ИНФОРМАТИКА

2005 январь-март № 1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 539.3

В.И. Махнач, О.Л. Швед

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ И ПОВОРОТОВ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Представлены допустимые определяющие соотношения. С использованием известных диаграмм $\sigma \sim \varepsilon$ для меди выполнены численно базовые эксперименты – одноосные растяжение и сжатие, вычислены функции и параметры теории. Рассмотрен модельный пример о простом сдвиге.

Введение

В известных построениях геометрически нелинейной теории упругопластичности обычно упрощается (линеаризируется) и сама модель упругости [1, 2]. Не используется в полной мере потенциальная природа упругой деформации [3, 4], которая в сочетании с требованием введения предельной поверхности [5] может привести к неожиданным результатам. В частности, просто описывается эффект прерывистости Савара [6], который представлен в данной работе для некоторых нагружений.

Предполагаем процесс деформирования изотермическим и квазистатическим. Среда принимается безмоментной, т. е. моменты напряжений в рассмотрение не вводятся. Используем тензорные обозначения работы [4].

1. Кинематика процесса

Рассмотрим упругопластическую среду (тело). Обозначим $\mathbf{R}(*)$ вектор места частицы (элемента) среды в конфигурациях: $(*=0)$ – отсчетной (начальной, когда среда изотропна), $(*=\tau)$ – отсчетной (разгрузочной), $(*=t)$ – актуальной. Частице приписывается «номер» (q^1, q^2, q^3) – ее материальные координаты. Удобно выбирать в качестве q^s декартовы координаты. Обозначим $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ неподвижный ортонормированный триэдр, девиаторы $\mathbf{W}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$, $\mathbf{W}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$. Исходный $\mathbf{R}_s(*)$ и взаимный $\mathbf{R}^s(*)$ базисы в отчетной и актуальной конфигурациях определяются соотношениями

$$\mathbf{R}_s = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^s},\ G_{sk} = \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{R}_k,\ G_{st}G^{tn} = \delta_s^n = \begin{cases} 0, & n \neq s; \\ 1, & n = s, \end{cases}\ \mathbf{R}^s = G^{sk}\mathbf{R}_k. \tag{1}$$

В разгрузочной (промежуточной) конфигурации первое соотношение в (1) обычно не выполняется. Частица может находиться либо в пассивном, либо в активном процессах, условия реализации которых будем обозначать (P) и (A). В пассивном процессе разгрузочная конфигурация фиксирована. Начальная конфигурация всегда фиксирована (т. е. $\dot{\mathbf{R}}(0) = 0$ и $\dot{\mathbf{R}}_s(0) = \dot{\mathbf{R}}^s(0) = 0$, точка над символом обозначает его материальную производную).

Вводятся градиенты и транспонированные градиенты общей, упругой и пластической деформаций: $\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}^s(0)\mathbf{R}_s(t)$, $\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T(t) = \mathbf{R}_s(t)\mathbf{R}^s(0)$; $\overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}^s(\tau)\mathbf{R}_s(t)$, $\overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}^T(t) =$

$= \mathbf{R}_s(t)\mathbf{R}^s(\tau)$; $\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{R}^s(0)\mathbf{R}_s(\tau)$, $\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T(\tau) = \mathbf{R}_s(\tau)\mathbf{R}^s(0)$, где $\overset{*}{\nabla} = \mathbf{R}^s(*)\dfrac{\partial}{\partial q^s}$ – набла-оператор Гамильтона. Справедливы соотношения $\overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}(t) = \overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(t)$, $\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ – единичный тензор) при $\tau = 0$ и $\overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}(t) = \mathbf{E}$, $\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(\tau) = \overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(t)$ при $t = \tau$. Деформационный градиент $\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(t)$ является чисто кинематической величиной ($\dot{\mathbf{R}}_s(t) = \nabla\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{R}_s(t) = \mathbf{R}_s(t)\cdot\nabla\mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{R}}^s(t) = -\mathbf{R}^s(t)\cdot\nabla\mathbf{v}^T = \ = -\nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}^s(t)$, $\mathbf{v}$ – вектор скорости перемещения частицы). Тензоры $\overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}(t)$, $\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(\tau)$ таковыми не являются ($\dot{\mathbf{R}}_s(\tau)$, $\dot{\mathbf{R}}^s(\tau)$ нельзя определить в рамках кинематики). Однако их можно назвать градиентами, так как выполняются $\overset{\tau}{\nabla}\times\overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}(t) = 0, \overset{0}{\nabla}\times\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(\tau) = 0$ [4].

Упругая и пластическая деформации в общем случае будут несовместными. Совместность деформаций связана с возможностью отыскания вектора места по известному векторному базису. Для этого необходимо обращение в 0 шести компонент тензора Риччи [4]. Задача отыскания $\mathbf{R}$ сводится к системе дифференциальных уравнений $\dfrac{\partial \mathbf{R}_s}{\partial q^t} = \begin{Bmatrix} q \\ st \end{Bmatrix}\mathbf{R}_q$, где $\begin{Bmatrix} q \\ st \end{Bmatrix} = G^{qt}[st,k]$, $[st,k] = \mathbf{R}_{st}\cdot\mathbf{R}_k$ – символы Кристоффеля второго и первого рода, $\mathbf{R}_{st} = \dfrac{\partial \mathbf{R}_s}{\partial q^t}$. Если все тело деформируется как один элемент, то имеем $0 = \mathrm{R}_{st} = [st,k] = \begin{Bmatrix} q \\ st \end{Bmatrix}$ и система удовлетворяется тождественно. В этом случае разгрузочная конфигурация существует. Как правило, нагрузку с тела полностью снять нельзя и разгрузочная конфигурация не может быть достигнута.

Формально справедлива удовлетворяющая требованиям инвариантности [2] мультипликативная декомпозиция транспонированного градиента деформации Крёнера – Ли

$$\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T(t) = \mathbf{R}_s(t)\mathbf{R}^s(0) = \mathbf{R}_s(t)\mathbf{R}^s(\tau)\cdot\mathbf{R}_k(\tau)\mathbf{R}^k(0) = \overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}^T(t)\cdot\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T(\tau). \tag{2}$$

Определим меры общей, упругой и пластической деформаций (Фингера и Коши – Грина):

$$\overset{0}{\mathbf{F}}(t) = \overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T(t)\cdot\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(t),\ \overset{\tau}{\mathbf{F}}(t) = \overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}^T(t)\cdot\overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}(t),\ \overset{0}{\mathbf{F}}(\tau) = \overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T(\tau)\cdot\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(\tau);$$

$$\overset{0}{\mathbf{G}}(t) = \overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(t)\cdot\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T(t),\ \overset{\tau}{\mathbf{G}}(t) = \overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}(t)\cdot\overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}^T(t),\ \overset{0}{\mathbf{G}}(\tau) = \overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(\tau)\cdot\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T(\tau).$$

