

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ, ИЗОБРАЖЕНИЙ И РЕЧИ

УДК 621.372.5

О.Ч. Ролич, В.С. Садов, К.М. Шестаков, А.Ф. Чернявский

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЁННОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Приводится алгоритм прямого дискретного преобразования Фурье с использованием целочисленной арифметики. Преобразование Фурье основывается на последовательности дискретных косинусных преобразований и аппроксимации отсчётов базисной гармонической функции знакопеременной конечной степенной суммой по основанию 2. Алгоритм построен таким образом, что погрешность преобразования определяется только погрешностью аппроксимации базисной функции. Обосновывается факт точного восстановления первоначальной выборки при приближённом прямом преобразовании.

Введение

Преобразование Фурье является одним из основных преобразований, применяемых в цифровой обработке сигналов. Оцифрованные сигналы в современных микропроцессорных системах представлены дискретной последовательностью целочисленных отсчётов, поэтому их обработку с применением преобразования Фурье целесообразно производить также на множестве целых чисел, минуя вещественное представление промежуточных операндов.

Известные методы точного вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ) предполагают оперирование вещественными числами [1, 2]. Это усложняет их реализацию на базе системы команд целочисленных микропроцессоров.

Приближённое арифметическое преобразование Фурье, оперирующее вместо гармонического базиса функцией Мёбиуса, требует деления общего количества N отсчётов выборки на рациональные числа с последующим округлением результата [3, 4]. Это вносит дополнительную погрешность.

Общим недостатком двух вышеперечисленных классов является необходимость применения операций возведения в квадрат и извлечения квадратного корня для построения амплитудно-частотной характеристики.

1. Теоретическое обоснование предлагаемого алгоритма

В статье [5] подробно описан процесс приближённого дискретного косинусного преобразования (ДКП) на базе целочисленной арифметики. ДКП основывается на аппроксимации базисной функции знакопеременной конечной степенной суммой по основанию 2, что позволяет заменить операции умножения и деления операциями сдвигов двоичных представлений целочисленных операндов.

Классическое ДПФ подразумевает суперпозицию входной сигнальной выборки как с функцией косинуса, так и с функцией синуса, имеющей по отношению к косинусу фазовый сдвиг, зависящий от длины выборки и номера гармоники. Функцию синуса можно отдельно аппроксимировать так же, как предлагается в [5], но при этом объём данных во флэш-памяти увеличивается вдвое. Использование результатов аппроксимации функции косинуса для синуса предполагает вычисление фазового сдвига. При оперировании целыми числами значение фазового сдвига округляется, что приводит к дополнительной погрешности. Кроме того, последующее вычисление амплитудно-частотной характеристики требует применения таких относительно сложных операций, как возведение в квадрат и извлечение квадратного корня. Поэтому прямое ДПФ удобно представить в виде последовательности ДКП с фазовым сдвигом, равным одному отсчёту на каждом шаге:

$$\begin{cases} c_{0,i} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n; \\ c_{k,i} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\text{mod}(n+i, N)} \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos\left(\frac{2\pi}{N} k(n-i)\right); \\ c_{\frac{N}{2},i} = \frac{(-1)^i}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n f_n, \end{cases} \quad (1)$$

где $N = 2^q$ – длина сигнальной выборки, $q \in \mathbf{N}$; f_n – отсчёты оцифрованного сигнала, n – номер отсчёта $n = 0 \dots (N - 1)$; $c_{k,i}$ – амплитуда k -й гармоники для циклически сдвинутого цифрового сигнала на i отсчётов влево, $i = 0 \dots (N - 1)$; k – частотный индекс, $k = 1 \dots (\frac{N}{2} - 1)$; $\text{mod}(x, y)$ – целочисленная операция вычисления остатка от деления x на y .

