

УДК 539.3

О.Л. Швед

ГЛАВНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ В МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Показывается, что при развитой анизотропии среды можно определить девиаторное сечение предельной поверхности на основе принципа сохранения потенциальной природы упругой деформации в активном процессе. С использованием средств символьных вычислений системы Mathcad получены достаточные для этого ограничения на анизотропные структуры обобщенного упругого закона.

Введение

В настоящей работе рассматривается идеальная среда, нечувствительная к скорости процесса нагружения [1]. Влияние временных (реологических) эффектов полностью исключается. Среда не различает мягкое и жесткое нагружения, реализуется механизм упругопластичности, практически наблюдаемый при мягком нагружении металлических образцов с постоянной скоростью изменения нагрузки в виде эффекта Савара [2]. Данная модель является обобщением классической геометрически нелинейной модели простой упругой среды [3, 4]. При этом, как правило, утрачивает смысл понятие отсчетно-разгрузочной конфигурации, но всегда определяются ее основной и взаимный векторные базисы. Однозначно определяются сомножители в мультипликативном разложении Кренера – Ли градиента общей деформации, которым можно придать смысл градиентов упругой и пластической деформации. Определяющее уравнение среды в конечном виде (обобщенный упругий закон) принимается в форме закона упругости Мурнагана с привлечением анизотропных структур первого и второго порядка и заменой в нем градиента общей деформации на градиент упругой деформации. Определяющее уравнение в дифференциальном виде в скоростях напряжений записывается с помощью девиатора \mathbf{N} , который при векторной интерпретации тензора является нормалью к девиаторному сечению предельной поверхности в регулярной ее точке.

В статье показывается возможность простого определения указанного девиатора в условиях развитой анизотропии. Он выбирается из двух девиаторов главных потенциальных направлений, входящих в состав пяти девиаторов потенциальных направлений. Само понятие потенциального направления в рассматриваемой модели возникает из условия сохранения потенциальной природы упругой деформации в активном процессе в рамках классической концепции предельной поверхности, вводимой для описания пластической (необратимой) деформации. Потенциальная природа упругой (обратимой) деформации заключается в существовании потенциала напряжений (удельной потенциальной энергии деформации e) и потенциала скоростей напряжений. Второе свойство автоматически выполняется в упругом теле и, значит, должно, как и первое, сохраняться для обобщенного закона упругости в скоростях.

1. Девиаторы потенциальных направлений

Согласно концепции предельной поверхности для элемента среды в пространстве напряжений Коши существует поверхность P , ограничивающая область упругих состояний. Девиаторное сечение S предельной поверхности P практически не зависит от первого инварианта тензора напряжений [2]. В аддитивном разложении тензора напряжений \mathbf{T} на шаровую и девиаторную части для пластичности важен девиатор $\text{dev } \mathbf{T}$ – тензор с нулевым первым инвариантом. Если точка процесса в пространстве девиаторов, соответствующая элементу среды, находится либо внутри S , либо на поверхности S и покидает ее, ограничение является пассивным и тогда процесс называется пассивным. Происходит только упругая де-

формация. Если точка процесса находится на поверхности S и остается там, то ограничение становится активным и говорят, что реализуется активный процесс. В активном процессе среда предполагается несжимаемой, следовательно, тензор деформации скорости \mathbf{D} является девиатором. Происходят упругая и пластическая деформации, трансформация обобщенного упругого закона, вызванная изменением параметров анизотропии и появлением тензора остаточных напряжений (при изотропии эти величины были ненулевыми). Точка процесса в пространстве напряжений может двигаться только в пространстве девиаторов ортогонально девиатору \mathbf{N} , который нормируется: $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$.

Вычислим формально \mathbf{Q} – объективную производную девиатора тензора напряжений в законе Мурнагана по правилам нелинейной упругости [1, 4]. По построению выражение $\mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{D}$ является потенциальным, т. е. существует потенциал – скаляр $\varphi = \varphi(\mathbf{D})$, такой, что $\delta \varphi = \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{D}$ ($\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{Q}$), где $\delta \mathbf{D}$ – вариация \mathbf{D} ; $\delta \varphi$ – вариация φ по \mathbf{D} [4]. Кроме того, девиатор $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$ будет линеен по компонентам \mathbf{D} . Линейность определяющих уравнений по скоростям перемещений исключает влияние реологических эффектов [5]. Поскольку скорость напряжений записывается как $\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N}$ и должна иметь потенциал, то приходим к следующему определению девиатора потенциального направления. Девиатор \mathbf{N} будем называть девиатором потенциального направления, если выражение $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{D}$ потенциально.