Согласно полярному разложению транспонированных градиентов получаем

$$\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T(t) = \overset{0}{\mathbf{V}}(t)\cdot\overset{0}{\mathbf{O}}{}^T(t) = \overset{0}{\mathbf{O}}{}^T(t)\cdot\overset{0}{\mathbf{U}}(t), \overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}^T(t) = \overset{\tau}{\mathbf{V}}(t)\cdot\overset{\tau}{\mathbf{O}}{}^T(t) = \overset{\tau}{\mathbf{O}}{}^T(t)\cdot\overset{\tau}{\mathbf{U}}(t),\ \overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T(\tau) = \overset{0}{\mathbf{V}}(\tau)\cdot\overset{0}{\mathbf{O}}{}^T(\tau) = \overset{0}{\mathbf{O}}{}^T(\tau)\cdot\overset{0}{\mathbf{U}}(\tau),$$

где $\overset{0}{\mathbf{V}}(t)$, $\overset{0}{\mathbf{U}}(t)$; $\overset{\tau}{\mathbf{V}}(t)$, $\overset{\tau}{\mathbf{U}}(t)$; $\overset{0}{\mathbf{V}}(\tau)$, $\overset{0}{\mathbf{U}}(\tau)$ – тензоры левой и правой меры общих, упругих и пластических искажений. Собственно ортогональные тензоры $\overset{0}{\mathbf{O}}(t)$, $\overset{\tau}{\mathbf{O}}(t)$, $\overset{0}{\mathbf{O}}(\tau)$ называются тензорами поворота, сопровождающими общую, упругую и пластическую деформации.

Из формулы (2) следует, что если известны $\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T(t)$ и $\overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}^T(t)$, то могут быть найдены $\mathbf{R}_s(\tau)$, $\mathbf{R}^s(\tau)$ и выписанные выше тензоры. Попытаемся определить $\overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}^T(t)$. Выберем

$\mathbf{R}_s(0) = \mathbf{R}^s(0) = \mathbf{c}_s$. Далее будем рассматривать обратимую (упругую) деформацию, поэтому положим $\mathbf{O} = \overset{\tau}{\mathbf{O}}(t)$, $\mathbf{V} = \overset{\tau}{\mathbf{V}}(t)$, $\mathbf{U} = \overset{\tau}{\mathbf{U}}(t)$, $\overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R} = \overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{F} = \overset{\tau}{\mathbf{F}}(t)$, $\mathbf{G} = \overset{\tau}{\mathbf{G}}(t)$, $\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_s(t)$.

2. Определяющие уравнения

Задается скалярная функция – удельная свободная энергия

$$э = э(\mathbf{G}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_s), \tag{3}$$

где $э \geq 0$, $\mathbf{b}$ – симметричный тензор второго ранга, характеризующий развитие анизотропии. В упругости величина $э$ называется удельной потенциальной энергией деформации, представляет «меру запасенной энергии» и определяется с точностью до постоянной [4]. Положим в основу задания $э$ потенциал Мурнагана [3, 4]. Для двумерного случая, ограничиваясь при описании анизотропии скалярными структурами первого порядка, можно принять

$$\begin{gathered} э = \frac{1}{2}\mathbf{b} \cdot\cdot \mathbf{G} + \frac{1}{4}((-3\lambda - 2\mu + \frac{9}{4}\nu_1 + \frac{9}{2}\nu_2 + 2\nu_3)I_1 + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu - \frac{3}{2}\nu_1 - 5\nu_2 - 4\nu_3)I_1^2 + \\ + \left(-2\mu + 3\nu_2 + 4\nu_3\right)I_2 - \left(\nu_2 + 2\nu_3\right)I_1 I_2 + \frac{1}{12}\left(\nu_1 + 4\nu_2 + 8\nu_3\right)I_1^3 + 2\nu_3 I_3) - э_0, \end{gathered} \tag{4}$$

где I_j – j-й инвариант $\mathbf{F}$; λ, μ и ν_1, ν_2, ν_3 – постоянные Ляме второго и третьего порядка для изотропной среды, скаляр $э_0$ обеспечивает неотрицательность удельной свободной энергии. По скаляру $э$ определяется тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = 2I_3^{-\frac{1}{2}} \overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R}^T \cdot \frac{\partial э}{\partial \mathbf{G}} \cdot \overset{\tau}{\nabla}\mathbf{R} = 2I_3^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{V} + \varphi_0\mathbf{E} + \varphi_1\mathbf{F} + \varphi_2\mathbf{F}^2), \mathbf{B} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{O}, \tag{5}$$

$\varphi_0 = a_0 I_3$, $\varphi_1 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + b_3 I_2$, $\varphi_2 = c_0 + c_1 I_1$; $a_0 = \frac{1}{2}\nu_3$, $b_0 = \frac{1}{16}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3)$, $b_1 = \frac{1}{8}(2\lambda - 3\nu_1 - 4\nu_2)$, $b_2 = \frac{1}{16}(\nu_1 + 2\nu_2)$, $b_3 = -\frac{1}{4}(\nu_2 + 2\nu_3)$; $c_0 = \frac{1}{4}(2\mu - 3\nu_2 - 4\nu_3)$, $c_1 = -b_3$.

В упругости из условия потенциальности уравнения состояния (4)–(5) в напряжениях автоматически следует его потенциальность в скоростях напряжений $\mathbf{\Theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial \nabla \mathbf{v}}$, $\Psi = \frac{1}{2}\mathbf{\Theta} \cdot\cdot \nabla \mathbf{v}^T$, $\mathbf{\Theta} = \dot{\mathbf{T}} + \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{T}$ [4]. Естественной объективной производной обобщенного упругого закона (5) является просто вычисляемая яуманнская производная $\overset{\mathrm{W}}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}$, где $\mathbf{W}$ – тензор вихря. Для пластичности условие потенциальности в скоростях напряжений можно принять в виде $\operatorname{dev} \overset{\mathrm{W}}{\mathbf{T}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{D}}$ ($\mathbf{D}$ – тензор деформации скорости) при $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ [7]. Если $\dot{\mathbf{T}}$ вычислить по упругости $(\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(t))^{\cdot} = \overset{0}{\nabla}\mathbf{R}(t) \cdot \overset{t}{\nabla}\mathbf{v}$), то последнее условие, конечно, имеет место ввиду потенциальной природы упругой деформации. Однако яуманнская производная принципиально неудобна при формулировке определяющего уравнения в скоростях [1]. Поэтому, учитывая, что условие потенциальности в скоростях напряжений при замене яуманнской производной на O-производную ($\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \Omega \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \Omega$, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{O}} = -\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}$) не выполняется, если $\mathbf{V}$ и $\mathbf{T}$ не коммутируют, поступим следующим образом. Обозначим $\bar{\mathbf{Q}} = \operatorname{dev} \overset{\Omega}{\mathbf{T}}$, где $\dot{\mathbf{T}}$ вычисляется из (5) по упругости. Положим в качестве критериального девиатора $\mathbf{Q}$ «потенциальную» часть $\bar{\mathbf{Q}}$. Потребуем сохранения потенциальности $\mathbf{Q}\cdot\cdot\delta\mathbf{D}$ при проектировании на S – искомое девиаторное сечение предельной поверхности Π с девиатором нормали **N**. Это приводит к результатам, аналогичным полученным в работе [8]. Определяется S, девиаторы $\mathbf{N},\mathbf{K}$ являются нормалями в сингулярной точке, $\mathbf{N}$ будет нормалью в регулярной точке при обычной векторной интерпретации тензора [2].