При введённых в (1) обозначениях обратное ДПФ представляется в виде следующей суммы:

$$F_i = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} c_{k,i}. \quad (2)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} F_i &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} c_{k,i} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left(\frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos\left(\frac{2\pi}{N} k(n-i)\right) \right) + \frac{(-1)^i}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n f_n = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N} k(n-i)\right) + (-1)^{n+i} \right). \end{aligned}$$

В конечном выражении сумма $\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N} k(n-i)\right)$ представляет собой сумму $(\frac{N}{2} - 1)$ членов геометрической прогрессии со знаменателем $\cos\left(\frac{2\pi}{N} (n-i)\right)$, принимающим значения на отрезке от -1 до 1 . Опуская промежуточные вычисления, запишем

$$\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N} k(n-i)\right) = -\frac{1 + (-1)^{n-i}}{2} \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N} (n-i)\right)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N} (n-i)\right)} = \begin{cases} \frac{N}{2} - 1, n = i; \\ -\frac{1 + (-1)^{n-i}}{2}, n \neq i. \end{cases}$$

Тогда

$$F_i = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N} k(n-i)\right) + (-1)^{n+i} \right) = \begin{cases} f_i, n = i; \\ 0, n \neq i. \end{cases}$$

Таким образом, из (1) следует, что прямое преобразование Фурье базируется на выполнении $(\frac{N}{2} - 1)$ дискретных косинусных преобразований.

Переходя к множеству целых чисел, введём следующие обозначения:

$$c_{0,i} = [c_{0,i}] + \{c_{0,i}\} = [c_{0,i}] + \frac{C_{0,i}}{N},$$

где $[c_{0,i}]$ – целая часть, сформировавшаяся при делении суммы $\sum_{n=0}^{N-1} f_n$ на N ; $\{c_{0,i}\}$ – дробная часть; $C_{0,i} = N \cdot \{c_{0,i}\}$ – целое число. Аналогично

$$c_{\frac{N}{2},i} = \left[c_{\frac{N}{2},i} \right] + \left\{ c_{\frac{N}{2},i} \right\} = \left[c_{\frac{N}{2},i} \right] + \frac{C_{\frac{N}{2},i}}{N}.$$

Согласно [5] целочисленное ДКП основывается на аппроксимации гармонического базиса $b_{kn} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)$ знакопеременной конечной степенной суммой по основанию 2. Поэтому можно записать, что точное значение $b_{k,n}$ складывается из его приближённого значения $\tilde{b}_{k,n}$ и некоторой погрешности аппроксимации $\varepsilon_{k,n}$: $b_{k,n} = \tilde{b}_{k,n} + \varepsilon_{k,n}$. Тогда

$$\begin{aligned} c_{k,i} &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\text{mod}(n+i, N)} (\tilde{b}_{k,n} + \varepsilon_{k,n}) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\text{mod}(n+i, N)} \cdot \tilde{b}_{k,n} + \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\text{mod}(n+i, N)} \cdot \varepsilon_{k,n} = \\ &= [\tilde{c}_{k,i}] + \frac{\tilde{C}_{k,i}}{N} + \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\text{mod}(n+i, N)} \cdot \varepsilon_{k,n}. \end{aligned}$$

С учётом введённых обозначений обратное ДПФ (2) переписывается в виде

$$\begin{aligned} F_i &= [c_{0,i}] + \frac{C_{0,i}}{N} + \left[c_{\frac{N}{2},i} \right] + \frac{C_{\frac{N}{2},i}}{N} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left([\tilde{c}_{k,i}] + \frac{\tilde{C}_{k,i}}{N} + \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\text{mod}(n+i, N)} \cdot \varepsilon_{k,n} \right) = \\ &= \left([c_{0,i}] + \left[c_{\frac{N}{2},i} \right] + \sum_{k=1}^{N/2-1} [\tilde{c}_{k,i}] \right) + \frac{1}{N} \left(C_{0,i} + C_{\frac{N}{2},i} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \tilde{C}_{k,i} \right) + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N/2-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\text{mod}(n+i, N)} \cdot \varepsilon_{k,n} = \\ &= \left([c_{0,i}] + \left[c_{\frac{N}{2},i} \right] + \sum_{k=1}^{N/2-1} [\tilde{c}_{k,i}] \right) + \frac{1}{N} \left(C_{0,i} + C_{\frac{N}{2},i} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \tilde{C}_{k,i} \right) + \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\text{mod}(n+i, N)} \sum_{k=1}^{N/2-1} \varepsilon_{k,n} = \\ &= \left([c_{0,i}] + \left[c_{\frac{N}{2},i} \right] + \sum_{k=1}^{N/2-1} [\tilde{c}_{k,i}] \right) + D_i + \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\text{mod}(n+i, N)} \sum_{k=1}^{N/2-1} \varepsilon_{k,n}, \\ D_i &= \frac{1}{N} \left(C_{0,i} + C_{\frac{N}{2},i} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \tilde{C}_{k,i} \right). \end{aligned} \tag{3}$$