Введем векторное представление девиатора. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – исходный ортонормированный триэдр. Любой девиатор \mathbf{N} симметричного тензора можно записать в виде

$$\mathbf{N} = n_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - (n_1 + n_2) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + n_3 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + n_4 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) + n_5 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2). \quad (1)$$

Линейные комбинации базисных диад $\mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - 2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3)$, $\mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1} (-\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2)$, $\mathbf{W}_3 = (\sqrt{2})^{-1} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)$, $\mathbf{W}_4 = (\sqrt{2})^{-1} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1)$, $\mathbf{W}_5 = (\sqrt{2})^{-1} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2)$ ($\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{W}_j = 0 (i \neq j)$, $\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{W}_i = 1$) образуют ортонормированный базис пространства девиаторов симметричных тензоров:

$$\mathbf{N} = w_1 \mathbf{W}_1 + w_2 \mathbf{W}_2 + w_3 \mathbf{W}_3 + w_4 \mathbf{W}_4 + w_5 \mathbf{W}_5, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} n_1 &= (\sqrt{6})^{-1} w_1 - (\sqrt{2})^{-1} w_2, \quad n_2 = (\sqrt{6})^{-1} w_1 + (\sqrt{2})^{-1} w_2, \quad n_3 = (\sqrt{2})^{-1} w_3, \quad n_4 = (\sqrt{2})^{-1} w_4, \quad n_5 = (\sqrt{2})^{-1} w_5; \\ w_1 &= 2^{-1} (\sqrt{6})(n_2 + n_1), \quad w_2 = 2^{-1} (\sqrt{2})(n_2 - n_1), \quad w_3 = \sqrt{2} n_3, \quad w_4 = \sqrt{2} n_4, \quad w_5 = \sqrt{2} n_5. \end{aligned} \quad (3)$$

Тензорное пространство девиаторов можно интерпретировать как пятимерное векторное пространство $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$, и скалярное произведение здесь вводится как двойное скалярное произведение тензоров, обозначаемое двумя точками. Соотношение (2) будем называть векторным представлением девиатора \mathbf{N} . Оно связано с обычным тензорным представлением (1) зависимостями (3). Отметим, что вне векторной трактовки тензора остается скалярное произведение девиаторов, например $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N}^2$, и понятие третьего инварианта девиатора

$$\begin{aligned} J_3(\mathbf{N}) &= \begin{vmatrix} n_1 & n_3 & n_4 \\ n_3 & n_2 & n_5 \\ n_4 & n_5 & -n_1 - n_2 \end{vmatrix} = 3^{-1} (\sqrt{6})^{-1} (3w_2^2 - w_1^2) w_1 + (\sqrt{6})^{-1} w_1 w_3^2 - 2^{-1} (\sqrt{6})^{-1} (\sqrt{3} w_2 + w_1) w_4^2 + \\ &+ 2^{-1} (\sqrt{6})^{-1} (\sqrt{3} w_2 - w_1) w_5^2 + 2^{-1} w_3 w_4 w_5. \end{aligned} \end{aligned}$$

Последнее равенство получено с учетом выражения (3). Для второго инварианта имеем $J_2(\mathbf{N}) = -2^{-1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = -2^{-1}$. Так как выполняется $(2^{-1} J_3(\mathbf{N}))^2 + (3^{-1} J_2(\mathbf{N}))^3 \leq 0$ [4], получаем оценку $|J_3(\mathbf{N})| \leq (2\sqrt{6})^{-1}$.

В условиях изотропии среды девиатор \mathbf{N} квадратично зависит от меры упругой деформации Фингера соосной \mathbf{T} и в выражении $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{D}$ имеется только одно непотенциальное слагаемое $\gamma(\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \mathbf{F}^2 \cdot \delta \mathbf{D} - \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{D})$. Из уравнения $\lambda = 0$ определяются два девиатора $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$, которые будем называть главными [6]. Обнаружен не получивший ранее объяснения факт их ортогональности $\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = 0$. По этим девиаторам строится кусочно-гладкая кривая пластичности и поверхность S , которая образуется из поверхностей двух семейств S^+ и S^- , отвечающих за растяжение и сжатие. Необычная форма поверхности (невыпуклость S), очевидно, является следствием малозаметной невыпуклости поверхности уровня e , отмеченной в работе [7]. Первоначально S^+ и S^- разделяются поверхностью $J_3(\text{dev } \mathbf{T}) = 0$, которая изменяется для анизотропной среды. В случае двумерного напряженно-деформированного состояния $w_4 = w_5 = 0$ поверхность S разбивается плоскостью $\{(w_1, w_2, w_3) | w_1 = 0\}$ и конусом $\{(w_1, w_1, w_3) | 3w_2^2 - w_1^2 + w_3^2 = 0\}$ на шесть областей, при переходе через границу которых знак $J_3(\text{dev } \mathbf{T})$ изменяется на противоположный.

