ИНФОРМАТИКА

2005 **январь-март** **№ 1**

УДК 519.10

В.А. Емеличев, К.Г. Кузьмин

О СИЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ПОРОГОВЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается многокритериальная задача минимизации пороговых функций, широко применяемых в математической кибернетике и дискретной математике. Исследуется тот тип устойчивости рассматриваемой задачи, при котором «малые» возмущения параметров векторного критерия могут приводить к появлению новых оптимумов Парето, но при любом таком возмущении должна сохраняться парето-оптимальность хотя бы одного (не обязательно одного и того же) решения исходной задачи.

Введение

Широкое распространение в последние десятилетия дискретных оптимизационных моделей в проектировании, управлении, экономике стимулировало внимание многих специалистов к изучению разнообразных аспектов устойчивости как скалярных, так и векторных (многокритериальных) задач дискретной оптимизации (см., например, [1–6]). При этом под устойчивостью дискретных экстремальных задач обычно понимается наличие такой окрестности входных данных в пространстве параметров задачи, что по отношению к исходной любая «возмущенная» задача с параметрами из этой окрестности обладает некоторым наперед заданным свойством инвариантности. Продолжая цикл работ [2, 7–12], посвященных выделению классов устойчивых задач дискретной оптимизации, рассмотрим вопросы устойчивости векторных задач минимизации пороговых булевых функций. Отметим, что интерес к пороговым функциям обусловлен широтой спектра их применения в математической кибернетике и дискретной математике (см., например, [13, 14]). Такие функции используются при решении задач искусственного интеллекта, при распознавании образов, диагностике дискретных устройств, в линейном булевом программировании, теории графов и других разделах прикладной математики.

1. Основные определения и обозначения

Рассмотрим следующую модель векторной дискретной оптимизационной задачи. Пусть на множестве решений (булевых векторов) $X \subseteq \mathbf{E}^n = \{0,1\}^n$, $|X| \geq 2$, $n \geq 2$, задана вектор-функция (векторный критерий)

$$f(x, A, b) = (f_1(x, A_1, b_1), f_2(x, A_2, b_2), ..., f_m(x, A_m, b_m)) \to \min_{x \in X},$$

компонентами (частными критериями) которой являются пороговые функции

$$f_i(x, A_i, b_i) = \begin{cases} 0, & \text{åñëè} \ \ A_i x \leq b_i; \\ 1, & \text{åñëè} \ \ A_i x > b_i, \end{cases}$$

где $i \in N_m = \{1, 2, ..., m\}$, $m \geq 1$, A_i – i-я строка матрицы $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b = (b_1, b_2, ..., b_m)^T \in \mathbf{R}^m$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in X$.

Под векторной (m-критериальной) задачей $Z^m(A, b)$ будем понимать задачу нахождения множества Парето, т. е. множества эффективных решений

$$P^m(A, b) = \{x \in X : P^m(x, A, b) = \varnothing\},$$

где $$P^m(x,A,b)=\{x'\in X: g(x,x',A,b)\geq 0_{(m)} \ \ \& \ \ g(x,x',A,b)\neq 0_{(m)}\};$$

$$g(x,x',A,b)=(g_1,g_2,...,g_m);$$

$$g_i=g_i(x,x',A_i,b_i)=f_i(x,A_i,b_i)-f_i(x',A_i,b_i), \qquad i\in N_m;$$

$$0_{(m)}=(0,0,...,0)\in \mathbf{R}^m.$$

Легко видеть, что множество Парето непусто при любых $A\in \mathbf{R}^{m\times n}$, $b\in \mathbf{R}^m$.

Отметим, что векторная пороговая функция $f(x,A,b)$ характеризует меру несовместности системы линейных булевых неравенств

$$Ax\leq b, \quad x\in X. \tag{1}$$

Тем самым, минимизация функций $f_i(x,A_i,b_i)$, $i\in N_m$, на множестве решений X равносильна минимизации невязок системы (1). Поэтому задача $Z^m(A,b)$ представляет собой задачу отыскания множества всех решений системы (1) при условии, что эта система совместна. Нетрудно видеть, что система неравенств (1) совместна тогда и только тогда, когда множество эффективных векторных оценок

$$f(P^m(A,b))=\{y\in \mathbf{E}^m: \ \ y=f(x,A,b), \ \ x\in P^m(A,b)\}$$

состоит лишь из нулевого вектора $0_{(m)}$.