Из выражения (3) следует, что погрешность обратного целочисленного ДПФ складывается из погрешности арифметических действий, связанных, в частности, с делением на N , и не-

точностью $\varepsilon_{k,n}$ аппроксимации базисных гармоник. Первый тип погрешностей является устранимым, а второй – неустранимым.

Исходя из свойств симметричности и периодичности базисной функции, можно записать следующее:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) &= -\cos\left((2v+1)\frac{\pi}{u}u - \frac{2\pi}{N} kn\right) = -\cos\left((2v+1)\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2u}u - \frac{2\pi}{N} kn\right) = \\ &= -\cos\left(\frac{2\pi}{N} \left((2v+1) \cdot \frac{N}{2u}u - kn\right)\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{N} k_1 n\right), \end{aligned}$$

где $v = 0, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right)$, а $k_1 = \left((2v+1) \cdot \frac{N}{2u}u - k\right)$.

Для заданного n существует такая пара (u, v) , что $n = (2v+1)u$, а $u = 2^w$, $w = 0, \dots, (\log_2 N - 1)$, $w \in \mathbf{N}$. При этом для любого допустимого значения $k = 0, \dots, \frac{N}{4u}$ найдётся такое $k_1 = \left(\frac{N}{2u} - k\right)$, что

$\cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{N} k_1 n\right)$ и $\varepsilon_{k,n} + \varepsilon_{k_1,n} = 0$. В случае $k = 0, \dots, \frac{N}{2}$ $k_1 = \frac{N}{2u} - k + \left[\frac{k}{N/2u}\right] \cdot \frac{N}{u}$, где

$\left[\frac{x}{y}\right]$ – целочисленная операция получения целой части от деления x на y .

Тогда в выражении (3) $\sum_{k=1}^{N/2-1} \varepsilon_{k,n} = 0$ и

$$F_i = \left([c_{0,i}] + \left[c_{\frac{N}{2},i} \right] + \sum_{k=1}^{N/2-1} [\tilde{c}_{k,i}] \right) + D_i, \quad (4)$$

т. е. для точного восстановления оригинала f_n по его приближённому Фурье-образу $\tilde{c}_{k,i}$ необходимо вычисление дополнительных (компенсационных) слагаемых D_i .

Алгоритмическая погрешность в вычислении D_i , а также $\tilde{c}_{k,i}$ может быть вызвана манипулированием на промежуточных этапах вычислений операндами, разрядность которых не превосходит разрядности d входных отсчётов сигнальной выборки. Тогда в операциях сдвигов возможна потеря точности. С целью её устранения найдём наилучшую разрядность промежуточных операндов. Для этого исходя из формулы (4), а также формул (2) и (3), приведенных в статье [5], запишем

