P_j^{\max}]$. Тогда значение целевого функционала зависит как от перестановки π (управляемый параметр), так и от набора значений p_j, $j=1, \ldots, n$ (набор неопределенных параметров). В этом случае вместо записи $F(\pi)$ будем использовать $F(\pi, p)$.

Отметим, что обозначение $F(\pi, p)$ введено лишь для того, чтобы подчеркнуть переход от детерминированной ситуации к ситуации в условиях неопределенности. Значения функционала $F(\pi)$ и в исходной формулировке зависят от набора p длительностей обслуживания требований. Отличие состоит лишь в том, что в детерминированной ситуации набор p фиксирован и известен, причем p_j – это любые положительные числа. Следовательно, целевой функционал, будучи приоритето-порождающим в детерминированном случае, остается таковым при любом фиксированном наборе p неопределенных параметров из декартова произведения $\prod_{j=1}^{n}[P_j^{\min}, P_j^{\max}]$. Поэтому и в условиях неопределенности будем называть такой функционал приоритето-порождающим. Для функционала приоритета будем использовать запись $\omega(j,p_j)$, подчеркивая зависимость его значений от конкретного выбора $p_j\in[P_j^{\min}, P_j^{\max}]$.

Введем пару функций $\omega_{\min}(j) = \min\{\omega(j, p_j) \mid p_j \in [P_j^{\min}, P_j^{\max}]\}$ и $\omega_{\max}(j) = \max\{\omega(j, p_j) \mid p_j \in [P_j^{\min}, P_j^{\max}]\}$. Нетрудно заметить, что функции $\omega_{\min}(j)$ и $\omega_{\max}(j)$ не зависят от величины p_j неопределенного параметра.

На множестве N определим бинарное отношение $\vartriangleright$, полагая $i \vartriangleright j$ для $i, j\in N$, если $\omega_{\min}(i) \geq \omega_{\max}(j)$.

***Теорема* 5**. *Если функционал $F(\pi, p)$ является приоритето-порождающим на $\Pi(G)$, то отношение $\vartriangleright$, заданное на множестве N, определяет отношение S-доминирования на множестве $\Pi(G)$.*

Доказательство. Теорема 4 определяет отношение доминирования $\pi^0 \succ \pi$ в детерминированном случае. Заменим в формулировке теоремы $F(\pi)$ на $F(\pi, p)$ и неравенство $\omega(j)\geq\omega(i)$ на неравенство $\omega_{\min}(j) \geq \omega_{\max}(i)$. Зафиксируем набор длительностей $p\in \prod_{j=1}^{n}[P_j^{\min}, P_j^{\max}]$. Из $\omega_{\min}(j) \geq \omega_{\max}(i)$ следует, что $\omega(j, p_j) \geq \omega(i, p_i)$. Тогда из теоремы 4 следует, что для перестановки π в $\Pi(G)$ существует доминирующая ее перестановка π^0. Зафиксировав другой набор длительностей, получим, что условия теоремы вновь выполнены, но на этот раз для π найдется, вообще говоря, другая доминирующая перестановка π^0. Итак, можно записать $\overline{\pi^0} \blacktriangleright \pi$, где $\overline{\pi^0}$ – множество всех перестановок π^0, доминирующих π при различных наборах p. Аналогично, теорема 3 также порождает множество перестановок, доминирующих перестановку π, представленную в условии теоремы. Таким образом, можно считать, что теоремы 3 и 4 с помощью отношения $\vartriangleright$ генерируют на множестве $\Pi(G)$ отношение S-доминирования. ■

