

УДК 681.511.2; 621: 658.011.56

А.А. Несенчук

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОПРИВОДА НА ОСНОВЕ КОРНЕВОЙ МОДЕЛИ

*Рассматривается задача моделирования управления в системе векторного управления асинхронного электродвигателя с использованием математической модели в форме расширенного корневого годографа. Выполняется расчет параметров системы, обеспечивающих устойчивость при функционировании в условиях существенной параметрической неопределенности объекта.*

### Введение

Среди современных методов синтеза систем управления сложными техническими объектами наиболее распространенными являются частотные [1], корневые [1–5], модального управления [2], позволяющие задавать желаемое расположение корней, пространства состояний [1], хорошо подходящие для структурного синтеза, и ряд других. Интересны задачи об устойчивости в условиях неопределенности, решаемые в современных постановках в робастном варианте [3–6], для которых может быть использован корневой подход. Преимущество данного подхода к проблеме состоит в том, что само его использование уже предполагает параметрические вариации (неопределенность). Он идеально подходит для синтеза систем и отличается большой наглядностью, позволяя не только рассчитывать требуемые значения параметров системы, но и в деталях наблюдать характер изменения динамических свойств, реакцию системы в ответ на параметрические вариации, что особенно важно при исследовании систем с неопределенными параметрами.

Качество управления потокосцеплением в системах векторного управления электроприводом в значительной степени определяет качество управления электромагнитным моментом и скоростью, энергетическую эффективность привода. Актуальной является проблема управления потокосцеплением в условиях параметрической неопределенности [7]. Поэтому важное значение имеет вопрос выбора параметров характеристического полинома синтезируемой системы по критерию принадлежности корней заданной области при условии неопределенности параметров объекта.

### 1. Структурная схема канала управления потокосцеплением

На структурной схеме системы управления потокосцеплением электропривода (рис. 1) управляемым объектом является асинхронный электродвигатель.

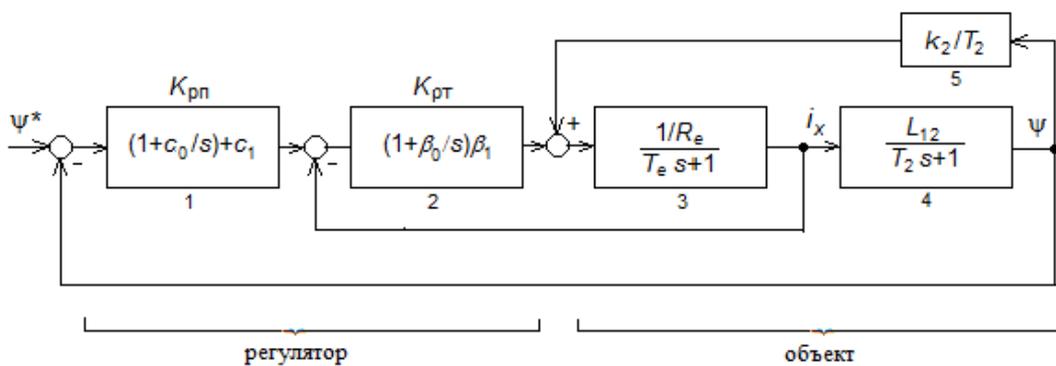


Рис. 1. Структурная схема системы управления потокосцеплением электропривода

Уравнение динамики системы управления имеет следующий вид:

$$((\psi^* - \psi)K_{pn} - i_x)K_{pt} + \frac{k_2}{T_2}\psi \frac{1/R_e}{T_e s + 1} = i_x = \frac{\psi(T_2 s + 1)}{L_{12}}, \quad (1)$$

где  $\psi$  – потокосцепление;  $K_{pn}$ ,  $K_{pt}$  – передаточные функции регулятора потокосцепления и тока соответственно;  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  – коэффициенты регуляторов потокосцепления и тока ( $c_0 = \text{const}$ );  $R_e$  – сопротивление эквивалентное, Ом;  $T_e$  – постоянная времени эквивалентная, с;  $L_{12}$  – взаимдуктивность статора и ротора, Гн ( $L_{12} = \text{const}$ );  $T_2$  – постоянная времени ротора, с;  $k_2 = \text{const}$ ;  $i_x$  – сила тока, А.