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{1}{N} \left(N \cdot c_{0,i} + N \cdot c_{\frac{N}{2},i} + N \sum_{k=1}^{N/2-1} \tilde{c}_{k,i} \right) = \frac{1}{N} \left(N \cdot c_{0,i} + N \cdot c_{\frac{N}{2},i} + 2 \sum_{k=1}^{N/2-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\text{mod}(n+i, N)} \cdot \tilde{b}_{k,n} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \left(N c_{0,i} + N c_{\frac{N}{2},i} + 2 \sum_{k=1}^{N/2-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(f_{\text{mod}(n+i, N)} \cdot r_{k,n} + \sum_{j=1}^l (-1)^{S_{k,j,n}} a_{k,j,n} \left(f_{\text{mod}(n+i, N)} \cdot 2^{-p_{k,j,n}} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Введя переменную $tp = \max(\max\{-\log_2 r_{k,n}\}, \max\{p_{k,j,n}\})$, последнее выражение можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
F_i = & \frac{1}{N} \left(Nc_{0,i} + Nc_{\frac{N}{2},i} + \frac{2}{2^{mp}} \sum_{k=1}^{N/2-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(f_{\text{mod}(n+i, N)} \cdot 2^{mp} r_{k,n} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=1}^l (-1)^{s_{k,j,n}} a_{k,j,n} \left(f_{\text{mod}(n+i, N)} \cdot 2^{mp-p_{k,j,n}} \right) \right) \right) = \frac{1}{N \cdot 2^{mp}} \left(2^{mp} Nc_{0,i} + 2^{mp} Nc_{\frac{N}{2},i} + \right. \\
& \left. + 2 \sum_{k=1}^{N/2-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(f_{\text{mod}(n+i, N)} \cdot 2^{mp} r_{k,n} + \sum_{j=1}^l (-1)^{s_{k,j,n}} a_{k,j,n} \left(f_{\text{mod}(n+i, N)} \cdot 2^{mp-p_{k,j,n}} \right) \right) \right). \quad (5)
\end{aligned}$$

Учитывая, что $N = 2^q$ и разрядность сигнальных отсчётов равна d , промежуточные вычисления в прямом преобразовании Фурье необходимо проводить с $(d+q+mp)$ -разрядными операндами. Значение mp может быть определено на стадии генерации информационных данных [5].

На рис. 1 показана блок-схема алгоритма прямого преобразования Фурье с учётом рассуждений, отражённых в формуле (5).

В качестве входных данных применяются сигнальная выборка f_n из $N = 32$ отсчётов и ранее сгенерированный двумерный массив `info` размером $\left(\frac{N}{2} \times N\right)$ байтов:

```

BYTE info[N/2][N] =
{
  {50,D6,D4,D3,42,44,C3,32,30,22,23,A4,12,13,14,16,10,16,14,13,12,A4,23,22,30,32,C3,44,42,D3,D4,D6},
  {50,D4,42,C3,30,23,12,14,10,14,12,23,30,C3,42,D4,50,D4,42,C3,30,23,12,14,10,14,12,23,30,C3,42,D4},
  {50,D3,C3,22,12,16,14,A4,30,44,D4,D6,42,32,23,13,10,13,23,32,42,D6,D4,44,30,A4,14,16,12,22,C3,D3},
  {50,42,30,12,10,12,30,42,50,42,30,12,10,12,30,42,50,42,30,12,10,12,30,42,50,42,30,12,10,12,30,42},
  {50,42,23,16,12,32,D4,D3,30,13,14,22,42,D6,C3,A4,10,A4,C3,D6,42,22,14,13,30,D3,D4,32,12,16,23,44},
  {50,C3,12,14,30,D4,42,23,10,23,42,D4,30,14,12,C3,50,C3,12,14,30,D4,42,23,10,23,42,D4,30,14,12,C3},
  {50,32,14,A4,42,D3,23,16,30,D6,C3,13,12,44,D4,22,10,22,D4,44,12,13,C3,D6,30,16,23,D3,42,A4,14,32},
  {50,30,10,30,50,30,10,30,50,30,10,30,50,30,10,30,50,30,10,30,50,30,10,30,50,30,10,30,50,30,10,30},
  {50,22,14,44,42,13,23,D6,30,16,C3,D3,12,A4,D4,32,10,32,D4,A4,12,D3,C3,16,30,D6,23,13,42,44,14,22},
  {50,23,12,D4,30,14,42,C3,10,C3,42,14,30,D4,12,23,50,23,12,D4,30,14,42,C3,10,C3,42,14,30,D4,12,23},
  {50,A4,23,D6,12,22,D4,13,30,D3,14,32,42,16,C3,44,10,44,C3,16,42,32,14,D3,30,13,D4,22,12,D6,23,A4},
  {50,12,30,42,10,42,30,12,50,12,30,42,10,42,30,12,50,12,30,42,10,42,30,12,50,12,30,42,10,42,30,12},
  {50,13,C3,32,12,D6,14,44,30,A4,D4,16,42,22,23,D3,10,D3,23,22,42,16,D4,A4,30,44,14,D6,12,32,C3,13},
  {50,14,42,23,30,C3,12,D4,10,D4,12,C3,30,23,42,14,50,14,42,23,30,C3,12,D4,10,D4,12,C3,30,23,42,14},
  {50,16,D4,13,42,A4,C3,22,30,32,23,44,12,D3,14,D6,10,D6,14,D3,12,44,23,32,30,22,C3,A4,42,13,D4,16},
  {50,10,50,10,50,10,50,10,50,10,50,10,50,10,50,10,50,10,50,10,50,10,50,10,50,10,50,10,50,10,50,10,50,10}
};