Общий алгоритм выбора \mathbf{N} – девиатора нормали к S – состоит в следующем. Девиаторы главных потенциальных $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ ориентируются таким образом, чтобы выполнялись неравенства $\mathbf{N}_1 \cdot \text{dev } \mathbf{T} \geq 0$, $\mathbf{N}_2 \cdot \text{dev } \mathbf{T} \geq 0$. Можно показать, что выполняется неравенство $J_3(\mathbf{N}_1)J_3(\mathbf{N}_2) < 0$. В качестве девиатора нормали к S выбирается $\mathbf{N} = \mathbf{N}_i, J_3(\mathbf{N}_i) > 0$ на S^+ и $\mathbf{N} = \mathbf{N}_i, J_3(\mathbf{N}_i) < 0$ на S^- . В сингулярной точке их будет два – $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$. Например, при одноосном растяжении по второй оси (область S^+ , $\mathbf{T} = t_{22} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, t_{22} > 0$) имеем $\mathbf{N} = 2^{-1} \mathbf{W}_1 + 2^{-1} \sqrt{3} \mathbf{W}_2$, а второй девиатор главного направления будет $2^{-1} \sqrt{3} \mathbf{W}_1 - 2^{-1} \mathbf{W}_2$, он лежит на конусе и, значит, имеет нулевой третий инвариант. При этом $J_3(\mathbf{N})$ будет максимальным $(2\sqrt{6})^{-1}$. Если двигаться по кривой пластичности вправо к сингулярной точке, третьи инварианты обоих девиаторов убывают и в конце будут приблизительно равны по абсолютной величине. Если двигаться влево, ситуация не изменится, только второй девиатор главного направления будет $-2^{-1} \sqrt{3} \mathbf{W}_1 + 2^{-1} \mathbf{W}_2$. Изложенный алгоритм справедлив и для анизотропной среды, но предполагается, что известны девиаторы главных потенциальных направлений. Они выбираются из девиаторов потенциальных направлений.

Перейдем к рассмотрению общего метода отыскания потенциальных направлений в условиях анизотропии. Так как тензор \mathbf{Q} линейно зависит от компонент \mathbf{D} , то существует независящий от \mathbf{D} девиатор $\text{dev } \mathbf{M}$ и выполняется $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}$. Запишем его покомпонентное представление: $\text{dev } \mathbf{M} = m_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - (m_1 + m_2) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + m_3 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + m_4 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) + m_5 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2)$. Компоненты тензоров \mathbf{N} из формулы (1) и $\text{dev } \mathbf{M}$ также связаны линейными соотношениями

$$m_j = \sum_{i=1}^5 a_{ji} n_i \quad (j=1, 2, 3, 4, 5). \quad (4)$$

Можно показать, что коэффициенты a_{ji} являются зависимыми вследствие потенциальности выражения $\mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{D}$: $a_{22} = a_{11} + 2(a_{21} - a_{12}), a_{i2} = a_{2i} + 2^{-1} a_{1i}, a_{i1} = 2^{-1} a_{2i} + a_{1i}, a_{43} = a_{34}, a_{53} = a_{35}, a_{54} = a_{45} (i=3, 4, 5)$. Поэтому удобно ввести независимые свободные параметры, удаляя с диагонали матрицы (a_{ij}) не влияющую на результат величину a_{11} :

$$\begin{aligned} k_1 &= 2^{-1}(a_{12} + a_{21}), k_2 = -2^{-1}(a_{12} - a_{21}), k_3 = 2^{-1}\sqrt{3}(a_{13} + a_{23}), k_4 = -2^{-1}(a_{13} - a_{23}); \\ k_5 &= a_{33} - a_{11}, k_6 = 2^{-1}\sqrt{3}(a_{14} + a_{24}), k_7 = -2^{-1}(a_{14} - a_{24}), k_8 = 2^{-1}\sqrt{3}(a_{15} + a_{25}); \\ k_9 &= -2^{-1}(a_{15} - a_{25}), k_{10} = a_{44} - a_{11}, k_{11} = a_{55} - a_{11}, k_{12} = 3^{-1}a_{34}, k_{13} = 3^{-1}a_{35}, k_{14} = 3^{-1}a_{45}. \end{aligned} \quad (5)$$