Обозначим S_{SIN} и $S_{REG} = S - S_{SIN}$ множества сингулярных и регулярных точек S. Формализация дает $(A_2) = (\operatorname{dev}\mathbf{T} \in S_{SIN}) \wedge (\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{N} > 0) \wedge (\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{K} > 0)$, $(A_1) = (\operatorname{dev}\mathbf{T} \in S_{SIN}) \wedge$ $\wedge((\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{N} > 0) \wedge (\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{K} \le 0) \vee (\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{N} \le 0) \wedge (\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{K} > 0)) \vee (\operatorname{dev}\mathbf{T} \in S_{REG}) \wedge (\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{N} > 0)$, $(P) =$ $= (\operatorname{dev}\mathbf{T} \notin S) \vee ((\operatorname{dev}\mathbf{T} \in S_{SIN}) \wedge (\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{N} \le 0) \wedge (\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{K} \le 0)) \vee (\operatorname{dev}\mathbf{T} \in S_{REG}) \wedge (\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{N} \le 0)$.

При (P) справедливы обычные соотношения упругости [4]. При (A) выполняется условие несжимаемости в скоростях $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$, обозначим p' его множитель Лагранжа.

Для описания процесса необратимого деформирования используем параметры упрочнения типа Р. Шмидта χ^+, χ^-, связанные с пребыванием точки процесса $\operatorname{dev}\mathbf{T}$ на S^+, S^- соответственно: при (A_2) $\dot{\chi}^+ = \xi\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{N}$, $\dot{\chi}^- = \eta\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{K}$; при $(A_1)\bigcap(\operatorname{dev}\mathbf{T} \in \mathrm{S}^+)$ $\dot{\chi}^+ = \xi\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{N}$, $\dot{\chi}^- = 0$; при $(A_1)\bigcap(\operatorname{dev}\mathbf{T} \in \mathrm{S}^-)$ $\dot{\chi}^+ = 0$, $\dot{\chi}^- = \xi\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{N}$; при ($P$) $\dot{\chi}^+ = \dot{\chi}^- = 0$.

Девиатор $\mathbf{N}$ задает направление действия пластической деформации в пространстве $\operatorname{dev}\mathbf{T}$, поэтому примем при (A_1) закон упрочнения (определяющее уравнение для тензора сдвига $\mathbf{B}$) [2], определяющее соотношение в скоростях для $\mathbf{T}$ и энергетическое уравнение в скоростях соответственно:

$$\overset{\Omega}{\mathbf{B}} = -\gamma p'\mathbf{E} + \beta\mathbf{N} \;\; (\beta \ge 0), \quad \overset{\Omega}{\mathbf{T}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{NN}, \quad I_3^{-\frac{1}{2}}\dot{\ni} = \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D} - \alpha\xi\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{N}. \tag{6}$$

Из (4)–(6) получаем систему уравнений для определения $\overset{\Omega}{\mathbf{V}}$ и β [9]. При (A_2) полагаем

$$\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = 0, \; \overset{\Omega}{\mathbf{B}} = 0. \tag{7}$$

Объективность уравнений (6), (7) соблюдается при надлежащем выборе $\mathbf{\Omega}$ [1].

3. Базовые эксперименты

В данной работе использованы гладкие диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ для меди с жестким нагружением (на сжатие – до 220% деформации [6], на растяжение – до 170% деформации, причем выполнена экстраполяция [10]). В них вписывались снизу ступенчатые кривые. Учитывались данные о появлении вертикальных ступенек для значений $\varepsilon = \varepsilon_k$ по линейной зависимости $\varepsilon_k = \varepsilon_k(\varepsilon_{k-1})$ [6], выбранной здесь в виде $\varepsilon_k = 0{,}00002 + 0{,}25\varepsilon_{k-1}$ при сжатии, $\varepsilon_k = 0{,}002 + 0{,}025\varepsilon_{k-1}$ при растяжении (ε_0 соответствует напряжению текучести). По диаграмме находим конец вертикальной ступеньки, относительная длина которой определяет функцию скачков для S. Всего получилось 38 ступенек при растяжении и 43 ступеньки при сжатии. Функция α – диссипативная часть удельной мощности деформации $\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D}$ – задана равномерно возрастающей по ступенькам от 0,9999 до 1. Уменьшение нижней границы изменения α приводит к резкому увеличению значений γ. Вычислялись значения $\chi_k = \chi_k(\varepsilon_k)$. В случае произвольного напряженного состояния эффект прерывистости учитывается следующим образом. Переключение с (A) на (P) будет происходить при условии $(\chi_k^+)^{-1}\chi^+ + (\chi_k^-)^{-1}\chi^- = 1$ ($\chi_k^+ = \chi_{k+1}^+$ при $k \ge 38$), а с (P) на (A) – согласно линейной аппроксимации функций скачков из базовых экспериментов в пространстве напряжений $\mathbf{t} = \mathbf{O}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$.