```

Элементы массива `info` основных параметров представлены в шестнадцатеричном виде для $\varepsilon = 0,055$ и $d = 12$. При этом $mp = 6$, а совокупность основных параметров для отдельного отсчёта укладывается в один байт. Старший бит этого байта является знаковым, следующие три бита означают номер n_{it} реперного уровня $r_{k,n}$, а младшая тетрада – степень двойки $p_{k,j,n}$. Если младшая тетрада равна нулю, то истинное значение отсчёта гармонической функции совпадает с реперным.

Произведение $ft = f_{\text{mod}(n+i, N)} \cdot 2^{mp} r_{k,n}$ формулы (5) формируется в блоках 18–26 алгоритма. При этом значению $n_{it} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ сопоставляется $r_{k,n} \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. Так, шестнадцатеричному числу $D3_{16} = 11010011_2$ массива `info` соответствует действительное число $1 - 1/2^3 = 0,875$, ибо в данном случае $n_{it} = 5$, степень двойки $p = 3$, знак s отрицательный. В блоках 28–30 алгоритма к полученному ft добавляется величина $(-1)^{s_{k,j,n}} \left(f_{\text{mod}(n+i, N)} 2^{mp-p_{k,j,n}} \right)$, $l = 1$. Результат прибавляется к $\tilde{c}_{k,i}$, представляющему собой дискретный элемент приближённого Фурье-образа цифрового сигнала f_n .