Девииатор потенциального направления \mathbf{N} определяем теперь из условия, что выражение $\mathbf{M} \cdot \mathbf{DN} \cdot \delta \mathbf{D}$ является потенциальным. Из определения потенциальности следует, что должны выполняться соотношения $m_i n_j - n_i m_j = 0 (i \neq j)$. Все миноры второго порядка матрицы $\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{pmatrix}$, а следовательно, и матрицы $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix}$ являются нулевыми, где v_i – компоненты в векторном представлении $\text{dev } \mathbf{M} = v_1 \mathbf{W}_1 + v_2 \mathbf{W}_2 + v_3 \mathbf{W}_3 + v_4 \mathbf{W}_4 + v_5 \mathbf{W}_5$, записанном по формуле (2). Векторы $(w_i), (v_i)$ зависимы. Поэтому существует такой скаляр x , что выполняется $\text{dev } \mathbf{M} = x \mathbf{N}$. Верно и обратное: если для некоторого x выполняется $\text{dev } \mathbf{M} = x \mathbf{N}$, то получаем $\text{dev } \mathbf{M} \cdot \mathbf{DN} \cdot \delta \mathbf{D} = x \mathbf{N} \cdot \mathbf{DN} \cdot \delta \mathbf{D} = \delta (x 2^{-1} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{N})^2)$, где \mathbf{N} – девиатор потенциального направления. С учетом соотношений (1)–(5) приходим к задаче нахождения собственных значений и собственных векторов матричного оператора в векторном пространстве:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + 2k_2 & \sqrt{3}k_2 & k_3 & k_6 & k_8 \\ \sqrt{3}k_2 & -k_1 + 2k_2 & k_4 & k_7 & k_9 \\ k_3 & k_4 & k_5 & k_{12} & k_{13} \\ k_6 & k_7 & k_{12} & k_{10} & k_{14} \\ k_8 & k_9 & k_{13} & k_{14} & k_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Матрица в равенстве (6) является симметричной, следовательно, все ее собственные значения – действительные числа. Различным собственным значениям соответствуют попарно ортогональные нормированные собственные векторы (w_i) , по которым выписываются искомые девиаторы потенциальных направлений (2). Таким образом, обнаруженная ранее ортогональность нормалей к регулярным участкам S^+ и S^- в сингулярной точке S не связана с тензорной природой, а является следствием чисто векторных свойств тензора. Вполне вероятно, что за исключением случаев одноосных растяжения и сжатия кратных собственных значений в модели упругопластической среды быть не может. Докажем более слабое утверждение, что собственные значения, соответствующие девиаторам главных потенциальных направлений, различные. Для этого следует определить их значения по характеристическому полиному матрицы в формуле (6). Эту матрицу предварительно желательно упростить.

2. Выбор девиаторов главных потенциальных направлений

При конкретизации соотношений следуем работе [1]. Упрощение достигается специальным выбором исходного триэдра ввиду того, что понятие потенциального направления является тензорно-инвариантным. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – ортонормированные собственные векторы упругой меры Фингера. Значит, имеют место соотношения $\mathbf{F} = f_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + f_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \mathbf{F}^2 = f_1^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + f_2^2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + f_3^2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$. Компонентные представления тензора напряжений Коши и его девиатора имеют вид $\mathbf{T} = t_{11} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + t_{22} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + t_{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + t_{12} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + t_{13} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) + t_{23} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2)$,

$$\operatorname{dev} \mathbf{T} = \tilde{t}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \tilde{t}_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - (\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + t_{12} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + t_{13} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) + t_{23} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2),$$

$$\tilde{t}_1 = t_{11} - 3^{-1}(t_{11} + t_{22} + t_{33}), \tilde{t}_2 = t_{22} - 3^{-1}(t_{11} + t_{22} + t_{33}).$$

Критериальный девиатор в обозначениях работы [1] имеет вид $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2$. Анизотропные структуры второго порядка не учитываются. Девиатор \mathbf{Q}_0 соответствует производной изотропной части и анизотропной структуре первого порядка выражения упругого закона, а девиатор $\mathbf{Q}_2 = W_1(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + W_2(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) + W_3(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2)$ – вихревому члену. Тензором \mathbf{Q}_1 , являющимся частью производной анизотропной структуры второго порядка, пренебрегаем. Согласно равенству $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}$ имеем $\mathbf{M} = \operatorname{dev} \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{N} \cdot \operatorname{dev} \mathbf{T} + 4L_3^{-1}(\varphi_2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{F} + (c_1 \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{N} + d \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{F} + c_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \mathbf{F}^2)$, где L_3 – третий инвариант тензора $\sqrt{\mathbf{F}}$ и $\varphi_1, \varphi_2, c_1, d$ – известные скаляры. Компонентный вклад анизотропных структур обозначим через o_i . Тогда для компонент тензора напряжений получаем $t_1 = 2L_3^{-1}(\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_1^2) + o_1, t_2 = 2L_3^{-1}(\varphi_1 f_2 + \varphi_2 f_2^2) + o_2, t_3 = -t_1 - t_2, t_{12} = o_4, t_{13} = o_5, t_{23} = o_6$.