Будем исследовать поведение множества Парето $P^m(A,b)$ при возмущении параметров векторного критерия $f(x,A,b)$, т. е. элементов пары (A,b). Для этого в пространстве $\mathbf{R}^q$ произвольной размерности $q\in \mathbf{N}$ зададим чебышевскую метрику l_∞, т. е. под нормой вектора $z=(z_1,z_2,...,z_q)\in \mathbf{R}^q$ будем понимать число

$$\|z\|=\max\{|z_i|: \ i\in N_q\},$$

а под нормой $\|A\|$ матрицы $A=[a_{ij}]_{m\times n}\in \mathbf{R}^{m\times n}$ – норму вектора $(a_{11},a_{12},...,a_{mn-1},a_{mn})\in \mathbf{R}^{mn}$.

Пусть $\varepsilon>0$, $\Omega(\varepsilon)$ – множество таких пар (A',b'), что $A'\in \mathbf{R}^{m\times n}$, $\|A'\|<\varepsilon$, $b'\in \mathbf{R}^m$, $\|b'\|<\varepsilon$. В дальнейшем пару (A',b') будем называть возмущающей.

Под устойчивостью векторной дискретной задачи обычно понимают свойство непоявления новых эффективных решений при любых изменениях параметров задачи в пределах «малой» окрестности исходных данных (см., например, [1, 2, 8, 15]). Легко видеть, что свойство устойчивости задачи $Z^m(A,b)$ является дискретным аналогом свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу в точке $(A,b)\in \mathbf{R}^{m(n+1)}$ оптимального отображения

$$P^m: \ \mathbf{R}^{m(n+1)}\to 2^X,$$

т. е. точечно-множественного отображения, которое набору параметров задачи ставит в соответствие множество Парето. Ослабляя требование непоявления новых эффективных решений, приходим к понятию сильной устойчивости задачи $Z^m(A,b)$. Этот тип устойчивости трактуется как наличие таких возмущений параметров задачи, при которых хотя и возможно появление новых эффективных решений, но для каждого «малого» возмущения параметров должно существовать хотя бы одно эффективное решение исходной задачи (не обязательно одно и то же), сохраняющее свою эффективность. Поэтому по аналогии с [2, 9, 12, 15] задачу $Z^m(A,b)$ будем называть сильно устойчивой, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой пары $(A',b') \in \Omega(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$P^m(A,b) \cap P^m(A+A',b+b') \neq \varnothing,$$

т. е. если справедлива формула

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall (A',b') \in \Omega(\varepsilon) \quad \exists x^0 \in P^m(A,b) \qquad (x^0 \in P^m(A+A',b+b')).$$

Сформулированный тип устойчивости и его количественная характеристика – радиус устойчивости – был впервые введен и исследован в [16] для скалярной (однокритериальной) комбинаторной задачи. Позднее эти результаты были распространены на векторные задачи дискретной оптимизации с разнообразными видами частных критериев и принципами оптимальности [2, 7, 9 – 12, 15].

Ясно, что в случае, когда $P^m(A,b) = X$, задача $Z^m(A,b)$ сильно устойчива. Поэтому в дальнейшем этот случай будем исключать из рассмотрения, а задачу $Z^m(A,b)$, для которой множество $\overline{P}^m(A,b) = X \setminus P^m(A,b)$ непусто, будем называть нетривиальной.

2. Вспомогательные утверждения

Для вывода необходимого и достаточного условий сильной устойчивости задачи $Z^m(A,b)$ нам понадобится ряд очевидных свойств.