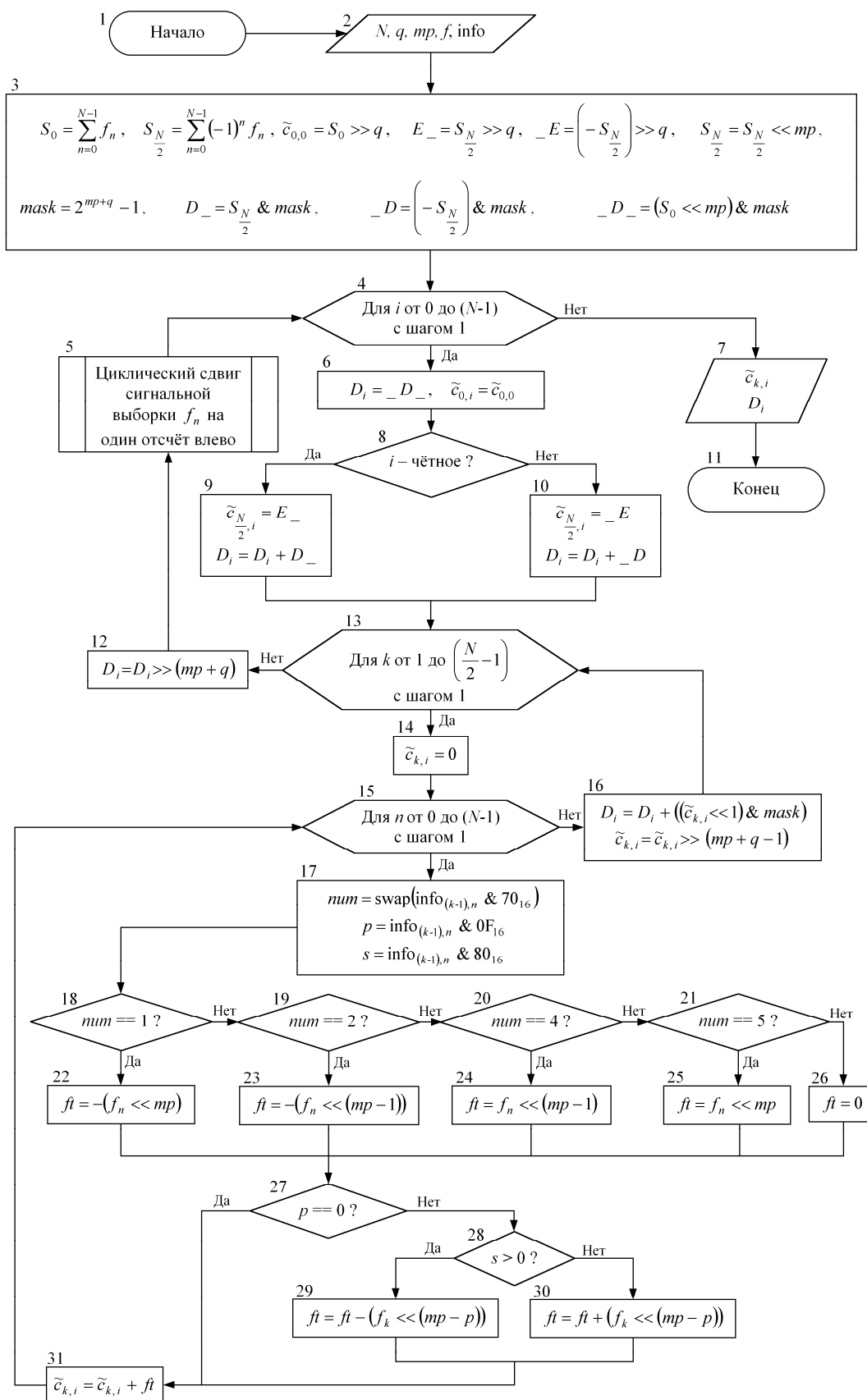


Рис. 1. Алгоритм целочисленного прямого ДПФ

Маска $mask = 2^{mp+q} - 1$ необходима для выделения $(mp+q)$ младших значащих битов, формирующих точные значения D_i компенсационных слагаемых.

Алгоритм построен с применением операций сравнений, побитовых инверсий, сложений, сдвигов (\gg – вправо, \ll – влево), логических побитовых умножений $\&$ и взаимных перестановок тетрад байта (swar). Все перечисленные операции входят в систему команд современных целочисленных микроконтроллеров, что позволяет реализовать предложенный алгоритм на микропрограммном уровне с относительно невысокой вычислительной сложностью.

2. Тестирование предлагаемого алгоритма

Тестирование алгоритма на цифровом сигнале

$$f_n = \left[2^{d-3} \left(4 + \cos\left(\frac{2\pi n - 5}{N}\right) + \cos\left(\frac{6\pi n - 13}{N}\right) + \cos\left(\frac{16\pi n - 21}{N}\right) + \cos\left(\frac{22\pi n - 24}{N}\right) \right) \right],$$

который представляет собой суперпозицию первой, третьей, восьмой и одиннадцатой гармоник с одинаковыми амплитудами, равными 512, но различными начальными фазами, приводит к результатам, показанным на рис. 2 – 4. Следует отметить, что среди выбранных составляющих только восьмая гармоника является делителем числа N .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2047	2047	2047	2047	2047	2047	2047	2047	2047	2047
1	506	515	509	468	426	366	275	188	88	-29
2	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
3	470	507	375	98	-199	-431	-534	-441	-204	89
4	-1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
5	-5	-4	0	0	4	8	6	7	4	-4
6	-1	0	0	0	-1	-1	0	0	0	-1
7	1	6	15	3	11	18	3	9	8	-10
8	405	312	-406	-313	405	312	-406	-313	405	312
9	-10	-13	-14	-5	-4	-2	5	2	-1	2
10	0	-1	-1	0	0	-1	0	0	-1	0
11	386	87	-476	441	-30	-441	475	-133	-364	519
12	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	-1	0
13	2	-5	-17	5	-4	-12	10	-3	-9	11
14	-1	0	-1	0	-1	0	0	-1	0	-1
15	-3	0	4	-5	-3	-1	-9	-3	1	-5