Уточним вид тензора \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = m_{11} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + m_{22} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + m_{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + m_{12} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + m_{13} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) + m_{23} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2),$$

$$m_{11} = \alpha_1 n_1 + \beta_1 n_2 + \gamma_1 n_3 + \eta_1 n_4 + \zeta_1 n_5, \quad m_{22} = \alpha_2 n_1 + \beta_2 n_2 + \gamma_2 n_3 + \eta_2 n_4 + \zeta_2 n_5,$$

$$m_{33} = \alpha_3 n_1 + \beta_3 n_2 + \gamma_3 n_3 + \eta_3 n_4 + \zeta_3 n_5, \quad m_{12} = \alpha_4 n_1 + \beta_4 n_2 + \gamma_4 n_3 + \eta_4 n_4 + \zeta_4 n_5,$$

$$m_{13} = \alpha_5 n_1 + \beta_5 n_2 + \gamma_5 n_3 + \eta_5 n_4 + \zeta_5 n_5, \quad m_{23} = \alpha_6 n_1 + \beta_6 n_2 + \gamma_6 n_3 + \eta_6 n_4 + \zeta_6 n_5;$$

$$\alpha_1 = 2\tilde{t}_{11} + L_3^{-1}(\varphi_2 f_1^2 + c_1(f_1^2 - f_3^2)f_1 + (f_1 d + c_1 f_1^2)(f_1 - f_3)),$$

$$\beta_1 = 4L_3^{-1}(c_1(f_2^2 - f_3^2)f_1 + (f_1 d + c_1 f_1^2)(f_2 - f_3)), \quad \gamma_1 = 2t_{12}, \quad \eta_1 = 2t_{13}, \quad \zeta_1 = 0;$$

$$\alpha_2 = 4L_3^{-1}(c_1(f_1^2 - f_3^2)f_2 + (f_2 d + c_1 f_2^2)(f_1 - f_3)),$$

$$\beta_2 = 2\tilde{t}_2 + 4L_3^{-1}\varphi_2(f_2^2 + c_1(f_2^2 - f_3^2)f_2 + (f_2 d + c_1 f_2^2)(f_2 - f_3)), \quad \gamma_2 = 2t_{12}, \quad \eta_2 = 0, \quad \zeta_2 = 2t_{23};$$

$$\alpha_3 = 2(\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2) + 4L_3^{-1}(-\varphi_2 f_3^2 + c_1(f_1^2 - f_3^2)f_3 + (f_3 d + c_1 f_3^2)(f_1 - f_3)),$$

$$\beta_3 = 2(\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2) + 4L_3^{-1}(-\varphi_2 f_3^2 + c_1(f_2^2 - f_3^2)f_3 + (f_3 d + c_1 f_3^2)(f_2 - f_3)), \quad \gamma_3 = 0, \quad \eta_3 = 2t_{13}, \quad \zeta_3 = 2t_{23};$$

$$\alpha_4 = t_{12}, \quad \beta_4 = t_{12}, \quad \gamma_4 = \tilde{t}_1 + \tilde{t}_2 + 8L_3^{-1}\varphi_2 f_1 f_2 + W_1, \quad \eta_4 = t_{23}, \quad \zeta_4 = t_{13};$$

$$\alpha_5 = 0, \quad \beta_5 = -t_{13}, \quad \gamma_5 = t_{23}, \quad \eta_5 = -\tilde{t}_2 + 8L_3^{-1}f_1 f_3 + W_2, \quad \zeta_5 = t_{12};$$

$$\alpha_6 = -t_{23}, \quad \beta_6 = 0, \quad \gamma_6 = t_{13}, \quad \eta_6 = t_{12}, \quad \zeta_6 = -\tilde{t}_1 + 8L_3^{-1}f_2 f_3 + W_3.$$

От компонент меры \mathbf{F} переходим к малым величинам – компонентам $\operatorname{dev} \mathbf{F}$ $f_1 = g_1 + y, f_2 = g_2 + y, f_3 = -g_1 - g_2 + y, y = 3^{-1}(f_1 + f_2 + f_3)$.

Далее следует перейти к девиатору тензора \mathbf{M} : $\operatorname{dev} \mathbf{M} = m_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - (m_1 + m_2) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + m_3 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + m_4 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) + m_5 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2)$; $m_j = m_{jj} - 3^{-1}(m_{11} + m_{22} + m_{33})$ ($j = 1, 2, 3$), $m_3 = m_{12}, m_4 = m_{13}, m_5 = m_{23}$.

Коэффициенты в равенстве (4) запишутся в виде $a_{j1} = \alpha_j - 3^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, $a_{j2} = \beta_j - 3^{-1}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$, $a_{j3} = \gamma_j - 3^{-1}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$, $a_{j4} = \eta_j - 3^{-1}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)$, $a_{j5} = \zeta_j - 3^{-1}(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)$ ($j = 1, 2$); $a_{k1} = \alpha_k$, $a_{k2} = \beta_k$, $a_{k3} = \gamma_k$, $a_{k4} = \eta_k$, $a_{k5} = \zeta_k$ ($k = 3, 4, 5$).