Теоремы 3 и 4 в детерминированном случае позволяют сокращать область поиска оптимальной перестановки путем преобразования графа G. В условиях теоремы 3 пара v и h вершин графа заменяется одной вершиной, которой сопоставляется перестановка (v, h). В условиях теоремы 4 в G вводится новая дуга (h, v). Полученный в результате многократного применения таких преобразований граф G' обладает тем свойством, что $\Pi(G')\subset\Pi(G)$ и $\Pi(G')\cap\Pi^*(G)\neq\phi$, где $\Pi^*(G)$ – исходное множество оптимальных перестановок. В условиях неопределенности, как следует из теоремы 5, будет работать тот же механизм сокращения области $\Pi(G)$, если в условии теоремы 3 неравенство $\omega(h)\geq\omega(j)$ заменить на $\omega_{\min}(h)\geq\omega_{\max}(j)$, а в условии теоремы 4 неравенство $\omega(j)\geq\omega(i)$ заменить на $\omega_{\min}(j)\geq\omega_{\max}(i)$.

Существенным недостатком такого подхода является то, что отношение доминирования, используемое для сужения области $\Pi(G)$, есть S-доминирование. Как следствие отсутствуют гарантии наличия в результирующем множестве $\Pi(G')$ перестановок, оптимальных относительно критериев Вальда, Гурвица и Сэвиджа.

Можно ли, используя отношение $\triangleright$, определить на множестве $\Pi(G)$ отношение H-доминирования? Можно, но за счет введения довольно жестких дополнительных условий. В условие теоремы 3, например, нужно ввести следующее дополнительное ограничение. Для всех таких элементов $l\in N$, что $l\sim v$, должно выполняться $\omega_{\min}(l)\geq\omega_{\max}(v)$ либо $\omega_{\min}(h)\geq\omega_{\max}(l)$.

3.2. Вспомогательные критерии

Рассмотрим несколько конкретных задач построения расписаний в условиях неопределенности и попытаемся строить расписания, оптимальные относительно того или иного вспомогательного критерия. По-прежнему неопределенными предполагаются длительности обслуживания требований.

Целевая функция называется регулярной, если она является неубывающей от моментов завершения обслуживания требований $C_j(s)$ при расписании s. В ситуации неопределенности будем использовать обозначение $C_j(s, p_j)$ вместо $C_j(s)$.

Критерий Вальда. Отыскивается расписание s, доставляющее минимум функции $V(s)=\max\{F(s,p)\mid p\in\prod_{j=1}^{n}[P_j^{\min},P_j^{\max}]\}$. Обозначим $p_{\max}=(P_1^{\max},P_2^{\max},...,P_n^{\max})$.

Теорема 6. *Если целевая функция $F(s, p)$ является регулярной, то $V(s) = F(s, p_{\max})$.*

Доказательство. Пусть при наборе длительностей $p\in\prod_{j=1}^{n}[P_j^{\min},P_j^{\max}]$ расписание s является допустимым. Выберем некоторое требование j и заменим p_j на $P_j^{\max}$. Момент начала обслуживания требования j (либо начала выполнения одной из его операций в случае многостадийной системы обслуживания) при такой замене сохраняется, поэтому $C_j(s, P_j^{\max})\geq C_j(s,p_j)$. При этом моменты начала обслуживания последующих требований (операций) могут лишь увеличиться. Кроме того, s остается допустимым расписанием, поскольку оно должно оставаться допустимым при любом наборе $p\in\prod_{j=1}^{n}[P_j^{\min},P_j^{\max}]$. Выполнив аналогичную замену для всех требований, получим, в силу регулярности целевой функции, $F(s,p_{\max})\geq F(s,p)$. ■

Итак, при регулярной целевой функции построение расписания, оптимального относительно критерия Вальда, сводится к решению детерминированного варианта исходной задачи путем фиксации для всех длительностей их максимальных значений.

