ИНФОРМАТИКА
2006 октябрь-декабрь № 4

УДК 539.3

О.Л. Швед

ОБ УЧЕТЕ ЭФФЕКТА БАУШИНГЕРА В МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

На основе экспериментальных данных получены соотношения для приближенного нахождения величины эффекта Баушингера. С ее помощью однозначно определяется девиаторное сечение поверхности текучести согласно принципу сохранения потенциальной природы упругой деформации при активном нагружении. В сингулярной точке поверхности девиатор, выражающий направление действия пластической деформации в пространстве напряжений, находится из условия максимального удовлетворения эффекта Баушингера. Неоднозначность выбора девиатора устраняется привлечением принципа максимума Мизеса.

Введение

В теории пластичности, использующей понятие поверхности нагружения (текучести), существует проблема описания эволюции поверхности текучести, связанной с упрочнением и ростом анизотропии среды [1]. Основные достоверные экспериментальные данные, накладывающие ограничение на расположение мгновенной поверхности текучести, выражаются эффектом Баушингера, отчетливо проявляющимся для металлов и сплавов. Нагружение элемента среды в каком-либо направлении в пространстве напряжений уменьшает предел текучести при нагружении его в противоположном направлении. Этот факт впервые был обнаружен в 1886 г. Баушингером для пути нагружения «растяжение – сжатие» [2]. Однако нахождение мгновенной поверхности методами экспериментальной механики принципиально затруднено. Это выражается в существовании противоречащих друг другу данных [1]. Одна из причин такой ситуации указана в работе [3] и состоит в необходимости использования экспериментатором конкретных определяющих уравнений, выбор которых произволен. Возможный выход из положения состоит в том, что эксперимент должен включаться в теорию чем позже, тем лучше [4]. Основная информация о поверхности текучести должна быть получена из обоснованных теоретических соображений и дополнена по возможности только достоверными экспериментальными данными. Такой подход реализован в работе [5]. Точка процесса для элемента среды в пространстве напряжений, находящаяся в регулярной точке поверхности текучести, определяет только половину девиаторного сечения S поверхности нагружения. Включение эффекта Баушингера в теорию позволяет найти и вторую его половину. Точка процесса, расположенная в сингулярной точке, определяет все сечение, но неопределенность в выборе девиатора $\mathbf{N}$, задающего направление действия пластической деформации в пространстве напряжений, дает возможность учета обсуждаемого эффекта.

1. Вычисление величины эффекта Баушингера

Обозначим $\mathbf{T}$ девиатор напряжений Коши, $\mathbf{B}$ – девиатор тензора остаточных напряжений [5, 6]. Отметим, что тензор $\mathbf{B}$ всегда является достаточно малым. Следуя работе [2], определим E – величину эффекта Баушингера. Пусть точка процесса в пространстве девиаторов напряжений находится на поверхности текучести и имеет значение $\mathbf{T}=\mathbf{T}_1$. Перемещение $\mathbf{T}$ в направлении девиатора $\mathbf{B}-\mathbf{T}_1$ означает разгрузку и при $\mathbf{T}=\mathbf{B}$ полную разгрузку элемента среды с точностью до упругого поворота. Дальнейшее перемещение при $\mathbf{T}=\mathbf{T}_2$ приводит к повторному выходу точки процесса на поверхность текучести и возможному началу активного процесса нагружения. По определению считаем, что

$$E=E(\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathbf{B})=\sqrt{(\mathbf{T}_2-\mathbf{B})\cdot\cdot(\mathbf{T}_2-\mathbf{B})}\left(\sqrt{(\mathbf{T}_1-\mathbf{B})\cdot\cdot(\mathbf{T}_1-\mathbf{B})}\right)^{-1}, \quad (1)$$

где двумя точками обозначается двойное скалярное произведение тензоров [4].

Воспользуемся данными работ [2, 7]. Эксперименты в них проводились по геометрически линейной теории, поэтому там считалось, что $\mathbf{B}=0$. Другая особенность нелинейной теории состоит в том, что нулевое значение параметра Лоде в точке поверхности текучести, исключая состояние изотропии, не является характеристикой ее сингулярности. Необходимо ввести другую характеристику $\lambda -$ меру удаленности от сингулярной точки $(0\le\lambda\le 1)$. Ограничимся случаем двухмерного напряженно-деформированного состояния. В сечении поверхности текучести в пространстве девиаторов плоскостью, проходящей через $\mathbf{T}$ ортогонально базисным девиаторам $\mathbf{W}_2,\mathbf{W}_3$, получается кривая пластичности [5]. Точка $\mathbf{T}$ располагается на одном из регулярных участков кривой. Определим λ как отношение расстояний от рассматриваемой точки до ближайшей сингулярной точки по кривой к половине длины участка кривой. Например, соотношение $\lambda=0$ означает, что $\mathbf{T}$ находится в сингулярной точке, и $\lambda=1$, что $\mathbf{T}$ находится в центре регулярного участка.