Вычисляя значения свободных параметров в формуле (5), обнаруживаем, что имеет место $k_3 = 2\sqrt{3}k_{14}, k_4 = 0, k_7 = \sqrt{3}k_6 = -3k_{13}, k_9 = -\sqrt{3}k_8 = 3k_{12}$.

Характеристический полином матрицы в равенстве (6) упрощается:

$$f(x) = - \begin{vmatrix} k_1 + 2k_2 - x & \sqrt{3}k_2 & 2(\sqrt{3})^{-1}o_4 & -(\sqrt{3})^{-1}o_5 & -(\sqrt{3})^{-1}o_6 \\ \sqrt{3}k_2 & -k_1 + 2k_2 - x & 0 & -o_5 & o_6 \\ 2(\sqrt{3})^{-1}o_4 & 0 & k_5 - x & 3^{-1}o_6 & 3^{-1}o_5 \\ -(\sqrt{3})^{-1}o_5 & -o_5 & 3^{-1}o_6 & k_{10} - x & 3^{-1}o_4 \\ -(\sqrt{3})^{-1}o_6 & o_6 & 3^{-1}o_5 & 3^{-1}o_4 & k_{11} - x \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Оставшиеся параметры запишутся как

$$\begin{aligned} k_1 &= L_3^{-1}(-(g_1 + g_2)(6\varphi_2 y + \varphi_1) + (g_1^2 + 4g_1 g_2 + g_2^2)(8c_1 y + \varphi_2 + 2d)) - o_1 - o_2; \\ k_2 &= L_3^{-1}(3^{-1}(g_2 - g_1)(6\varphi_2 y + \varphi_1) + (g_2^2 - g_1^2)(8c_1 y + \varphi_2 + 2d)) - o_1 + o_2; \\ k_5 &= L_3^{-1}(4\varphi_2 y^2 + g_1(6\varphi_2 y + 3^{-1}\varphi_1) + g_2(14\varphi_2 y + 3^{-1}5\varphi_1)) + 3^{-1}o_1 + 3^{-1}5o_2; \\ k_{10} &= L_3^{-1}(4\varphi_2 y^2 - g_1(4\varphi_2 y + 3^{-1}2\varphi_1) - g_2(6\varphi_2 y + 3^{-1}\varphi_1)) + 3^{-1}o_1 + 3^{-1}5o_2; \\ k_{11} &= L_3^{-1}(4\varphi_2 y^2 - g_1(14\varphi_2 y + 3^{-1}5\varphi_1) + g_2(4\varphi_2 y + 3^{-1}2\varphi_1)) - 3^{-1}5o_1 + 3^{-1}2o_2. \end{aligned}$$

Параметры k_1, k_2 приведены с точностью $\text{dev } \mathbf{F} \cdot \text{dev } \mathbf{F} = 2(g_1^2 + g_1 g_2 + g_2^2)$, а k_5, k_{10}, k_{11} – с точностью $\sqrt{\text{dev } \mathbf{F} \cdot \text{dev } \mathbf{F}}$. Величины W_1, W_2, W_3 (они опущены) войдут соответственно в выражения для k_5, k_{10}, k_{11} и окажутся несущественными для приводимых оценок.

Будем использовать с учетом порядка малости величин $\text{dev } \mathbf{F} \cdot \text{dev } \mathbf{F}$ и $|y - 1|$ приближенные формулы для неопределенных ранее скаляров:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -(2^{-1}\mu + \nu_3) + 4^{-1}3(\lambda - \nu_2 - 4\nu_3)(y - 1), \varphi_2 = 2^{-1}(\mu + \nu_3) + 4^{-1}3(\nu_2 + 2\nu_3)(y - 1); \\ c_1 &= 4^{-1}(\nu_2 + 2\nu_3), d = 4^{-1}(\lambda - 2\nu_2 - 6\nu_3) + 8^{-1}3(\nu_1 - 4\nu_3)(y - 1), \end{aligned} \quad (8)$$

где λ, μ – постоянные Ляме первого и ν_1, ν_2, ν_3 – третьего порядков.

Возьмем постоянные Ляме для сплава D 54 S: $\lambda = 4,91; \mu = 2,6; \nu_1 = -37,9; \nu_2 = -19,8; \nu_3 = -80$ (размерность $\frac{MH}{\text{см}^2}$) [4]. Оценки параметров (8) показывают, что k_1, k_2 – малые величины, а k_5, k_{10}, k_{11} – большие отрицательные и лежат в окрестности числа $-200,4$, соответствующего выражению $4\varphi_2(L_3 = y = 1)$. Для других металлов и сплавов ситуация аналогичная.