Критерий Гурвица. Отыскивается расписание s, доставляющее минимум функции $\Phi(s)=\lambda\max\{F(s,p)\mid p\in\prod_{j=1}^{n}[P_j^{\min},P_j^{\max}]\}+(1-\lambda)\min\{F(s,p)\mid p\in\prod_{j=1}^{n}[P_j^{\min},P_j^{\max}]\}$, где $0\leq\lambda\leq1$. Обозначим $p_{\min}=(P_1^{\min},...,P_n^{\min})$. По аналогии с критерием Вальда для любой регулярной функции $F(s,p)$ имеем $\min\{F(s,p)\mid p\in\prod_{j=1}^{n}[P_j^{\min},P_j^{\max}]\}=F(s,p_{\min})$. Поэтому $\Phi(s) = \lambda F(s, p_{\max}) + (1-\lambda)F(s, p_{\min})$. Несмотря на простоту вычисления значений функции $\Phi(s)$, решение соответствующей задачи минимизации далеко не всегда оказывается легким даже когда речь идет о задачах, где минимум функции $F(s, p)$ при фиксированном p находится относительно просто. Рассмотрим в качестве примеров несколько задач минимизации конкретных приоритето-порождающих функционалов.

Пусть требования множества N обслуживаются одним прибором начиная с момента $t=0$. Каждому требованию j сопоставлена неубывающая функция $f_j(t)$ стоимости завершения обслуживания требования в момент времени t. Известно, что $p_j \in [P_j^{\min}, P_j^{\max}]$. На N задано отношение строгого порядка, представленное своим графом редукции G. Необходимо найти допустимую последовательность π обслуживания требований, минимизирующую общую стоимость обслуживания $F(\pi, p) = \sum_{j=1}^{n} f_j(C_j(\pi, p_j))$.

Рассмотрим два специальных случая задачи, когда а) $f_j(t) = w_j t + b_j$ и б) $f_j(t) = w_j \exp(\gamma t) + b_j$, где w_j, b_j и γ – действительные числа, $\gamma \neq 0$. Пусть $\pi = (j_1, \ldots, j_n)$. Известно [7, 8], что в обоих случаях функционал $F(\pi, p)$ является приоритето-порождающим. Пусть требованию j сопоставлено число τ_j, тогда для перестановки $\sigma \in S[\Pi(G)]$ положим $\tau(\sigma) = \sum_{j\in\{\sigma\}} \tau_j$.

В случае а) $\Phi(\pi)$ имеет вид $\Phi(\pi) = \lambda \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{l=1}^{j} P_l^{\max} + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{l=1}^{j} P_l^{\min} + b(\pi) =$ $= \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\sum_{l=1}^{j} (\lambda P_l^{\max} + (1-\lambda) P_l^{\min}) \right) + b(\pi)$. Таким образом, $\Phi(\pi) = F(\pi, \lambda P_l^{\max} + (1-\lambda) P_l^{\min})$ и минимизация $\Phi(\pi)$ сводится к минимизации исходного целевого функционала.