Свойство 1. *Нетривиальная задача $Z^m(A,b)$ не является сильно устойчивой тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая возмущающая пара $(A^*,b^*) \in \Omega(\varepsilon)$, что для всякого эффективного решения $x \in P^m(A,b)$ справедливо соотношение $x \in \overline{P}^m(A+A^*,b+b^*)$.*

Свойство 2. *Пусть решение $x \in \overline{P}^m(A,b)$. Если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая возмущающая пара $(A^*,b^*) \in \Omega(\varepsilon)$, что для всякого эффективного решения $x^0 \in P^m(A,b)$ справедливо включение $x \in P^m(x^0, A+A^*, b+b^*)$, то задача $Z^m(A,b)$ не является сильно устойчивой.*

Свойство 3. *Если при некоторых $i \in N_m$ и $x \in X$ выполняется неравенство*

$$A_i x < b_i \qquad (A_i x > b_i),$$

то существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой возмущающей пары $(A',b') \in \Omega(\varepsilon)$ верно равенство

$$f_i(x, A_i + A'_i, b_i + b'_i) = 0 \qquad (f_i(x, A_i + A'_i, b_i + b'_i) = 1),$$

где A_i – i-я строка матрицы $A' = [a'_{ij}]_{m \times n}$, $b' = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_m)$.

В силу неравенства $|X| < \infty$ множество Парето $P^m(A,b)$ внешне устойчиво [17, с. 34]. Поэтому справедливо следующее свойство.

Свойство 4. *Для всякого решения $x^0 \in \overline{P}^m(A,b)$ найдется эффективное решение $x^* \in P^m(x^0, A, b)$.*

Лемма. *Пусть* $x^0 \in P^m(A,b)$, $\varepsilon > 0$. *Если для всякой возмущающей пары* $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$ *и любого решения* $x \in \overline{P}^m(A,b)$ *справедливо соотношение*

$$x \notin P^m(x^0, A + A', b + b'), \tag{2}$$

то задача $Z^m(A,b)$ *сильно устойчива.*

Доказательство. Пусть, напротив, при выполнении условий леммы задача $Z^m(A,b)$ не является сильно устойчивой. Тогда согласно свойству 1 существует такая пара $(A^*, b^*) \in \Omega(\varepsilon)$, что справедливо включение

$$x \in \overline{P}^m(A + A^*, b + b^*) \quad \forall\, x \in P^m(A,b). \tag{3}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $x^0 \in \overline{P}^m(A + A^*, b + b^*)$. Поэтому в силу свойства 4 сущест- вует такое решение $x^* \in P^m(A + A^*, b + b^*)$, что $x^* \in P^m(x^0, A + A^*, b + b^*)$, причем ввиду (3) решение $x^* \in \overline{P}^m(A,b)$. Таким образом, получено противоречие соотношению (2).

Лемма доказана.

3. Условия сильной устойчивости

Обозначим через $P^m_\alpha(A,b)$ множество таких решений $x^0 \in P^m(A,b)$, что для всякого решения $x \in \overline{P}^m(A,b)$ выполняется одно из условий:

(i) существует хотя бы один такой индекс $s \in N_m$, что справедливы неравенства

$$A_s x^0 < b_s, \qquad A_s x > b_s; \tag{4}$$

(ii) для любого индекса $i \in N_m$ верно только одно из неравенств

$$A_i x^0 < b_i \quad \text{èëè} \quad A_i x > b_i. \tag{5}$$

Теорема 1. *Для того чтобы нетривиальная задача* $Z^m(A,b)$, $m \ge 1$, *была сильно устойчивой, достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $P^m_\alpha(A,b) \ne \varnothing$.

Доказательство. Пусть задача $Z^m(A,b)$ нетривиальна ($\overline{P}^m(A,b) \ne \varnothing$) и $P^m_\alpha(A,b) \ne \varnothing$. Зафиксируем решение $x^0 \in P^m_\alpha(A,b)$. Тогда $x^0 \in P^m(A,b)$ и для всякого решения $x \in \overline{P}^m(A,b)$ справедливо одно из условий – (i) или (ii).

Если имеет место условие (i), то найдется такой индекс $s = s(x) \in N_m$, что выполняются неравенства (4). Отсюда согласно свойству 3 следует существование такого числа $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x) > 0$, что для любой возмущающей пары $(A', b') \in \Omega(\varepsilon_1)$ выполняются равенства

$$f_s(x^0, A_s + A'_s, b_s + b'_s) = 0, \qquad f_s(x, A_s + A'_s, b_s + b'_s) = 1$$

и, тем самым, равенство $g_s(x^0, x, A_s + A'_s, b_s + b'_s) = -1$. Поэтому никакое решение $x \in \overline{P}^m(A,b)$ не может принадлежать множеству $P^m(x^0, A + A', b + b')$ ни при какой паре $(A', b') \in \Omega(\varepsilon_1)$.