На основе (1) запишем характеристический полином системы в виде

$$N = (s + \beta_0)\beta_1(s + c_0)c_1 + \beta_1(s + \beta_0)(T_2 s + 1)s - \frac{k_2}{T_2}s^2 + (T_2 s + 1)(T_e s + 1)\frac{R_e}{L_{12}}s^2, \quad (2)$$

где  $\beta_0 = \frac{1}{T_e}$ ;  $\beta_1 = \frac{T_e R_e}{2T_\mu}$ ;  $\beta_{pn} = \frac{T_2}{4T_\mu L_{12}}$ ;  $c_0 = \frac{1}{T_2}$ ;  $c_1 = \beta_{pn}$ ;  $T_\mu$  – постоянная времени.

Параметры  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $c_0$ ,  $c_1$  представляют собой параметры регулятора; параметры  $R_e$ ,  $L_{12}$ ,  $T_e$ ,  $T_2$ ,  $k_2$  являются параметрами объекта. На основе (2) формируются следующие выражения для определения коэффициентов полинома (2), которые связывают эти коэффициенты с физическими параметрами системы:

$$a_0 = T_2 T_e \frac{R_e}{L_{12}}; \quad (3)$$

$$a_1 = T_e \frac{R_e}{L_{12}} + T_2 \frac{R_e}{L_{12}} + \beta_1 T_2; \quad (4)$$

$$a_2 = \beta_1 c_1 + \beta_1 \beta_0 T_2 + \beta_1 - \frac{k_2}{T_3} + \frac{R_e}{L_{12}}; \quad (5)$$

$$a_3 = \beta_0 \beta_1 c_1 + \beta_1 c_0 c_1 + \beta_0 \beta_1; \quad (6)$$

$$a_4 = \beta_0 \beta_1 c_0 c_1. \quad (7)$$

## 2. Характеристический полином системы и его расширение. Постановка задачи

Ввиду воздействия различных внутренних и внешних факторов параметры объекта (электродвигателя) при его работе могут изменяться в широких пределах. Поэтому будем рассматривать систему управления электродвигателем как систему с параметрической, интервальной, неопределенностью. Преобразуем характеристический полином (2) системы управления приводом к следующему общему виду:

$$s^4 + a_1 s^3 + a_2 s + a_3 = p(s), \quad (8)$$

где коэффициенты  $a_j$  являются действительными и определяются выражением

$$\underline{a}_j \leq a_j \leq \bar{a}_j, \quad j = \overline{0, 4}, \quad a_0 \neq 0; \quad (9)$$

$\underline{a}_j$  и  $\bar{a}_j$  – граничные значения интервалов изменения коэффициентов  $a_j$ .

Расширение [4] от полинома (3) имеет следующий вид:

$$E_4(p(s)) = \begin{cases} s + a_1 = 0, & (a) \\ s^2 + a_1 s + a_2 = 0, & (b) \\ s^3 + a_1 s^2 + a_2 s = 0, & (c) \\ s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0. & (d) \end{cases} \quad (10)$$

Выражение (10) представляет собой систему полиномов, где снизу записывается полином (8), а каждый следующий перед ним полином получается из предыдущего посредством вычитания свободного члена и деления на оператор  $s$ . Каждый предыдущий сверху полином системы (10) называется *порождающим*, а последующий – *порождаемым* полиномом системы.

Устанавливаются границы

$$\sigma_{\max} = \sigma_1, \sigma_{\min} = \sigma_2 \tag{11}$$

области качества  $Q$ , ограниченной двумя линиями  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (рис. 2) равной степени устойчивости, внутри которой требуется разместить семейство корней интервального полинома (8) с целью обеспечения заданного качества работы привода. С целью решения поставленной задачи используется расширение (10) полинома (3) и, соответственно, его расширенный корневой годограф [4]. Примем значения  $\sigma_{\max} = -4,5$ ,  $\sigma_{\min} = -105$ .

Интервалы значений параметров коэффициентов (8), в пределах которых сохраняется робастная устойчивость и робастное качество [3, 6] системы, определяются на основании заданных границ (11) области качества  $Q$  и с использованием расширения (10) характеристического полинома (8) системы.