Предполагаем, что первоначально материал является изотропным. Будем учитывать три основных эксперимента на путях «растяжение – сжатие», «сжатие – растяжение», «чистый сдвиг – чистый сдвиг». Кривые зависимостей $E \sim \varepsilon$ ($\varepsilon -$ величина пластической деформации) близки к параболическим. Величина эффекта Баушингера уменьшается от начальной до некоторого значения на пороге насыщения, соответствующего $2-3\,\%$ деформации, и далее остается постоянной. Их значения для указанных путей нагружений зависят от материала и составляют примерно 0,8 , 0,7 , 0,4. В работе [5] введены функционалы процесса – параметры упрочнения типа Р. Шмидта χ^+ (при растяжении), χ^- (при сжатии), для которых можно установить соответствие с деформацией ε. Обозначим параметр упрочнения при чистом сдвиге χ ($\chi=\chi^+=\chi^-$); $\chi_n^+,\chi_n^-,\chi_n -$ значения параметров упрочнения на пороге насыщения. Рассмотрим расширенное трехмерное пространство параметров (χ^+,χ^-,λ), где $(\chi^+\ge 0,\chi^-\ge 0, 0\le\lambda\le 1)$. При значениях $\chi^+=\chi^-=0$ величина эффекта Баушингера на первом пути снимается с кривой пластичности. Обозначим ее $g(\lambda)$, тогда на втором пути она составляет $g^{-1}(\lambda)$. Для упрощения, поскольку для большинства материалов $g\approx 1$, полагаем величину эффекта $G=2^{-1}(g+g^{-1})$. На лучах $(\chi^+,0,1)$, $(0,\chi^-,1)$, $(\chi,\chi,0)$ известны экспериментальные значения E, которые обозначим E^+,E^-,E^0. Они позволяют линейно интерполировать функционал процесса E сначала на плоскую поверхность, содержащую первый и второй лучи, линейчатые поверхности, на которых лежат соответственно первый и третий, второй и третий лучи, а затем и на все пространство параметров. Несложно получаются следующие соотношения:

$$E=E(\chi^+,\chi^-,\lambda)=\begin{cases} G, & \text{åñëè} \quad (\chi^+)^2+(\chi^-)^2=0;\\ E^{+-}, & \text{åñëè} \quad ((\chi^+)^2+(\chi^-)^2\ne 0)\wedge(\lambda=1);\\ E^{+-}+(E^{00}-E^{+-})(\lambda-1)(\lambda_0-1)^{-1}, & \text{åñëè} \quad ((\chi^+)^2+(\chi^-)^2\ne 0)\wedge(\lambda\ne 1); \end{cases} \quad (2)$$

$$E^{+-}=E^-(\chi^-)+(E^+(\chi^+)-E^-(\chi^-))\chi_n^-\chi^+(\chi_n^-\chi^++\chi_n^+\chi^-)^{-1};$$

$$E^{00}=E^0(x)+(f(E^-(y),E^+(y),\chi^--\chi^+)-E^0(x))\sqrt{(x-\chi^+)^2+(x-\chi^-)^2+\lambda^2}\left(\sqrt{x^2+(x-y)^2+1}\right)^{-1};$$

$$x=-f(\chi^+,\chi^-,\chi^--\chi^+)(\lambda-1)^{-1},\; y=xf(\chi_n^-,\chi_n^+,\chi^--\chi^+)(\chi_n)^{-1};$$

$$\lambda_0=\chi_n\left|\chi^--\chi^+\right|\left(\chi_n\left|\chi^--\chi^+\right|+f(\chi^+,\chi^-,\chi^--\chi^+)f(\chi_n^-,\chi_n^+\chi^--\chi^+)\right)^{-1},$$

где $f(\alpha,\beta,\gamma)=2^{-1}(\alpha(1+sign(\gamma))+\beta(1-sign(\gamma)))$.

Выписанные соотношения (2) являются, конечно, лишь первым приближением искомой величины. При знакопеременных нагружениях, например, эффект Баушингера выражен менее резко (см. данные о циклических нагружениях [2]).

2. Определение девиаторного сечения поверхности текучести по известной величине эффекта Баушингера

Девиаторное сечение S поверхности текучести определяется на основе принципа сохранения потенциальной природы упругой деформации при активном нагружении. В начале процесса поверхность S известна и является поверхностью вращения кривой пластичности [5]. Квазистатический процесс нагружения в модели описывается малыми шагами по времени. Поэтому необходимо знать положение S после шага. При активном нагружении возможны два исключающих друг друга случая. Второй заключается в том, что точка процесса находилась в начале шага в сингулярной точке S и осталась там же. Рассмотрим кратко оба случая.