Пусть теперь выполняется условие (ii). Тогда для любого индекса $i \in N_m$ справедливо только одно из условий (5). Отсюда на основании свойства 3 существует такое число $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x) > 0$, что для всякой возмущающей пары $(A', b') \in \Omega(\varepsilon_2)$ и любого индекса $i \in N_m$ верно одно из равенств

$$f_s(x^0, A_s + A'_s, b_s + b'_s) = 0 \quad \text{èëè} \quad f_s(x, A_s + A'_s, b_s + b'_s) = 1,$$

т. е. одно из равенств

$$g_i(x^0, x, A_i + A'_i, b_i + b'_i) = 0 \ \ \text{èëè} \ \ g_i(x^0, x, A_i + A'_i, b_i + b'_i) = -1.$$

Поэтому и в данном случае $x \notin P^m(x^0, A + A', b + b')$ при $(A', b') \in \Omega(\varepsilon_2)$.

Далее, пусть X_1 и X_2 – множества тех решений $x \in \overline{P}^m(A, b)$, которые при заданном решении $x^0 \in P^m(A, b)$ удовлетворяют соответственно условиям (i) и (ii). Если одно из этих множеств пусто, то в силу леммы задача $Z^m(A, b)$ сильно устойчива. Если же оба множества X_1 и X_2 непусты, то легко видеть, что для любой пары $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$ и всякого решения $x \in \overline{P}^m(A, b)$ справедливо соотношение $x \notin P^m(x^0, A + A', b + b')$, где $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*\}$, $\varepsilon_1^* = \min\{\varepsilon_1(x) : x \in X_1\}$, $\varepsilon_2^* = \min\{\varepsilon_2(x) : x \in X_2\}$. Поэтому согласно лемме задача $Z^m(A, b)$ сильно устойчива.

Теорема 1 доказана.

Через $\overline{P}^m_\beta(A, b)$ обозначим множество таких решений $x \in \overline{P}^m(A, b)$, что для всякого решения $x^0 \in P^m(A, b)$ не выполняется ни одно из условий (i) и (ii).

Теорема 2. *Для того чтобы нетривиальная задача $Z^m(A, b)$, $m \geq 1$, была сильно устойчивой, необходимо, чтобы выполнялось равенство $\overline{P}^m_\beta(A, b) = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть, напротив, нетривиальная задача $Z^m(A, b)$ сильно устойчива, но множество $\overline{P}^m_\beta(A, b) \neq \varnothing$. Тогда существует такое решение $x \in \overline{P}^m(A, b)$, что для всякого решения $x^0 \in P^m(A, b)$ и любого индекса $i \in N_m$ справедливо хотя бы одно из неравенств

$$A_i x^0 \geq b_i \quad \text{èëè} \quad A_i x \leq b_i, \tag{6}$$

и существует хотя бы один такой индекс $p \in N_m$, что

$$A_p x^0 \geq b_p \quad \text{è} \quad A_p x \leq b_p. \tag{7}$$

Пусть число $\varepsilon > 0$, а число $\gamma > 0$ таково, что

$$0 < \max\{\gamma, \gamma \| x \|_1\} < \varepsilon,$$

где $\| x \|_1 = | \{ j \in N_n : x_j = 1\} |$.