### 3. Вычисление значений интервальных параметров

С целью вычисления значений границ интервалов параметров  $a_2$ ,  $a_3$  и  $a_4$  используем соответственно уравнения (10.b), (10.c) и (10.d) расширенного полинома (10) в соответствии с разработанной методикой [4]. Чтобы применить данную методику к интервальному характеристическому полиному для обеспечения заданных требований качества переходного процесса, необходимо разделить область  $Q$  линиями равной степени устойчивости  $b_1$  и  $b_2$  (рис. 2), которые соответственно будут являться границами областей размещения корней (области качества) полиномов (10.b) и (10.c). В результате область качества  $Q$ , расположенная между заданными границами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  локализации корней системы, оказалась разделенной на три подобласти –  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$ , две первые из которых ограничивают размещение корней полиномов (10.b) и (10.c) расширения соответственно. Границы интервалов  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  вычисляются последовательно.

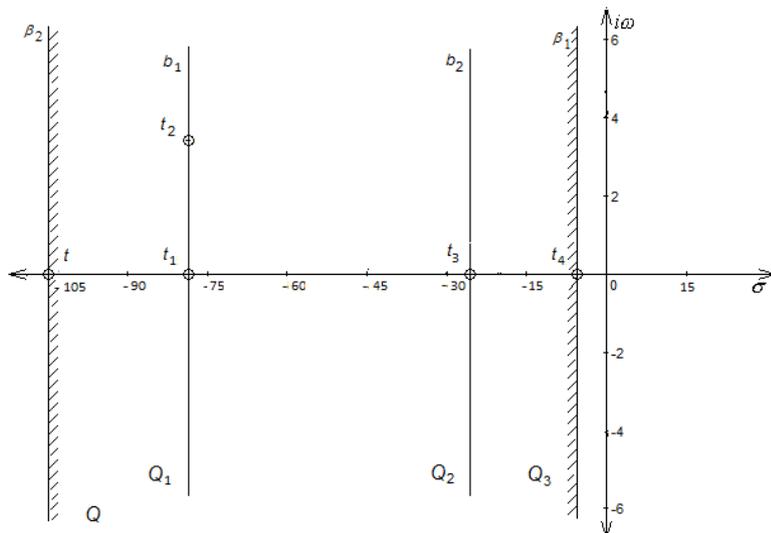


Рис. 2. Расположение границ  $\beta_1$  и  $\beta_2$  области качества  $Q$  системы

С целью синтеза требуемого характеристического полинома (8) рассмотрим вначале полином второй степени (10.b). Подставив в (10.b) выражение  $s = \sigma + i\omega$ , запишем

$$(\sigma + i\omega)^2 + a_1(\sigma + i\omega) + a_2 = 0$$

и после преобразования получим

$$\sigma^2 + i(2\sigma\omega + a_1\omega) - \omega^2 + a_1\sigma + a_2 = 0.$$

На основе последнего выражения запишем уравнение корневого годографа (УКГ)

$$2\sigma\omega + a_1\omega = 0 \quad (12)$$

и уравнение параметра (УП) годографа

$$\sigma^2 - \omega^2 + a_1\sigma + a_2 = 0. \quad (13)$$

УКГ (12) можно представить в виде двух уравнений, первое из которых представляет собой уравнение Бендрикова – Теодорчика, т. е. УКГ в комплексной плоскости:

$$\sigma = -a_1/2, \quad (14)$$

а второе является УКГ на действительной оси:

$$\omega = 0.$$

Используя УП (13), получим следующее выражение для определения параметра  $a_2$ :

$$a_2 = -\sigma^2 + \omega^2 - a_1\sigma = \sigma^2 + \omega^2. \quad (15)$$

Установим значение параметра  $a_1$  таким образом, чтобы корневой годограф (14) располагался внутри области качества  $Q$  ближе к левой границе  $\beta_1$  этой области. Определим значение  $a_1 = 155 = \text{const}$ , поскольку, исходя из установленных особенностей конфигурации, динамических, асимптотических свойств семейств годографов систем второго порядка [3], при любых значениях  $a_1$ , изменяющихся в пределах  $9 < a_1 < 155$ , семейство комплексных ветвей годографов полинома второй степени будет располагаться в пределах области  $Q$ , ограниченной параллельными линиями  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Уравнение корневого годографа будет иметь следующий вид:

$$\sigma = -77,5.$$

Комплексные ветви данного корневого годографа совпадают с границей  $b_1$ , для которой координата  $\sigma_{b_1}$  пересечения с осью  $\sigma$  определяется выражением

$$\sigma_{b_1} = -a_1/2 = -77,5.$$

Интервал изменения параметра  $a_2$  определим между точками  $t_1(-77,5;0)$  и  $t_2(-77,5;40)$  как

$$[\underline{a}_2, \bar{a}_2] = [a_2(t_1), a_2(t_2)]$$

и, используя (15), вычислим значения  $a_2$  в точках  $t_1$  и  $t_2$ :

$$a_2(t_1) = \underline{a}_2 = (-77,5)^2 + 0 = 6006,25; \quad a_2(t_2) = \bar{a}_2 = (-77,5)^2 + 40^2 = 7606,25.$$

Вычисленный на основании (10.b) интервал изменения параметра  $a_2$  годографа имеет следующий вид:  $[\underline{a}_2, \bar{a}_2] = [6006,25, 7606,25]$ .

С целью вычисления значений границ интервалов параметра  $a_3$  используем соответственно уравнение (10.c) расширенного полинома (10). Осуществив преобразования, аналогич-

ные выполненным при вычислении допустимых границ вариации параметра  $a_2$ , запишем УКГ и УП для уравнения (10.c):

$$3\sigma^2 \omega - \omega^3 + 2a_1\sigma\omega + a_2\omega = v(\sigma, \omega) = 0; \quad (16)$$

$$\sigma^3 - 3\sigma\omega^2 + a_1\sigma^2 - a_1\omega^2 + a_2\sigma = u(\sigma, \omega) = -a_3. \quad (17)$$

На основе (16) и (17) запишем в комплексной плоскости УКГ

$$3\sigma^2 - \omega^2 + 2a_1\sigma + a_2 = 0 \quad (18)$$

и УП

$$a_3 = -\sigma^3 + 3\sigma\omega^2 - a_1\sigma^2 + a_1\omega^2 - a_2\sigma. \quad (19)$$

Границу области качества  $Q_2$  (линию  $b_2$ ) для семейства полиномов третьей степени определим уравнением

$$\sigma_{b_2} = -25. \quad (20)$$

Искомые границы интервалов  $a_3$  вычисляются на основании УКГ (18) и УП (19) после подстановки в них соответствующих значений координат  $\sigma$  и  $\omega$  точек пересечения ветвями годографов границы  $b_2$ . Поскольку функция параметра  $a_3(\omega)$  (19) является непрерывной дифференцируемой функцией, то на границе  $b_2$  в общем случае будет иметь место чередование участков возрастания и убывания этой функции. Следовательно, для вычисления границ интервала  $a_3$  вначале определим минимальное и максимальное значения координат  $\omega$  в области пересечения семейством годографов (10.c) границы  $b_2$ , т. е. координат  $\omega_{\min}$  и  $\omega_{\max}$  соответственно по формулам

$$\omega_{\min} = \pm \sqrt{3\sigma^2 + 2a_1\sigma + a_2}; \quad (21)$$

$$\omega_{\max} = \pm \sqrt{3\sigma^2 + 2a_1\sigma + a_2}. \quad (22)$$

На основе полученных значений  $\omega_{\min}$  и  $\omega_{\max}$  вычислим значения  $a_{3\min}$  и  $a_{3\max}$  параметра  $a_3$  соответственно в точках (21) и (22) на границе  $b_2$ :

$$a_{3\min} = -\sigma^3 + 3\sigma\omega_{\min}^2 - a_1\sigma^2 + a_1\omega_{\min}^2 - a_2\sigma; \quad (23)$$

$$a_{3\max} = -\sigma^3 + 3\sigma\omega_{\max}^2 - a_1\sigma^2 + a_1\omega_{\max}^2 - a_2\sigma, \quad (24)$$

тогда  $a_{3\min} = 75406,1$ ;  $a_{3\max} = 247351,1$ .