1. Девиатор $\mathbf{N}$ известен, это либо $\mathbf{N}^+$ на S^+, либо $\mathbf{N}^-$ на S^- ($\mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{N}=1$). Поверхности S^+, S^- отвечают за растяжение и сжатие. Девиаторное сечение S образуется из двух половинок S^+, S^-. После шага тензор $\mathbf{N}$ изменяется и надо найти новую сингулярную точку на кривой пластичности. Поиск ее можно проводить итерационно. В качестве начальной допустимой точки выбирается ближняя точка к бывшей сингулярной точке при движении из $\mathbf{T}_1$ по кривой пластичности. Дальше определяется параметр λ. Вычисляется значение $E_1 = E(\chi^+, \chi^-, \lambda)$ по выражению (2). Находится величина $E_2 = E(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{B})$ по (1). Определение $\mathbf{T}_2$ приводится численным методом. Расчетная точка перемещается из точки $\mathbf{T}_1$ по поверхности S до выхода в точку $\mathbf{T}_2$. Истинная сингулярная точка определяется из условия минимальности величины $|E_1 - E_2|$.

2. В сингулярной точке поверхности S в начале шага существуют два девиатора $\mathbf{N}^+, \mathbf{N}^-$, ортогональных регулярным участкам в рассматриваемой точке $\mathbf{T}$. Для выполнения шага необходимо знать девиатор $\mathbf{N}$ ($\mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{N}=1$). Допустимое его представление можно записать в виде $\mathbf{N} = \cos\varphi\mathbf{N}^+ + \sin\varphi\mathbf{N}^-(0 \le \varphi \le \pi 2^{-1})$. После шага вычисляются величины E_1 по (2) и $E_2 = E(\varphi)$ по (1). Истинное значение φ выбирается из условия, что величина $|E_1 - E_2|$ минимальная. Если таких значений окажется более одного, то выбирается такое φ, для которого величина удельной диссипативной функции максимальная. Здесь используется принцип максимума Мизеса в нелинейной формулировке.

Изложенная расчетная схема проста, но достаточно трудоемка. В нелинейной теории подобные трудности естественны и появляются уже в упругости [4]. Следует отметить, что численное описание поверхности S, особенно для трехмерного напряженно-деформированного состояния, является громоздким и сложным.

Добавим, что в случае скачка поверхности (второй этап упрочнения), если точка процесса находится в регулярной точке S, определение девиаторного сечения производится аналогично случаю 1. Первым этапом можно считать трансформацию упругого закона при активном нагружении. Этапы следуют попеременно. Если считать, что точка процесса, находящаяся в сингулярной точке S, там же и остается, то тогда учесть эффект Баушингера затруднительно.

Заключение

В работе получено начальное приближение величины эффекта Баушингера на основе трех экспериментов «растяжение – сжатие», «сжатие – растяжение», «чистый сдвиг – чистый сдвиг». Возможно его уточнение, но необходимы дополнительные эксперименты, ориентированные на нелинейную теорию [5]. Следует учитывать и влияние временных эффектов в экспериментах [1]. С помощью величины эффекта Баушингера полностью доопределяется девиаторное сечение поверхности текучести, что позволяет использовать рассматриваемую модель среды для расчета упругопластического процесса при любых нагружениях. Поверхность нагружения можно считать цилиндрической, и она определяется своим девиаторным сечением.

Предложенный способ учета эффекта Баушингера является новым и альтернативным популярному методу трансляционно-кинематического упрочнения [1]. Теоретический резерв введения кинематического центра, называемого тензором внутренних напряжений или микронапряжений, следует задействовать при обобщении модели для включения в рассмотрение скорости процесса нагружения. Напомним, что рассматриваемая среда нечувствительна к скорости процесса и время здесь вводится только для удобства пошагового описания.

Список литературы

1. Васин, Р.А. Определяющие соотношения теории пластичности / Р.А. Васин // Итоги науки и техники. Сер. мех. дефор. тверд. тела. – М.: ВИНИТИ, 1990. – С. 3 –75, 198.

2. Латыпов, Г.Б. Пластичность и прочность стали при сложном нагружении / Г.Б. Латыпов. – Л.: ЛГУ, 1968. – 240 с.

3. Клюшников, В.Д. Математическая теория пластичности / В.Д. Клюшников. – М.: МГУ, 1979. – 208 с.

4. Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 517 с.

5. Швед, О.Л. К теории упругопластичности при конечных упругих деформациях и поворотах / О.Л. Швед // Даклады НАН Беларусі. – 2005. – Т. 49. – № 3. – С. 45–48.

6. Murnagan, F.D. Finite deformation of an elastic solid / F.D. Murnagan. – N-Y: Dover, 1967. –140 p.

7. Надои, А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надои. – М.: ИЛ, 1964. – 610 с.

Поступила 24.08.06

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6

O.L. Shwed

ON THE BAUSHINGER EFFECT IN ELASTO-PLASTIC MEDIUM MODEL

The relationships have been obtained for approximate finding the Baushinger effect value on the base of experimental data. Its application ensures the unambiguous determination of the fluidity surface deviator section in correspondence with the elastic deformation potential nature preservation principle in conditions of active loading. The deviator expressing the elastic deformation action direction is found in the surface singular point from the condition of the Baushinger effect maximal satisfaction. The deviator selection ambiguity is eliminated using Mizes maximum principle.