а)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2047.91	2047.91	2047.91	2047.91	2047.91	2047.91	2047.91	2047.91	2047.91
1	505.82	511.64	497.8	464.84	414	347.26	267.17	176.82	79.67
2	0.06	0.03	-0.02	-0.05	-0.08	-0.1	-0.1	-0.09	-0.06
3	470.25	503.43	366.92	106.74	-189.42	-421.74	-511.9	-429.52	-202.37
4	-0.11	0	0.11	0.15	0.11	0	-0.11	-0.15	-0.11
5	-0.06	0.07	0.13	0.08	-0.04	-0.13	-0.1	0.02	0.12
6	-0.05	0.05	0.09	0.01	-0.08	-0.07	0.02	0.09	0.05
7	0.01	0.05	0.01	-0.05	-0.03	0.03	0.04	-0.02	-0.05
8	405.75	312.31	-405.75	-312.31	405.75	312.31	-405.75	-312.31	405.75
9	-0.1	0.12	0.06	-0.14	0	0.14	-0.06	-0.12	0.1
10	0.14	-0.02	-0.12	0.11	0.04	-0.14	0.07	0.09	-0.14
11	374.63	82.13	-465.89	435.54	-18.05	-415.48	479.71	-117.54	-349.1
12	-0.02	0	0.02	-0.03	0.02	0	-0.02	0.03	-0.02
13	-0.05	0.07	-0.06	0.04	0	-0.04	0.06	-0.07	0.05
14	-0.15	0.19	-0.2	0.18	-0.13	0.06	0.01	-0.09	0.15
15	0	-0.01	0.03	-0.04	0.05	-0.06	0.07	-0.07	0.07

б)

Рис. 2. Результаты прямого ДПФ: а) приближённого; б) точного

Восстановленный по формуле (2) сигнал полностью совпадает с его оригиналом (рис. 3), и для осуществления различного рода фильтров с помощью целочисленных микроконтроллеров необходимо учитывать компенсационные слагаемые.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3804	3458	2041	2743	2660	1870	1877	1365	1982	2938	1667	1752	3140	1975	1033	1475

а)

3794	3451	2033	2737	2649	1861	1868	1357	1970	2929	1659	1743	3132	1970	1021	1466
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

б)

3804	3458	2041	2743	2660	1870	1877	1365	1982	2938	1667	1752	3140	1975	1033	1475
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

в)

Рис. 3. Цифровой тестовый сигнал: а) исходный вид; б) результат его восстановления по формуле (2) после приближённого прямого ДПФ без учёта компенсационных слагаемых; в) результат его восстановления по формуле (2) после приближённого прямого ДПФ с учётом компенсационных слагаемых

Вычисление ДПФ по описанному алгоритму позволяет разделить отдельные гармонические составляющие, которые входят в Фурье-образ с собственными амплитудами и начальными фазами. Поэтому амплитудно-частотную характеристику можно построить, применив формулу

$$A_k = \frac{\max_i \{c_{k,i}\} - \min_i \{c_{k,i}\}}{2}. \quad (6)$$

Исходя из построенной по формуле (6) приближённой амплитудно-частотной характеристики тестового сигнала (рис. 4), наибольшую относительную погрешность 20,7% (по сравнению с заданной амплитудой, равной 512) имеет восьмая гармоника. Это связано со сравнительно небольшой длиной выборки. В самом деле, исходя из точного вычисления Фурье-образа по формуле (1) (см. рис. 2, б), амплитуда восьмой гармоники равна 405,75. Приближённое же значение равно 406.