Исходя из рассмотренных в [3] особенностей динамики корневых портретов систем третьего порядка установлено, что ветви годографов подобных портретов мигрируют в правую полуплоскость только в двух точках: через границу  $b_2$  и точку  $t_3$  (см. рис. 2) ее пересечения с действительной осью  $\sigma$ . Значения  $a_3$  в верхней и нижней точках границы области миграции корней портрета через границу  $b_2$  определены выражениями (23) и (24). Очевидно, что в данном случае верхняя граница интервала параметра  $a_3$  определяется выражением  $\bar{a}_3 = \min(a_{3\min}, a_{3\max}) = 75406,1$ .

Аналогичным образом, используя формулы (23) и (24), вычисляются минимальное и максимальное значения  $a_3$ ,  $a'_{3\min}$  и  $a'_{3\max}$  при миграции корней портрета через точку  $t_4$  (см. рис. 2). Очевидно, что на основе этих значений определяется нижняя граница интервала параметра  $a_3$ ,  $\underline{a}_3 = \max(a'_{3\min}, a'_{3\max}) = 68960,6$ . Тогда вычисленный на основании (10.c) интервал изменения параметра  $a_3$  годографа имеет следующий вид:  $a_3 \in [\underline{a}_3, \bar{a}_3] = [68960,6, 75406,1]$ .

Исследование миграции корней через границу  $\beta_2$  показало, что предельные значения параметра в точках пересечения ветвей портрета с этой границей в данном случае на предельные значения интервалов вариации параметра  $a_3$  не влияют.

С целью определения интервала вариации  $a_4$  рассмотрим полином (10.d) четвертой степени расширения (10). Подставив в (10.d) значение комплексного переменного  $s = \sigma + i\omega$  и сделав соответствующие преобразования аналогично выполненным выше для  $n = 2$  и  $n = 3$ , запишем соответственно УКГ и УП годографа полинома (10.d):

$$4\sigma^3\omega - 4\sigma\omega^3 + 3a_1\sigma^2\omega - a_1\omega^3 + 2a_2\sigma\omega + a_3\omega = v(\sigma, \omega) = 0; \quad (25)$$

$$\sigma^4 - 6\sigma^2\omega^2 + \omega^4 + a_1\sigma^3 - 3a_1\sigma\omega^2 + a_2\sigma^2 - a_2\omega^2 + a_3\sigma = u(\sigma, \omega) = -a_4. \quad (26)$$

На основе (25) и (26) запишем в комплексной плоскости УКГ

$$4\sigma^3 - 4\sigma\omega^2 + 3a_1\sigma^2 - a_1\omega^2 + 2a_2\sigma + a_3 = 0 \quad (27)$$

и УП

$$a_4 = -\sigma^4 + 6\sigma^2\omega^2 - \omega^4 - a_1\sigma^3 + 3a_1\sigma\omega^2 - a_2\sigma^2 + a_2\omega^2 - a_3\sigma. \quad (28)$$

Граница области качества  $Q$  (линия  $\beta_1$  на рис. 2) для семейства полиномов четвертой степени определена выражением (11). Искомые границы интервалов  $a_4$  вычисляются на основании УКГ (27) и УП (28) после подстановки в них соответствующих значений координат  $\sigma$  и  $\omega$  точек пересечения ветвями годографов границы  $\beta_1$ . Поскольку функция параметра  $a_4(\omega)$  (28) является непрерывной дифференцируемой функцией, то на границе  $\beta_1$  в общем случае будет иметь место чередование участков возрастания и убывания этой функции. Следовательно, для вычисления границ интервала  $a_4$  вначале определим минимальное и максимальное значения координат  $\omega$  в области пересечения семейством годографов (10.c) границы  $b_2$ , т. е. координат  $\omega_{\min}$  и  $\omega_{\max}$  соответственно по формулам

$$\omega_{\min} = \pm \sqrt{\frac{4\sigma^3 + 3a_1\sigma^2 + 2a_2\sigma + a_3}{4\sigma + a_1}}; \quad (29)$$

$$\omega_{\max} = \pm \sqrt{\frac{4\sigma^3 + 3a_1\sigma^2 + 2a_2\sigma + a_3}{4\sigma + a_1}}. \quad (30)$$