Численное моделирование выполнено по осесимметричной схеме (гладкая осадка цилиндрического образца) в квазистатическом режиме, малыми шагами по времени. Использованы вариационный принцип [7] и МКЭ. При (A_1) p' определялся методом штрафной функции. Решение дифференциальных уравнений на шаге выполнялось методом рядов. Значения постоянных Ляме взяты из [4]. Рассмотрим эксперимент на растяжение по оси $\mathbf{c}_2$. Имеем $\mathbf{W}=0$, $\mathbf{\Omega}=0$, $\mathbf{O}=\mathbf{E}$, $\mathbf{T}=\sigma_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2$, $\mathbf{V}=V_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1+V_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+V_1\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3$, $\dot{\mathbf{V}}=\dot{V}_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1+\dot{V}_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+\dot{V}_1\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3$, $\mathbf{N}=-6^{-\frac{1}{2}}\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1+2^{\frac{1}{2}}3^{-\frac{1}{2}}\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2-$ $-6^{-\frac{1}{2}}\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3$, $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{N}\mathbf{N}$, $\xi\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{N}=\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D}$, $\mathbf{B}=-p_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2=-p_2 3^{-1}\mathbf{E}-p_2 2^{\frac{1}{2}}3^{-\frac{1}{2}}\mathbf{N}$, $\dot{\mathbf{B}}=-\dot{p}_2 3^{-1}\mathbf{E}-\dot{p}_2 2^{\frac{1}{2}}3^{-\frac{1}{2}}\mathbf{N}$. Из (6) находим $\gamma=-\beta(p')^{-1}6^{-\frac{1}{2}}$, $\dot{p}_2=-3^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{1}{2}}\beta$. При ($A_1$) получаем систему уравнений для определения неизвестных $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \beta$: $a_{11}\dot{V}_1+a_{12}\dot{V}_2=0$, $a_{21}\dot{V}_1+a_{22}\dot{V}_2+a_{23}\beta=0$, $a_{31}\dot{V}_1+a_{32}\dot{V}_2+a_{33}\beta=(1-\alpha)\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D}$, решение которой стремится к нулевому при $\alpha\to 1$. Из-за громоздкости выражения для a_{ij} опущены. Результаты расчетов показаны на рис. 1. Размерность σ и χ равна 10^4 МПа.

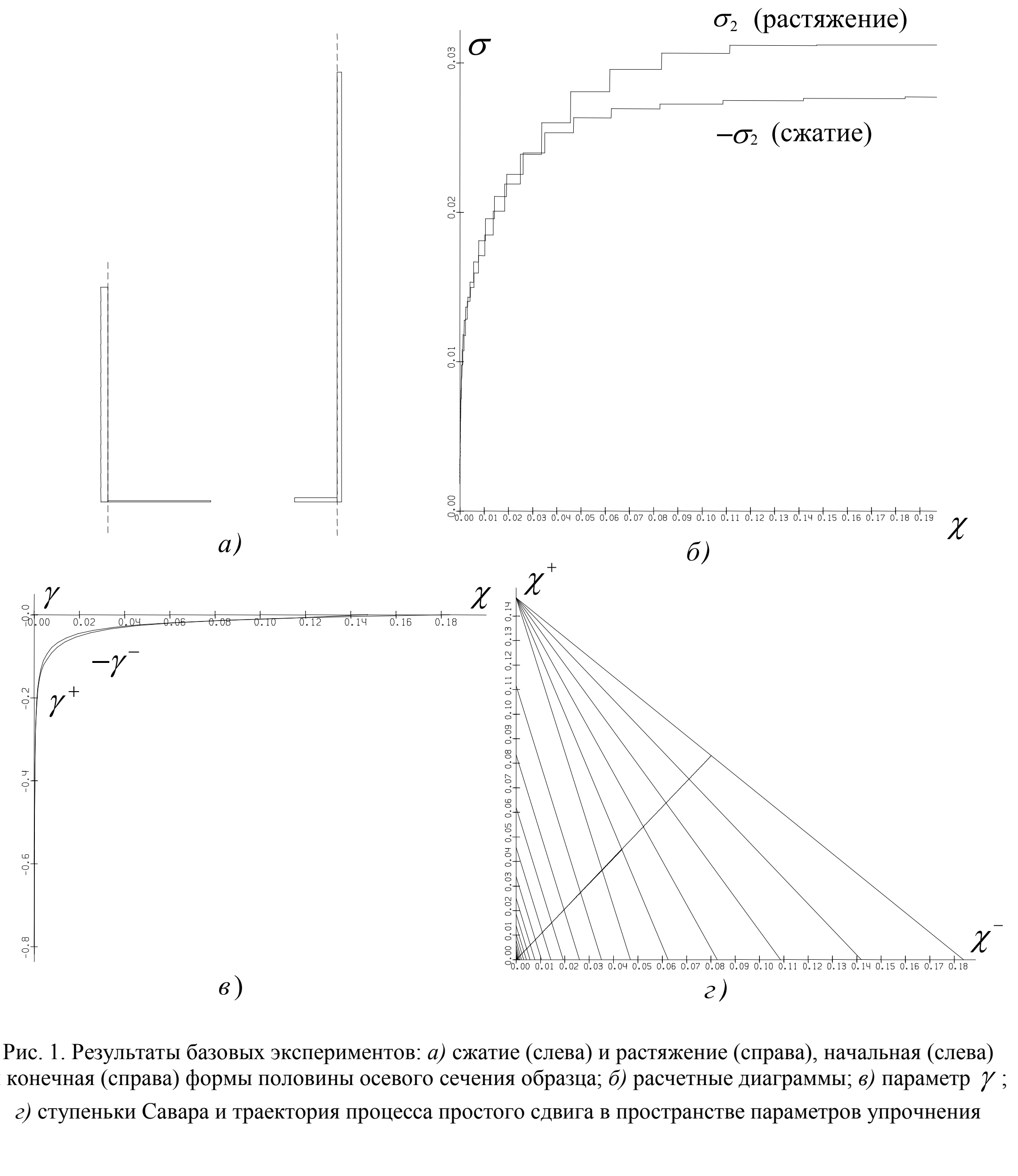


Рис. 1. Результаты базовых экспериментов: *а)* сжатие (слева) и растяжение (справа), начальная (слева) и конечная (справа) формы половины осевого сечения образца; *б)* расчетные диаграммы; *в)* параметр γ; *г)* ступеньки Савара и траектория процесса простого сдвига в пространстве параметров упрочнения

4. Модельный пример

Классическим тестовым примером для больших деформаций и поворотов является процесс простого сдвига. Простым сдвигом называется линейное преобразование, превращающее квадратное сечение параллелепипеда в параллелограмм следующим образом: вектор места частицы в отсчетной (начальной) конфигурации $\mathbf{R}(0)=q^k\mathbf{c}_k$ (q^k – ее декартовы координаты, $0 \le q^1 \le 1$, $0 \le q^2 \le 1$, $0 \le q^3 \le h$), а вектор места частицы в актуальной конфигурации $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(0) + \mathbf{c}_1 s q^2$ (s – параметр сдвига, $0 \le s < \infty$).