В случае б) имеем $\Phi(\pi) = \lambda \sum_{j=1}^{n} w_j \exp\left(\gamma \sum_{l=1}^{j} P_l^{\max}\right) + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} w_j \exp\left(\gamma \sum_{l=1}^{j} P_l^{\min}\right)$. Рассмотрим пару перестановок $\pi' = (\sigma_1, \alpha, \beta, \sigma_2)$ и $\pi'' = (\sigma_1, \beta, \alpha, \sigma_2)$ из множества $\Pi(G)$, где $\alpha, \beta \in S[\Pi(G)]$. Найдем условия, при которых $\Phi(\pi') \le \Phi(\pi'')$. С помощью техники, используемой в работе [7] для построения функционалов приоритета, можно убедиться, что для выполнения $\Phi(\pi') \le \Phi(\pi'')$ достаточно, чтобы $\lambda(\exp(\gamma P^{\max}(\alpha)) - 1)(F(\beta, p_{\max}) - b(\beta)) + (1-\lambda)(\exp(\gamma P^{\min}(\alpha)) - 1)(F(\beta, p_{\min}) - b(\beta)) \le \lambda(\exp(\gamma P^{\max}(\beta)) - 1)(F(\alpha, p_{\max}) - b(\alpha)) + (1-\lambda)(\exp(\gamma P^{\min}(\beta)) - 1)(F(\alpha, p_{\min}) - b(\alpha))$. На основе этого неравенства не удается построить какого-либо транзитивного отношения доминирования на множестве $S[\Pi(G)]$. Тем не менее, если $w_j = w_i = w > 0$ для всех $j, i \in N$ и, кроме того, $G = (N, \phi)$, т. е. отношение порядка на множестве N пусто, то из последнего неравенства пользу извлечь можно. При $G = (N, \phi)$ в качестве α и β достаточно рассмотреть одноэлементные перестановки (будем считать, что $\alpha, \beta \in N$). Тогда последнее неравенство имеет вид $\lambda(\exp(\gamma P_\alpha^{\max}) - 1) w \times$ $\exp(\gamma P_\beta^{\max}) + (1-\lambda)(\exp(\gamma P_\alpha^{\min}) - 1) w \exp(\gamma P_\beta^{\min}) \le \lambda(\exp(\gamma P_\beta^{\max}) - 1) w \exp(\gamma P_\alpha^{\max}) + (1-\lambda) w \times$ $(\exp(\gamma P_\beta^{\min}) - 1) \exp(\gamma P_\alpha^{\min})$ или, что эквивалентно, $\lambda \exp(\gamma P_\beta^{\max}) + (1-\lambda) \exp(\gamma P_\beta^{\min}) \ge$ $\lambda \exp(\gamma P_\alpha^{\max}) + (1-\lambda) \exp(\gamma P_\alpha^{\min})$.

Таким образом, для получения в случае б) перестановки, оптимальной относительно критерия Гурвица, при условии $w_j = w > 0$, $j = 1, \ldots, n$, и $G = (N, \phi)$ достаточно упорядочить элементы множества N по неубыванию величин $\lambda \exp(\gamma P_j^{\max}) + (1-\lambda) \exp(\gamma P_j^{\min})$.

Задача Беллмана-Джонсона для двух приборов. В двухстадийной системе обслуживания, состоящей из двух приборов, каждое требование обслуживается сначала первым прибором в течение a_j единиц времени, затем вторым прибором в течение b_j единиц времени, $a_j \in [A_j^{\min}, A_j^{\max}]$, $b_j \in [B_j^{\min}, B_j^{\max}]$. Необходимо построить расписание s, минимизирующее момент завершения обслуживания последнего требования $C_{\max}(s) = \max\{C_j(s) | j \in N\}$. Как в детерминированном случае, так и в ситуации с неопределенными длительностями обслуживания расписание s однозначно определяется парой перестановок номеров требований. Одна из перестановок определяет порядок обслуживания требований первым прибором, другая – вторым прибором. Нетрудно убедиться, что поиск оптимального расписания можно ограничить расписаниями, при которых оба прибора обслуживают требования в одной и той же последовательности, т. е. расписание задается перестановкой номеров требований.

Пусть $\pi^*_{\max}$ – перестановка, доставляющая минимум функции $C_{\max}(\pi)$ при длительностях обслуживания требования j, равных $A_j^{\max}$ и $B_j^{\max}$, $j = 1, \ldots, n$, а $\pi^*_{\min}$ – перестановка, доставляющая минимум $C_{\max}(\pi)$ при длительностях $A_j^{\min}$ и $B_j^{\min}$. Обозначим через π^H перестановку, оптимальную относительно критерия Гурвица. Пусть перестановка $\pi^0 \in \{\pi^*_{\max}, \pi^*_{\min}\}$ такова, что $\Phi(\pi^0) = \min\{\Phi(\pi^*_{\max}), \Phi(\pi^*_{\min})\}$, тогда $\Phi(\pi^0) \le \frac{3}{2}\Phi(\pi^H)$. Последнее соотношение есть прямое следствие того, что для любых перестановок π_1 и π_2 выполняется $C_{\max}(\pi_1) \le 2C_{\max}(\pi_2)$. Таким образом, перестановку π^0 можно использовать в качестве приближенного решения при поиске расписания, оптимального по Гурвицу.