В условиях изотропии выполняется $o_i = 0, W_j = 0$ для всех $i = 1, 2, 3, 4, 5, j = 1, 2, 3$. Два больших корня полинома $f(x)$ $x_j = 2k_2 \pm \sqrt{k_1^2 + 3k_2^2}, j = 1, 2$. Им соответствуют собственные векторы, по которым находятся девиаторы главных потенциальных направлений $\mathbf{N}_j = w_1(x_j)\mathbf{W}_1 + w_2(x_j)\mathbf{W}_2$ ($w_1^2(x_j) + w_2^2(x_j) = 1$), такие, что выполняется $(k_1 + 2k_2 - x_j)w_1(x_j) + \sqrt{3}k_2 w_2(x_j) = 0$, если $k_2 \neq 0$ или $k_1 \leq 0$, и $\sqrt{3}k_2 w_1(x_j) + (-k_1 + 2k_2 - x_j)w_2(x_j) = 0$ в противном

случае. Корни будут простые: $|x_2 - x_1| = 2\sqrt{k_1^2 + 3k_2^2} \geq -3^{-1}2L_3^{-1}(6\varphi_2y + \varphi_1) \operatorname{dev} \mathbf{F} \cdot \operatorname{dev} \mathbf{F} > 0$ согласно выражению (8).

По определению в условиях анизотропии девиаторы главных потенциальных направлений выбираются по двум большим собственным значениям характеристического полинома. Покажем, что эти два корня $f(x)$ различные при некоторых ограничениях на анизотропные структуры. Рассмотрим сначала случай подпространства девиаторов. Соотношение (7) запишется в виде

$$f(x) = - \begin{vmatrix} k_1 + 2k_2 - x & \sqrt{3}k_2 & 2(\sqrt{3})^{-1}o_4 \\ \sqrt{3}k_2 & -k_1 + 2k_2 - x & 0 \\ 2(\sqrt{3})^{-1}o_4 & 0 & k_5 - x \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Если положить $o_4 = 0$, то для $k_1 = k_1(o_1, o_2)$, $k_2 = k_2(o_1, o_2)$ следует потребовать

$$Y = \sqrt{k_1^2 + 3k_2^2} \neq 0. \quad (10)$$

Обозначим $x_0 = 2k_2 + Y$ и вычислим значение $f(x_0) = -3^{-1}4(k_1 + Y)o_4^2$. Так как $k_1 + Y \geq 0$, то получаем $f(x_0) \leq 0$. Если имеет место $f(x_0) < 0$, то два больших собственных значения характеристического полинома будут различными. Если выполняется $k_2 = 0, k_1 < 0$ и $f(x_0) = 0$, находим производную функции $f(x)$ в точке x_0 :

$$f' = (2Y(Y + 2k_2) - k_5) - 3^{-1}4o_4^2 = 2k_5k_1 + 4k_1^2 - 3^{-1}4o_4^2.$$

Приходим ко второму ограничению на компоненты o_1, o_2, o_4 :

$$-3k_1k_5 - 3k_1^2 + 2o_4^2 \neq 0 \quad (o_5 = o_6, o_4 \neq 0, k_2 = 0, k_1 < 0). \quad (11)$$

Отметим, что если учитывать вклад от анизотропных структур второго порядка (нуль в матрице (9) надо заменить на k_4 из выражения (6)), то в выражении для $f(x_0)$ получаем дополнительные слагаемые $(k_1 - Y)k_4^2 - 4k_2o_4k_4$ и $f(x_0) = 0$ при условии $2k_2o_4 + (Y - k_1)k_4 = 0$. Вычисляя в точке x_0 производную $f' \neq 0$, получаем обобщающие (11) соотношения

$$\begin{aligned} -3^{-1}4(k_1 + Y)o_4^2 + (k_1 - Y)k_4^2 - 4k_2o_4k_4 &\neq 0(2k_2o_4 + (Y - k_1)k_4 \neq 0); \\ -2Yk_5 + 4k_2Y + 2k_1^2 + 6k_2^2 + 3^{-1}4o_4^2 - k_4^2 &\neq 0(2k_2o_4 + (Y - k_1)k_4 = 0). \end{aligned} \quad (12)$$

Результаты вычислительных экспериментов по определению девиаторного сечения предельной поверхности при различных значениях тензора остаточных напряжений, выполненные в работе [8], показаны на рис. 1.

В пространстве девиаторов получение точных ограничений из-за громоздкости соотношений затруднено. Поэтому, например, неравенство $A \neq 0$ будем понимать в смысле $|A| > \varepsilon$, где ε – малое число. Имеют место три точных неравенства:

$$C_1 = -2k_1 - 2Y \leq 0; C_2 = k_1 - 3k_2 - 2Y \leq 0; C_3 = k_1 + 3k_2 - 2Y \leq 0, \quad (13)$$

где $C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 \neq 0$. Обозначим $c = 4\varphi_2 y^2 L_3^{-1}$. Рассмотрим сначала три частных случая.