На основе полученных значений  $\omega_{\min}$  и  $\omega_{\max}$  вычисляются значения  $a_{4\min}$  и  $a_{4\max}$  параметра  $a_4$  соответственно в точках  $t_5$  (29) и  $t_6$  (30) на границе  $\beta_1$  (рис. 3):

$$a_{4\min} = -\sigma^4 + 6\sigma^2\omega_{\min}^2 - \omega_{\min}^4 - a_1\sigma^3 + 3a_1\sigma\omega_{\min}^2 - \bar{a}_2\sigma^2 + \bar{a}_2\omega_{\min}^2 - \bar{a}_3\sigma; \quad (31)$$

$$a_{4\max} = -\sigma^4 + 6\sigma^2\omega_{\max}^2 - \omega_{\max}^4 - a_1\sigma^3 + 3a_1\sigma\omega_{\max}^2 - \underline{a}_2\sigma^2 + \underline{a}_2\omega_{\max}^2 - \underline{a}_3\sigma. \quad (32)$$

Тогда  $a_{4\min} = 558052,975$ ;  $a_{4\max} = 1077992,615$ .

Корневой портрет, иллюстрирующий полученные результаты, показан на рис. 3. Он представлен полем корневых траекторий в виде линий уровня двух годографов. Ограничивающие поле линии пересекают границу  $\beta_1$  в точках  $t_5$  и  $t_6$ . На рис. 3 положительные ветви и асимптоты годографов отмечены знаком «+», отрицательные – знаком «-». Ветви первого годографа, одна из ветвей которого пересекает границу  $\beta_1$  в точке  $t_5$ , обозначены цифрой 1; ветви второго годографа, одна из ветвей которого пересекает границу  $\beta_1$  в точке  $t_6$ , обозначены цифрой 2. Область пересечений корневого портрета с границей  $\beta_1$  представляет собой отрезок  $t_5t_6$  на этой границе (показан утолщенной линией на рис. 3).

На основании рассмотренных в [3] особенностей динамики корневых портретов систем четвертого порядка установлено, что ветви годографов подобных портретов мигрируют в правую полуплоскость только в двух точках: через границу  $\beta_1$  (точки  $t_5$  и  $t_6$ ) и точку  $t_7$  ее пересечения с действительной осью  $\sigma$  (см. рис. 3). Значения  $a_4$  в верхней и нижней точках границы области миграции корней портрета через границу  $\beta_1$  находятся из выражений (31) и (32). Очевидно, что в данном случае из выражений (31) и (32) определяется верхняя граница интервала параметра  $a_4$ :  $\bar{a}_3 = \min(a_{4\min}, a_{4\max}) = 558053,0$ .