Нетрудно построить алгоритм, улучшающий качество перестановки π^0. Пусть для определенности $\pi^0 = \pi^*_{\max}$. Исходный целевой функционал в задаче Беллмана–Джонсона является приоритето-порождающим [7]. Идея алгоритма состоит в следующем. Отыщем в π^0 требование j с максимальным значением $\omega(j, P_j^{\min})$ и, если оно расположено в π^0 не на первой позиции, переместим его на несколько позиций вперед так, чтобы для полученной в результате перестановки π' выполнялось соотношение $\Phi(\pi') < \Phi(\pi^0)$. Найдем требование со следующим по величине значением $\omega(j, P_j^{\min})$, выполним для него описанные действия и т. д.

Заключение

Рассмотрены возможные подходы к построению расписаний, когда некоторые параметры требований являются неопределенными. Найдены достаточные условия, которым должно удовлетворять заданное на множестве расписаний отношение доминирования для того, чтобы элиминация доминируемых расписаний сохраняла, в частности, расписания, оптимальные относительно критериев Вальда, Гурвица и Сэвиджа. Показано, что адаптированные для условий неопределенности отношения доминирования, используемые для локализации оптимума во многих детерминированных задачах, указанным условиям в общем случае не удовлетворяют, а их достройка до «хороших» отношений (отношений H-доминирования) оказывается возможной, но малоэффективной. Не исключено, впрочем, что для каких-то конкретных задач эффективные правила доминирования, сохраняющие оптимальные по Гурвицу и Сэвиджу расписания, могут быть сконструированы с учетом специфических особенностей задачи. Таким образом, к построению методов сужения области поиска расписаний, оптимальных по Гурвицу и Сэвиджу, следует подходить с осторожностью, учитывая, что не все отношения доминирования такие расписания сохраняют.

Что касается непосредственно построения расписаний, оптимальных относительно перечисленных вспомогательных критериев, то оптимизация по Вальду для большинства задач сводится к решению детерминированного аналога задачи. Незначительное число задач сравнительно просто решается при использовании критерия Гурвица. Для критерия Сэвиджа результаты пока отсутствуют. Поэтому дальнейшие исследования целесообразно сосредоточить на разработке методов построения расписаний, оптимальных относительно двух последних критериев, а также попытаться использовать другие известные вспомогательные критерии и обратить внимание на разработку новых.

Автор выражает глубокую признательность Г.М. Левину за обсуждение работы и полезные замечания. Работа выполнена при частичной поддержке фонда МНТЦ, проект B-986.

Список литературы

1. Сотсков Ю.Н., Сотскова Н.Ю. Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами. – Мн.: ОИПИ НАН Беларуси, 2004. – 290 с.

2. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971. – 384 с.

3. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 208 с.

4. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. – М.: Мир, 1990. – 208 с.

5. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1981. – 258 с.

6. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

7. Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М. Теория расписаний. Одностадийные системы. – М.: Наука, 1984. – 384 с.

8. Танаев В.С., Ковалев М.Я., Шафранский Я.М. Теория расписаний. Групповые технологии. – Мн.: Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 1998. – 290 с.

Поступила 28.04.05

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: shafr@newman.bas-net.by

Y.M. Shafransky

SCHEDULING PROBLEMS WITH UNCERTAIN PARAMETERS: RESEARCH DIRECTIONS AND SOME RESULTS

The paper considers the scheduling of jobs under an assumption that values of some job parameters are unknown, only intervals for the values are given. Research directions for corresponding problems are discussed. Some results for single- and multistage systems are presented. In particular, a class of binary dominance relations is introduced. The relations save schedules optimal with respect to criteria of Wald, Hurwicz and Savage. For some particular problems the algorithms for constructing schedules that are optimal from the point of view of Wald and Hurwicz criteria are proposed.