Обозначим $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$. Основной и взаимный векторные базисы актуальной конфигурации определяются соотношениями $\mathbf{R}_1 = \mathbf{c}_1$, $\mathbf{R}_2 = s\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$, $\mathbf{R}_3 = \mathbf{c}_3$; $\mathbf{R}^1 = \mathbf{c}^1 - s\mathbf{c}^2$, $\mathbf{R}^2 = \mathbf{c}^2$, $\mathbf{R}^3 = \mathbf{c}^3$. В отсчетной конфигурации $\mathbf{R}_i(0) = \mathbf{R}^i(0) = \mathbf{c}_i = \mathbf{c}^i$. Вычислим скорость перемещения частицы, градиенты скорости, тензор деформаций скорости и тензор вихря:

$$\mathbf{v} = \dot{s}\, q^2\mathbf{c}_2,\ \nabla\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1,\ \nabla\mathbf{v}^T = \dot{s}\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2,\ \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}^T + \nabla\mathbf{v}) = \frac{\dot{s}}{2}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1),$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}^T - \nabla\mathbf{v}) = \ = \frac{\dot{s}}{2}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)\,.$$

Находим градиенты, меры Фингера и Коши – Грина общей деформации:

$$\overset{0}{\nabla}\mathbf{R} = \mathbf{R}^i(0)\mathbf{R}_i = \mathbf{E} + s\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1; \overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T = \mathbf{E} + s\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2; \mathbf{F} = \overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T \cdot \overset{0}{\nabla}\mathbf{R} = \mathbf{E} + s^2\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + s(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1);$$

$$\mathbf{G} = \overset{0}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T = \mathbf{E} + s^2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + s(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)\,.$$

Вычисление тензоров искажений требует перехода в главные оси $\mathbf{V} = \mathbf{F}^{\frac{1}{2}}$, $\overset{V}{\mathbf{e}}_1 = \cos\varphi\mathbf{c}_1 + \sin\varphi\mathbf{c}_2$, $\overset{V}{\mathbf{e}}_2 = -\sin\varphi\mathbf{c}_1 + \cos\varphi\mathbf{c}_2$, $\overset{V}{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{c}_3$; $\overset{V}{\mathbf{e}}_1$, $\overset{V}{\mathbf{e}}_2$, $\overset{V}{\mathbf{e}}_3$ – собственные ортонормированные векторы $\mathbf{V}$, $\mathbf{V} = ctg\varphi\,\overset{V}{\mathbf{e}}_1\overset{V}{\mathbf{e}}_1 + tg\varphi\,\overset{V}{\mathbf{e}}_2\overset{V}{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_3$. Таким же образом получаем $\mathbf{U} = \mathbf{G}^{\frac{1}{2}}$, $\overset{U}{\mathbf{e}}_1 = \sin\varphi\mathbf{c}_1 + \cos\varphi\mathbf{c}_2$, $\overset{U}{\mathbf{e}}_2 = -\cos\varphi\mathbf{c}_1 + \sin\varphi\mathbf{c}_2$, $\overset{U}{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{c}_3$; $\overset{U}{\mathbf{e}}_1$, $\overset{U}{\mathbf{e}}_2$, $\overset{U}{\mathbf{e}}_3$ – собственные ортонормированные векторы $\mathbf{U}$, $\mathbf{U} = ctg\varphi\,\overset{U}{\mathbf{e}}_1\overset{U}{\mathbf{e}}_1 + tg\varphi\,\overset{U}{\mathbf{e}}_2\overset{U}{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_3$ ($\mathbf{U} = \mathbf{O}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$). Параметр сдвига s можно заменить на φ: $s = 2ctg2\varphi$, $\varphi = \frac{1}{2}arcctg\frac{s}{2}$, $\dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{s^2+4}$. При s, возрастающем от 0 до ∞, φ убывает от $\frac{\pi}{4}$ до 0. Выполняются зависимости $\mathrm{ctg}\varphi = \frac{\sqrt{s^2+4}+s}{2}$, $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\sqrt{s^2+4}-s}{2}$,

$$\cos 2\varphi = \frac{s}{\sqrt{s^2+4}}, \sin 2\varphi = \frac{2}{\sqrt{s^2+4}},\ \cos\varphi = \sqrt{\frac{\sqrt{s^2+4}+s}{2\sqrt{s^2+4}}},\ \sin\varphi = \sqrt{\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{2\sqrt{s^2+4}}}.$$

В исходной декартовой системе координат выполняются соотношения $\mathbf{V} = \frac{s^2+2}{\sqrt{s^2+4}}\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 +$

$$+\frac{2}{\sqrt{s^2+4}}\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 + \frac{s}{\sqrt{s^2+4}}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1); \mathbf{V}^{-1} = \frac{2}{\sqrt{s^2+4}}\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + \frac{s^2+2}{\sqrt{s^2+4}}\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 - \frac{s}{\sqrt{s^2+4}}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1).$$

Вычислим $\mathbf{O}^T = \mathbf{V}^{-1}\cdot\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T$, $\mathbf{O}^T = \frac{2}{\sqrt{s^2+4}}\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + \frac{2}{\sqrt{s^2+4}}\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 + \frac{s}{\sqrt{s^2+4}}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$,

$\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{O}}^T \cdot \mathbf{O} = \dfrac{2\dot{s}}{s^2+4}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)$ – спин для собственного ортогонального тензора $\mathbf{O}$, сопровождающего общую деформацию.

Введем $\mathbf{O}_\mathbf{V} = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{e}}_i(0)\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{e}}{}^i$ – ортогональный тензор поворота главных осей тензора $\mathbf{V}$, $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{e}}_i(0) = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{e}}_i$ при $s = 0$. Находим $\mathbf{O}_\mathbf{V} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi)(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2) + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi - \sin\varphi)(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2) + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_3$ или

$$\mathbf{O}_\mathbf{V} = \cos O_V(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2) + \sin O_V(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2) + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_3, \tag{8}$$

где O_V – угол. Аналогично определяется $\mathbf{O}_\mathbf{U}$ – ортогональный тензор поворота главных осей $\mathbf{U}$. Справедливы соотношения $\mathbf{O}_\mathbf{U} = \mathbf{O}_\mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^\mathbf{T}$, $\mathbf{\Omega}_\mathbf{V} = \dot{\mathbf{O}}_\mathbf{V}^\mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_\mathbf{V} = -\dot{\varphi}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1) = \dfrac{\dot{s}}{s^2+4}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$,

$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_\mathbf{V} - \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{\Omega}_\mathbf{U} \cdot \mathbf{O}$, $\mathbf{\Omega}_\mathbf{U} = -\mathbf{\Omega}_\mathbf{V}$, где $\mathbf{\Omega}_\mathbf{U} = \dot{\mathbf{O}}_\mathbf{U}^\mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_\mathbf{U}$ [1].