Элементы возмущающей пары (A^*, b^*) зададим по формулам

$$a^*_{ij} = \begin{cases} -\gamma, & \text{если} \quad i \in N_m,\ x_j = 1, \\ \gamma & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$b_i^* = -\gamma \| x \|_1, \qquad i \in N_m.$$

Тогда легко видеть, что для каждого решения $x^0 \in P^m(A,b)$ и всякого индекса $i \in N_m$ верны соотношения

$$A_i^* x^0 - b_i^* > 0, \qquad A_i^* x - b_i^* = 0.$$

Поэтому, учитывая (6), имеем

$$g_i(x^0, x, A_i + A_i^*, b_i + b_i^*) \geq 0, \qquad x^0 \in P^m(A,b), \qquad i \in N_m,$$

откуда ввиду (7)

$$g_p(x^0, x, A_p + A_p^*, b_p + b_p^*) > 0, \quad x^0 \in P^m(A,b).$$

Это означает, что $x \in P^m(x^0, A + A^*, b + b^*)$ при любом решении $x^0 \in P^m(A,b)$. Следовательно, в силу свойства 2 задача $Z^m(A,b)$ не является сильно устойчивой.

Теорема 2 доказана.

4. Следствия

Легко видеть, что в однокритериальном случае $(m = 1)$ множество оптимальных решений $P^1(A,b)$ скалярной задачи $Z^1(A,b)$ совпадает либо с множеством $P_\alpha^1(A,b)$, либо с множеством всех решений X. Поэтому ввиду $P^1(A,b) \neq \varnothing$ и на основании теоремы 1 справедливо

Следствие 1. *Скалярная задача $Z^1(A,b)$ при любых $A \in \mathbf{R}^n, b \in \mathbf{R}$ сильно устойчива.*

Следствие 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *нетривиальная бикритериальная задача $Z^2(A,b)$ сильно устойчива;*

2) $P_\alpha^2(A,b) \neq \varnothing$;

3) $\overline{P}_\beta^2(A,b) = \varnothing$.

Доказательство. На основании теорем 1 и 2, а также очевидной импликации $P_\alpha^2(A,b) \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \overline{P}_\beta^2(A,b) = \varnothing$ для доказательства следствия 2 достаточно показать справедливость импликации $\overline{P}_\beta^2(A,b) = \varnothing \;\Rightarrow\; P_\alpha^2(A,b) \neq \varnothing$, что и будет сделано ниже методом от противного.

Пусть множества $P_\alpha^2(A,b)$ и $\overline{P}_\beta^2(A,b)$ пусты. Тогда для всякого эффективного решения $x \in P^2(A,b)$ найдется такое решение $x^* \in \overline{P}^2(A,b)$, что для любого индекса $i \in N_2$ справедливо хотя бы одно из неравенств

$$A_i x \geq b_i \quad \text{èëè} \quad A_i x^* \leq b_i$$

и существует индекс $p \in N_2$, для которого выполняются оба эти неравенства. Поэтому ввиду $x^* \in \overline{P}^2(A,b)$ верны неравенства $Ax \geq b$ и $A_p x^* \leq b_p$. Следовательно, $x^* \in \overline{P}_\beta^2(A,b)$, что противоречит пустоте множества $\overline{P}_\beta^2(A,b)$.

Следствие 2 доказано.

Следствие 3. *При любом* $m \geq 1$ *каждое из соотношений* $P_\alpha^m(A,b) \neq \varnothing$ *или* $\overline{P}_\beta^m(A,b) = \varnothing$ *является одновременно необходимым и достаточным условием сильной устойчивости нетривиальной задачи* $Z^m(A,b)$*, если справедливо хотя бы одно из следующих двух условий:*

1) *задача* $Z^m(A,b)$ *имеет единственное эффективное решение* $(|P^m(A,b)| = 1)$;

2) *для любых двух решений* $x', x'' \in \overline{P}^m(A,b)$ *верно равенство*

$$g(x', x'', A, b) = 0_{(m)}.$$

В самом деле, импликация $P_\alpha^m(A,b) \neq \varnothing \Rightarrow \overline{P}_\beta^m(A,b) = \varnothing$ очевидна при любых $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$, а справедливость хотя бы одного из условий 1) или 2) влечет выполнение импликации $\overline{P}_\beta^m(A,b) = \varnothing \Rightarrow P_\alpha^m(A,b) \neq \varnothing$. Поэтому, применяя теоремы 1 и 2, убеждаемся в справедливости следствия 3.