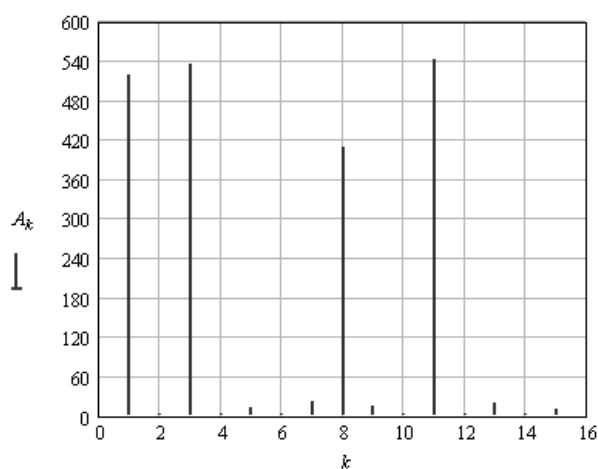


Рис. 4. Приближённая амплитудно-частотная характеристика тестового сигнала

Заключение

Описанный в статье алгоритм требует $N(N/2+1)$ d -разрядных ячеек оперативной памяти. Во многих задачах спектрального анализа нет необходимости в хранении такого объёма информации и достаточно оперировать N ячейками, характеризующими амплитудно-частотную характеристику цифрового сигнала, что предоставляет дополнительные удобства для реализации предлагаемого алгоритма на базе целочисленной арифметики.

Благодаря множеству реперных уровней в алгоритме реализована возможность однобайтовой аппроксимации отсчётов базисной функции с точностью до 0,0613 для длины выборки $N = 256, 512, 1024$ отсчётов и с точностью до 0,0549 для $N = 32, 64, 128$ отсчётов. Три бита, отведённые под элемент множества реперных уровней, позволяют хранить информацию о восьми реперах. В приведённом алгоритме их пять, и они равноудалены друг от друга. Добавление двух реперов со значениями $-1/4$ и $1/4$ снижает погрешность аппроксимации. Так, для $N = 32$ или 64 максимальная погрешность становится равной 0,0435, для $N = 128 - 0,0532$, для $N = 256$ или $512 - 0,0605$, для $N = 1024 - 0,0610$. Но добавление реперных уровней приводит также к увеличению количества операций сравнения. Поэтому для длин выборок, больших 64, имеет смысл манипулировать пятью реперами.

Список литературы

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Под ред. Ю.Н. Александрова. – М.: Мир, 1978. – 846 с.

2. Блейхут .Э. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. И.И. Грушко. – М.: Мир, 1989. – 448 с.

3. Tufts D.W., Sadasiv G. The arithmetic Fourier transform // IEEE ASSP Magazine. – 1988. – Vol. 5. – № 1. – P. 13 – 17.

4. Fourier analysis and signal processing by use of the Mobius inversion formula / I.S. Reed, D.W. Tufts, Y. Xiaoli et al. // IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. – Vol. 38. – № 3. – P. 458 – 469.

5. Приближённое целочисленное дискретное косинусное преобразование / О.Ч. Ролич, К.М. Шестаков, В.С. Садов, А.Ф. Чернявский // Вестник Белорусского университета. – Сер. 1. – 2004. – № 1. – С. 86 – 91.

Поступила 31.12.04

*Белорусский государственный университет
Минск, Курчатова, 5
e-mail: RolichO @ bsu.by,
RolichO @ mail.ru*

O.Ch. Rolich, V.S. Sadov, K.M. Shestakov, A.F. Chernyavskii

ALGORITHM OF APPROXIMATE NUMERIC DISCRETE FOURIER TRANSFORM

Algorithm of numeric direct discrete Fourier transform (DFT) is described. The Fourier transform is based on sequence of discrete cosine transforms and on basic harmonic function approximation by sign alternate power sum with base 2. Accuracy of the DFT algorithm is defined only by basic function approximation error. The fact of precise restoration of original numeric signal by using approximate data of its DFT-image is proved.