Используем обычные обозначения: индексы e, p сверху относятся к упругой и пластической деформациям. Тензоры, связанные с общей деформацией, записываем без индексов. Например, тензоры поворотов запишутся $\mathbf{O}$, $\mathbf{O}^e$, $\mathbf{O}^p$, $\mathbf{O}_\mathbf{V}$, $\mathbf{O}_\mathbf{V}^e$, $\mathbf{O}_\mathbf{V}^p$, $\mathbf{O}_\mathbf{U}$, $\mathbf{O}_\mathbf{U}^e$, $\mathbf{O}_\mathbf{U}^p$, а соответствующие углы удобно обозначать по (8): O, O^e, O^p, O_V, O_V^e, O_V^p, O_U, O_U^e, O_U^p. Имеют место соотношения $\mathbf{O}^p = (\mathbf{O}_\mathbf{U}^p)^\mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_\mathbf{V}^p$, $\mathbf{O}^e = (\mathbf{O}_\mathbf{U}^e)^\mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_\mathbf{V}^e$, $\mathbf{V}^p = (\mathbf{O}^p)^\mathbf{T} \cdot \mathbf{U}^p \cdot \mathbf{O}^p$, $\mathbf{V}^e = (\mathbf{O}^e)^\mathbf{T} \cdot \mathbf{U}^e \cdot \mathbf{O}^e$.

Определим $\mathbf{\Omega}^e$ в активном процессе. Рассмотрим случай $\mathbf{\Omega} \neq 0$. Обозначим максимальное число ступенек M. Положим

$$\mathbf{\Omega}^e = \mathbf{\Omega}(1-x) + \mathbf{\Omega}_\mathbf{V} x, \tag{9}$$

где $x = \left(\dfrac{M-j}{M-1}\right)^y$, j – номер ступеньки, на которой находится точка процесса. В результате численных экспериментов определен $y = 0,435$. Конец траектории простого сдвига при $s = \infty$ соответствует выходу точки процесса в пространстве девиаторов напряжений на ось Y_2. Найдено $\displaystyle\int_{s_0}^{\infty} \frac{2ds}{s^2+4} = \pi - 2\,\mathrm{arctg}\frac{s_0}{2} \approx 2,088^\circ$ – приращение угла между осью OY_2 и отрезком, который соединяет точку с началом координат при s, изменяющемся от s_0 до ∞. Значение параметра сдвига $s_0 = 219,5$ соответствует выходу точки процесса на последнюю ступеньку с номером M.

При повороте актуальной конфигурации $\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}_\mathbf{V}$ изменяются по закону $\mathbf{\Omega}^{(t)} = \mathbf{O}_t^\mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{O}_t + \mathbf{\Omega}_t$, где $\mathbf{O}_t$ – жесткий поворот, а $\mathbf{\Omega}_t$ – его спин [1]. Следовательно, так же изменяется спин $\mathbf{\Omega}^e$ (9). Это обеспечивает объективность уравнений. Возможность использования вариационного принципа требует замены спина, например, на

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} + \kappa(\mathrm{dev}\,\mathbf{T} \cdot\cdot\, \mathrm{dev}\,\mathbf{T})^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{D} \cdot \mathrm{dev}\,\mathbf{T} - \mathrm{dev}\,\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}).$$

Из (9) определим $\kappa = \left(1 - \dfrac{2(2-x)}{s^2+4}\right) \dfrac{\sqrt{\mathrm{dev}\,\mathbf{T} \cdot\cdot\, \mathrm{dev}\,\mathbf{T}}}{\mathbf{c}_1 \cdot \mathrm{dev}\,\mathbf{T} \cdot \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 \cdot \mathrm{dev}\,\mathbf{T} \cdot \mathbf{c}_2}$. Проверим потенциальность:

$$(\operatorname{dev}\mathbf{T}\cdot(\mathbf{\Omega}^e-\mathbf{W})-(\mathbf{\Omega}^e-\mathbf{W})\cdot\operatorname{dev}\mathbf{T})\cdot\cdot\,\delta\mathbf{D}=\delta(\kappa(\operatorname{dev}\mathbf{T}\cdot\cdot\operatorname{dev}\mathbf{T})^{-\frac{1}{2}}((\operatorname{dev}\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D})^2-(\operatorname{dev}\mathbf{T})^2\cdot\cdot\mathbf{D}^2)).$$

Если $\mathbf{\Omega}=0$, то полагаем $\mathbf{\Omega}^e=\mathbf{\Omega}$ при $\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}-\mathbf{U}\cdot\dot{\mathbf{U}}=0$ и $\mathbf{\Omega}^e=\mathbf{W}$ при $\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}-\mathbf{U}\cdot\dot{\mathbf{U}}\neq 0$.

Разгрузка проводилась при небольшом значении параметра сдвига $s=1,979375$. Из разложения (2) определялись $\mathbf{R}_1(\tau)=0,866\mathbf{c}_1+0,498\mathbf{c}_2, \mathbf{R}_2(\tau)=1,215\mathbf{c}_2+1,853\mathbf{c}_2, \mathbf{R}_3(\tau)==1,000015\mathbf{c}_3$; $\mathbf{R}(\tau)=q^1\mathbf{R}_1(\tau)+q^2\mathbf{R}_2(\tau)+q^3\mathbf{R}_3(\tau)$. При полной разгрузке процесс выходит за рамки плоской деформации. Надо приложить малое растяжение по третьей оси в зависимости от q^3. Повернутые базисные векторы запишутся как $\mathbf{O}\cdot\mathbf{R}_1(\tau)=0,992946\mathbf{c}_1\approx\mathbf{R}_1$; $\mathbf{O}\cdot\mathbf{R}_2(\tau)= =1,976514\mathbf{c}_1+1,000791\mathbf{c}_2\approx\mathbf{R}_2$. Из этого следует, что актуальная и разгрузочная конфигурации оказались близки с точностью до большого упругого поворота.

При численном моделировании принимались определяющие соотношения (4)–(7) и (9). Использованы данные, полученные при базовых экспериментах. Разработан комплекс программ для расчета и визуализации процесса простого сдвига. Картина процесса показана на рис. 2–4. Актуальная и повернутая разгрузочная конфигурации на рис. 2 очень близки. Траектория процесса на рис. 3, *а* в пространстве девиаторов на самом деле трехзвенная: при активном процессе имеется два звена, одно из них есть регулярный путь, который мал и на рисунке не виден. Третье звено образует путь при пассивном процессе. Небольшой отросток в начале координат представляет траекторию тензора остаточных напряжений, который является девиатором. Рис. 3, *б* подтверждает физически правильные результаты расчета напряжений [1]. Распространенное мнение о близости общих и пластических деформаций в нелинейной теории ошибочно вследствие учета поворотов, которыми линейная теория пренебрегает (рис. 4, *а*). Тензоры $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}^p$ в данном примере практически совпадают. На рис. 4, *б* представлены зависимости углов введенных выше ортогональных тензоров в соответствии с обозначением (8).