Замечание. *С учетом эквивалентности любых двух метрик в конечномерном линейном пространстве* [18, с. 166] *все приведенные здесь условия верны не только для чебышевской, но и для других норм в пространстве* $\mathbf{R}^{m(n+1)}$ *возмущающих параметров векторного критерия задачи* $Z^m(A,b)$*. Лишь в случаях, когда речь идет о количественных результатах, например, о формулах радиусов устойчивости или сильной устойчивости, выбор метрики существенно влияет на результат* (*см., например,* [8, 19 – 22]).

5. Примеры

Следующий пример показывает, что при $m \geq 3$ условие $P_\alpha^m(A,b) \neq \varnothing$ (см. теорему 1) не является, вообще говоря, необходимым условием сильной устойчивости нетривиальной задачи $Z^m(A,b)$.

Пример 1. Пусть $n = 2$, $m = 3$, $X = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$, $x^1 = (0,0)^T$, $x^2 = (0,1)^T$, $x^3 = (1,0)^T$, $x^4 = (1,1)^T$, $b = (0,2,-1)^T$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда $f(x^1, A, b) = (0,0,1)^T$, $f(x^2, A, b) = f(x^3, A, b) = (0,0,0)^T$, $f(x^4, A, b) = (0,1,0)^T$, $P^3(A,b) = \{x^2, x^3\}$, $P_\alpha^3(A,b) = \varnothing$. Однако нетрудно убедиться, что при любом достаточно малом возмущении пары (A,b) хотя бы одно из решений x^2 или x^3 остается эффективным, т. е. задача $Z^3(A,b)$ сильно устойчива. Очевидно, что данный пример можно расширить до любого числа критериев $m > 3$, например, добавляя к матрице $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ строки с отрицательными элементами, а к вектору $b \in \mathbf{R}^3$ – нулевые элементы.

Приведем также пример, свидетельствующий о том, что при $m \geq 3$ условие $\overline{P}_\beta^m(A,b) = \varnothing$ (см. теорему 2) не является, вообще говоря, достаточным условием сильной устойчивости нетривиальной задачи $Z^m(A,b)$.

Пример 2. Пусть $n = 3$, $m = 3$, $X = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$, $x^1 = (1,0,0)^T$, $x^2 = (0,1,0)^T$, $x^3 = (1,0,1)^T$, $x^4 = (0,1,1)^T$, $b = 0_{(3)}^T$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда $f(x^1, A, b) = f(x^2, A, b) = (0,0,0)^T$, $f(x^3, A, b) = (1,0,0)^T$, $f(x^4, A, b) = (0,0,1)^T$, $P^3(A,b) = \{x^1, x^2\}$. Легко видеть, что увеличение элементов a_{11}, a_{21}, a_{22} и a_{32} матрицы A на сколь угодно малую величину $\varepsilon > 0$ приводит к потере эффективности решений x^1 и x^2, т. е. задача $Z^3(A,b)$ не является сильно устойчивой, хотя $\overline{P}^3_\beta(A,b) = \varnothing$. Кроме того, аналогично примеру 1 данный пример можно расширить до любого числа критериев $m > 3$.

Заключение

Многие проблемы принятия многоцелевых решений (индивидуальных или групповых) в проектировании, управлении, планировании могут быть сформулированы как многокритериальные (векторные) задачи дискретной оптимизации. Решение таких задач сводится к выбору лучших в том или ином смысле значений переменных из некоторой дискретной совокупности, что определяется физическим или экономическим смыслом изучаемых проблем. Характерной особенностью подобных задач, возникающих на практике, является их неопределенность, связанная с такими факторами, как неточность и некорректность исходных данных (параметров задачи), погрешность численных методов, неадекватность математических моделей реальным процессам и т. д. Порой сколь угодно малые погрешности в исходной информации влекут значительные искажения искомого решения. Такие задачи обычно называются некорректно поставленными, т. е. неустойчивыми к малым изменениям исходных данных, их решение может быть лишено смысла. Представляется актуальным выделение классов устойчивых задач векторной дискретной оптимизации. Этой проблематике и посвящена настоящая работа, где для векторных булевых задач минимизации пороговых функций получены одно необходимое и одно достаточное условия сильной устойчивости. Выделен класс векторных задач, для которых каждое из этих условий является одновременно необходимым и достаточным условием сильной устойчивости. В случае бикритериальной задачи найден критерий рассматриваемой устойчивости задачи. Приведены численные примеры, раскрывающие природу полученных условий.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Математические структуры 29».