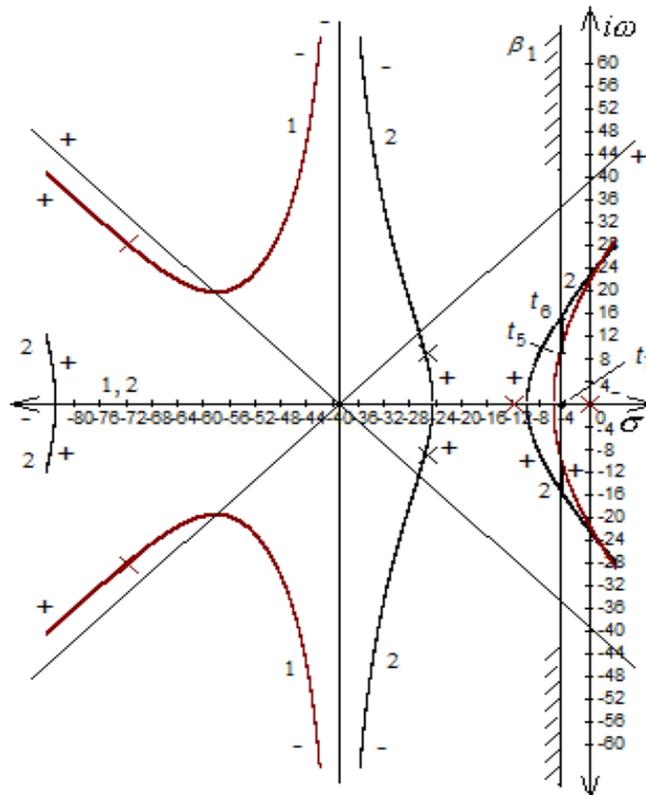


Рис. 3. Определение коэффициента  $a_4$

Минимальное и максимальное значения  $a_4$ ,  $a'_{4\min}$  и  $a'_{4\max}$  при миграции корней портрета через точку  $t_7$  (см. рис. 3) вычисляются аналогично с помощью формул (31) и (32). Очевидно, что на основе этих значений определяется нижняя граница интервала изменения параметра  $a_4$  по формуле  $\underline{a}_4 = \max(a'_{4\min}, a'_{4\max}) = 231416,2$ . Тогда вычисленный на основании (10.d) интервал изменения параметра  $a_4$  годографа имеет следующий вид:  $a_4 \in [a_4, \bar{a}_4] = [231416,2, 558053,0]$ .

Исследование миграции корней через границу  $\beta_2$  показало, что предельные значения параметра  $a_4$  в точках пересечения ветвей портрета с этой границей в данном случае не влияют на предельные значения интервалов вариации параметра  $a_4$ .

На рис. 3 показано доминирующее поле корневых траекторий для портрета системы четвертого порядка, используемое для определения параметра  $a_4$ . Поле представлено своими граничными годографами (линиями уровня поля). Очевидно, что миграция ветвей в комплексной плоскости в данном случае происходит в области пересечения границы  $\beta_1$  годографами поля, расположенной между точками  $t_5$  и  $t_6$ , а миграция действительных ветвей – через точку  $t_7$ , расположенную на оси  $\sigma$ , т. е. точку пересечения данной оси с границей области качества  $Q$ .

### Заключение

Выполнено моделирование динамической системы четвертого порядка с учетом параметрической неопределенности интервального характера в применении к системе автоматического управления электропривода на основе математических моделей в форме корневого портрета и расширенного корневого годографа системы. На основе установленных закономерностей динамики корневых портретов систем четвертого порядка и результатов моделирования определена последовательность (алгоритм) расчета граничных значений интервалов параметров подобных систем, обеспечивающих размещение семейства корней в заданной области плоскости собственных частот, а именно робастную устойчивость и робастное качество систем. Проведенное исследование также демонстрирует характер изменения динамики системы в ответ на параметрические вариации.

### Список литературы

1. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2004. – 632 с.
2. Кузовков, Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства / Н.Т. Кузовков. – М. : Машиностроение, 1976. – 125 с.
3. Несенчук, А.А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А.А. Несенчук. – Минск : ОИПИ НАН Беларуси, 2005. – 234 с.
4. Несенчук, А.А. Корневой метод синтеза устойчивых полиномов путем настройки всех коэффициентов / А.А. Несенчук // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 8. – С. 13–24.
5. Barmish, B.R. The robust root locus / B.R. Barmish, R. Tempo // Automatica. – 1993. – Vol. 26. – P. 183–192.
6. Поляк, Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М. : Наука, 2002. – 303 с.
7. Опейко, О.Ф. Синтез регулятора тока системы векторного управления электродвигателем / О.Ф. Опейко // Вісник КДУ ім. Михайла Остроградського. – 2014. – Вип. 1. – С. 9–14.

Поступила 19.05.2016

*Объединенный институт проблем  
информатики НАН Беларуси,  
Минск, Сурганова, 6  
e-mail: anes@newman.bas-net.by*

**A.A. Nesenчук**

### **SIMULATION OF THE ELECTRIC DRIVE DYNAMICS ON THE BASIS OF ROOT LOCUS MODEL**

The paper represents the task of simulation of the control system dynamics in the rotor flux oriented vector control system of the induction motor with application of the mathematical model in the form of the extended root locus. An algorithm for control system parameters calculation has been proposed, ensuring stability and required quality when operating in conditions of the plant parametric uncertainty.