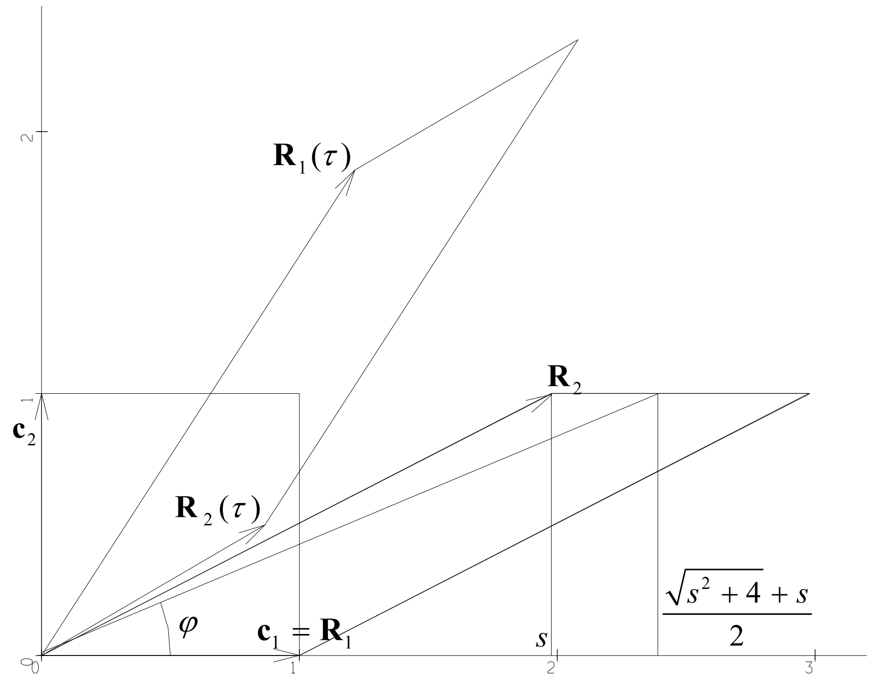
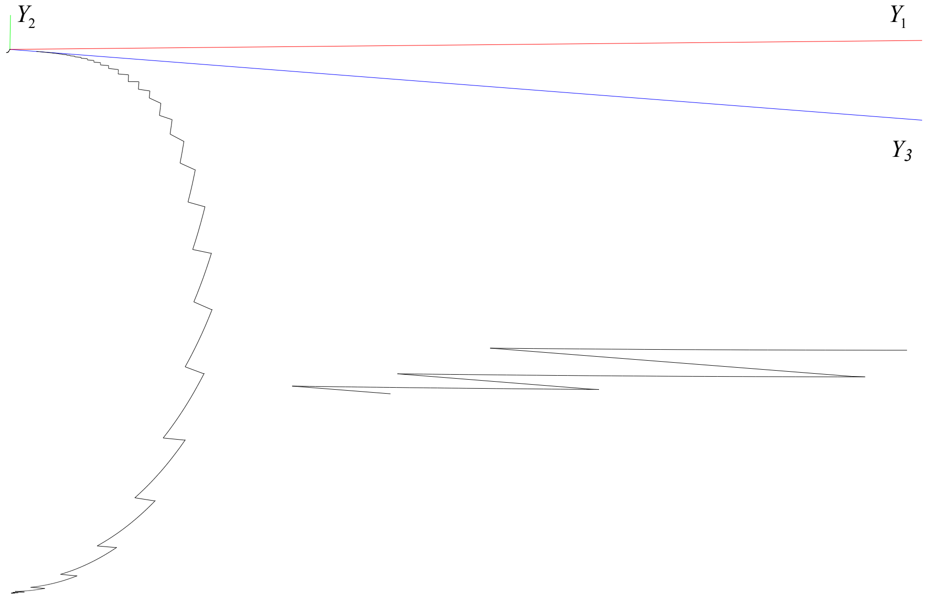
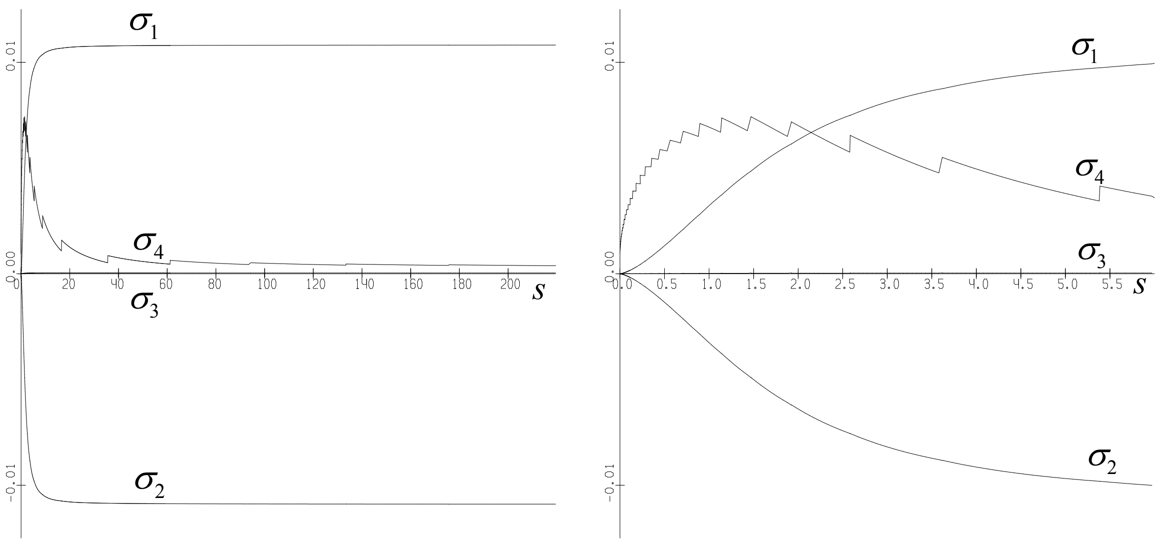


Рис. 2. Начальная, актуальная (в момент начала разгрузки), разгрузочная и повернутая разгрузочная конфигурации