Список литературы

1. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – Киев: Наукова думка, 1995. – 170 с.

2. Stability and regularization of vector problems of integer linear programming / V.A. Emelichev, E. Girlich, Yu.V. Nikulin, D.P. Podkopaev // Optimization. – 2002. – V. 51. – № 4. – P. 645–676.

3. Greenberg N.J. An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer and combinatorial optimization // Advances in computational and stochastic optimization, logic programming and heuristic search. – Boston: Kluwer academic publishers, 1998. – P. 97–148.

4. Stability aspects of the travelling salesman problem based on k-best solutions / M. Libura, E. van der Poort, G. Sierksma, J. van der Veen // Discrete appl. math. – 1998. – V. 87. – P. 159–185.

5. Sotskov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.N. Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete appl. math. – 1995. – V. 58. – № 2. – P. 169–190.

6. Sotskov Yu.N., Tanaev V.S., Werner F. Stability radius of an optimal schedule: a survey and recent developments // Industrial applications of combinatorial optimization. – Kluwer, 1998. – V. 16. – P. 72–108.

7. Емеличев В.А., Бердышева Р.А. О сильной устойчивости векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации // Дискретная математика. – 1998. – Т. 10. – Вып. 3. – С. 3–9.

8. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г., Леонович А.М. Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 2. – С. 79–92.

9. Емеличев В.А., Никулин Ю.В. О радиусе сильной устойчивости векторной траекторной задачи // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2000. – № 1. – С. 47–50.

10. Никулин Ю.В. О сильной устойчивости и квазиустойчивости векторной лексикографической задачи квадратичного булева программирования // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2002. – № 3. – С. 110–114.

11. Berdysheva R.A., Emelichev V.A. Strong stability and strong quasistability of vector trajectorial problem of lexicographic optimization // Computer Science J. of Moldova. – 1998. – V. 6. – № 2. – P. 119–136.

12. Emelichev V.A., Nikulin Yu.V. Numerical measure of strong stability in the vector problem of integer linear programming // Computer science J. of Moldova. – 1999. – V. 7. – № 1. – P. 105–117.

13. Зуев Ю.А. Пороговые функции и пороговые представления булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. – 1994. – С. 5–61.

14. Коршунов А.Д. Монотонные булевы функции // Успехи математических наук. – 2003. – Т. 58. – Вып. 5. – С. 89–162.

15. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 1. – С. 63–70.

16. Леонтьев В.К. Устойчивость в линейных дискретных задачах // Проблемы кибернетики: сб. науч. тр. Вып. 35. – М.: Наука, 1979. – С. 169–184.

17. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

18. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функциональный анализ. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

19. Агеенко А.В., Емеличев В.А. О радиусе устойчивости строго эффективного решения векторной булевой задачи минимизации пороговых функций // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2004. – № 4. – С. 38–41.

20. Бухтояров С.Е. О радиусе сильной устойчивости векторной линейной траекторной задачи с совокупно-экстремальным принципом оптимальности // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2004. – № 3. – С. 101–104.

21. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. О радиусе устойчивости строго эффективного решения векторной задачи минимизации пороговых функций в метрике l_1 // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 3. – С. 62–67.

22. Emelichev V.A., Kuzmin K.G. On one discrete optimization model of multiobjective decision macking in conditions of uncertainty // VI International congress on mathematical modeling. Book of abstracts. – Nizhny Novgorod, 2004. – P. 76.

Поступила 15.12.04

Белорусский государственный университет,
Минск, пр. Ф. Скорины, 4
E-mail: emelichev@bsu.by,
kuzminkg@mail.ru

V.A. Emelichev, K.G. Kuzmin

ON THE STRONG STABILITY OF A VECTOR PROBLEM SOLUTIONS OF THRESHOLD BOOLEAN FUNCTIONS MINIMIZATION

A discrete multiple criteria problem of threshold Boolean functions minimization is considered. The subject of investigation is the type of the problem stability, when «small» perturbations of the vector criterion parameters may result the appearance of new Pareto optima, but in any cases at least one solution of the initial problem has to save its Pareto optimality.