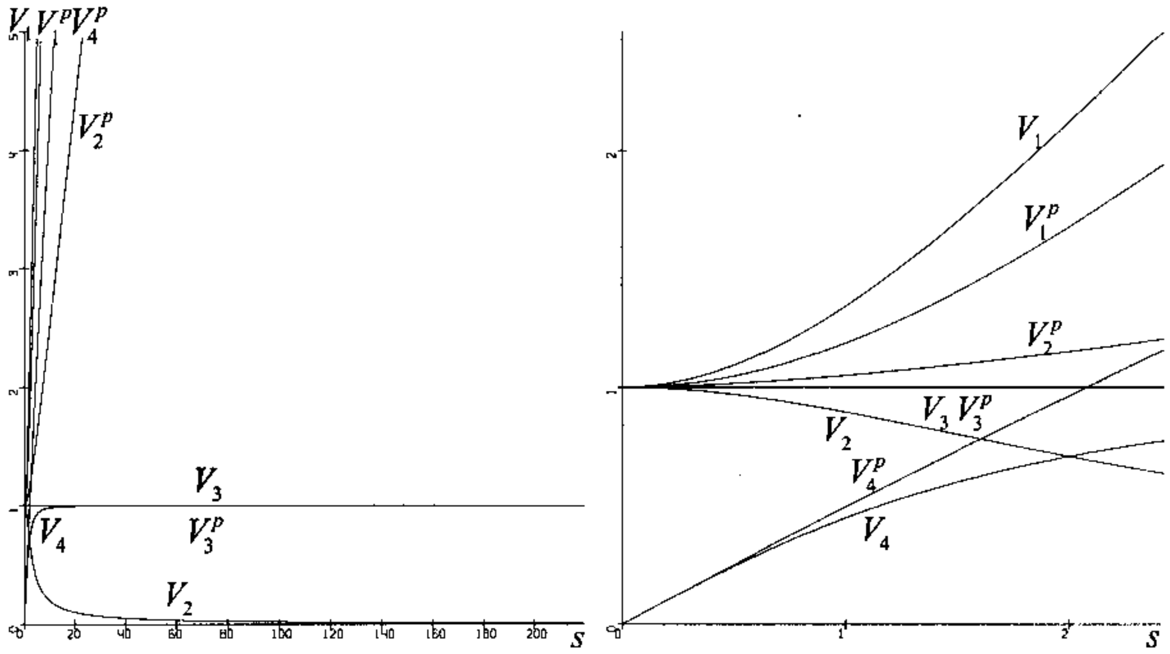


а)

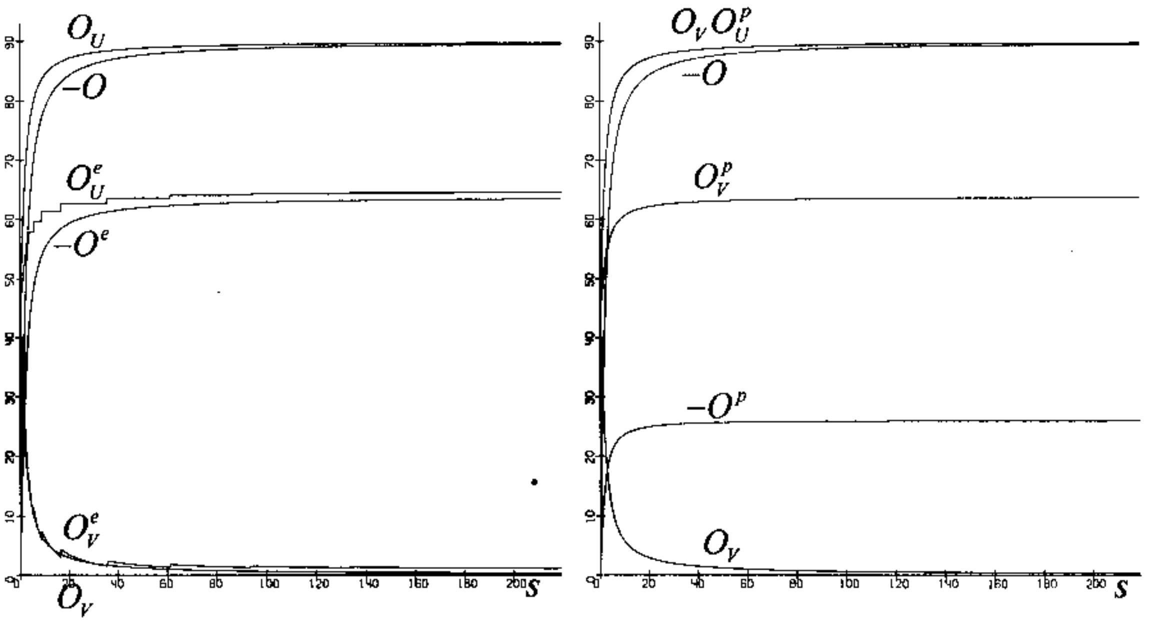


б)

Рис. 3. Пример простого сдвига: *а)* траектория точки процесса $\mathrm{dev}\mathbf{T} = Y_1\mathbf{W}_1 + Y_2\mathbf{W}_2 + Y_3\mathbf{W}_3$ в пространстве девиаторов и последний участок траектории; *б)* компоненты тензора напряжений Коши $\mathbf{T} = \sigma_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + \sigma_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + \sigma_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 + \sigma_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$



а)



б)

Рис. 4. Пример простого сдвига: *а)* компоненты тензоров $\mathbf{V} = V_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + V_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + V_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 + V_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$ и $\mathbf{V}^p = V_1^p\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + V_2^p\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + V_3^p\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 + V_4^p(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$; *б)* углы тензоров поворотов, град.

Заключение

Результаты численного моделирования базовых экспериментов и процесса простого сдвига для принятых определяющих уравнений можно считать удовлетворительными. Далее следует использовать более общее соотношение (3), включив в рассмотрение и анизотропные скалярные структуры второго порядка. Надо уточнить вид определяющих уравнений при (A_2) для учета эффекта Баушингера и разработать методику включения его в теорию.

Список литературы

1. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986.
2. Naghdi P.M. A Critical review of the state of finite plasticity // Journal of applied mathematics and physics. –1990. – Vol. 41. – № 3. – P. 315–394.
3. Murnagan F.D. Finite deformation of an elastic solid. – N.-Y.: Dover, 1967.
4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980.
5. Клюшников В.Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. – М.: МГУ, 1994.
6. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. II. Конечные деформации. – М.: Наука, 1984.
7. Ибрагимов В.А., Махнач В.И., Швед О.Л. О вариационном принципе в теории пластичности с конечными деформациями // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-тэхн. навук. – 1997. – № 4. – С. 110–114.
8. Махнач В.И., Швед О.Л. Начальное условие пластичности при конечных деформациях // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 2003. – № 3. – С. 95–99.
9. Махнач В.И., Швед О.Л. К определению упругой деформации при нагрузке // Технологии Физтеха. – Мн.: ФТИ НАН Беларуси, 2004. – Т. 2. – С. 126 – 138.
10. Надои А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Мир, 1954.

Поступила 12.10.04

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail:mahnach@newman.bas-net.by

W.I. Mahnach, O.L. Shwed

NUMERICAL MODELING OF BIG DEFORMATIONS AND ROTATIONS OF THE ELASTO-PLASTIC MEDIUM

The allowable determinative relations have been suggested. Numerical-basic experiments – single-axis stretching and compression have been executed for cooper with application of the known diagrams σ~ε, the functions and parameters of the theory have been calculated. The model example of simple shift has been considered.