1. Выполняется $o_5 = o_6, o_4 \neq 0$. Вычисляем $f(x_0) = 3^{-1}4(9^{-1}o_4^2 - (c - x_0)^2)(Y + k_1)o_4^2$. Из неравенств (13) имеем $f(x_0) < 0$, и если $k_2 = 0, k_1 < 0$, то $f(x_0) = C_1 = 0, Y = -k_1, C_2 = C_3 = -3Y, x_0 = Y > 0$. Находим $f' = (27)^{-1}4(o_4^2 - 9(c - k_1)^2)(-3k_1c - 3k_1^2 + 2o_4^2)$ и приходим к соотношению (11) при замене k_3 на c .

2. Выполняется $o_4 = o_6, o_5 \neq 0$. Находим $f(x_0) = 3^{-1}2(9^{-1}o_5^2 - (c - x_0)^2)(2Y + 3k_2 - k_1)o_5^2$. Также имеет место $f(x_0) < 0$, и если $k_2 = -k_1, k_1 > 0$, то $f(x_0) = C_2 = 0, Y = 2k_1, C_1 = 3Y, C_3 = Y, x_0 = 0$. Вычисляем $f' = (27)^{-1}4(o_5^2 - 9c^2)(3k_1c + o_5^2)$ и получаем ограничение

$$3k_1c + o_5^2 \neq 0 (o_4 = o_6, o_5 \neq 0, k_2 = -k_1, k_1 > 0). \quad (14)$$

3. Справедливо $o_4 = o_5, o_6 \neq 0$. Вычисляем $f(x_0) = 3^{-1}2(9^{-1}o_6^2 - (c - x_0)^2)(2Y - 3k_2 + k_1)o_6^2$. Согласно (13) $f(x_0) < 0$, и если $k_2 = k_1, k_1 > 0$, то $f(x_0) = C_3 = 0, Y = 2k_1, C_1 = C_2 = -3Y, x_0 = 2Y > 0$. Находим $f' = (27)^{-1}4(o_6^2 - 9(c - k_1)^2)(3k_1c - 12k_1^2 + 2o_6^2)$ и получаем

$$3k_1c - 12k_1^2 + 2o_6^2 \neq 0 (o_4 = o_5, o_6 \neq 0, k_2 = k_1, k_1 > 0). \quad (15)$$

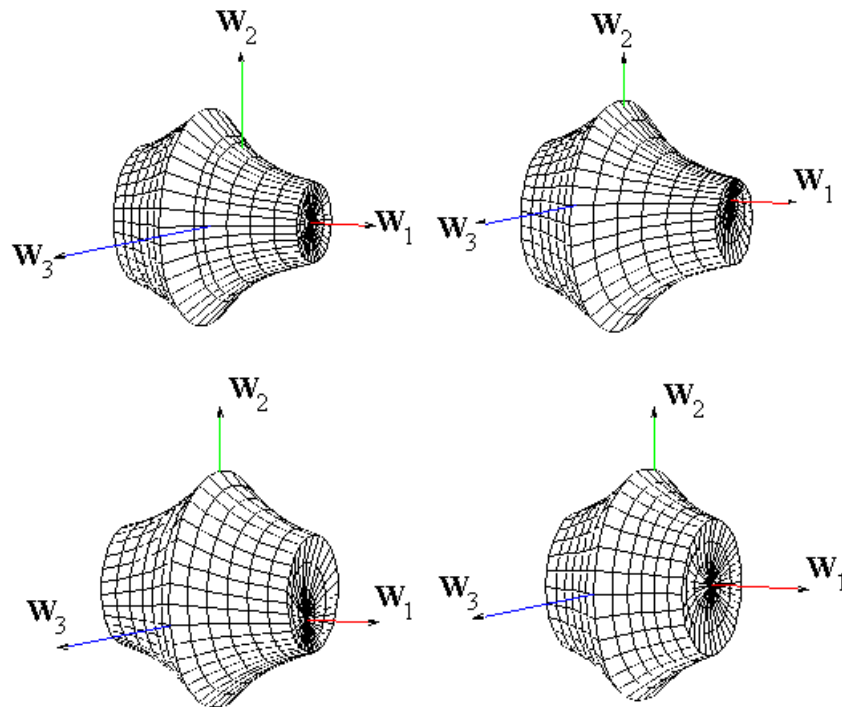


Рис. 1. Условия пластичности для двухмерного напряженно-деформированного состояния при развитой анизотропии среды

В общем случае значение $f(x_0)$ образуется из трех указанных выше слагаемых и выражения, главным членом в котором с учетом малости величин будет $-3^{-1}4c(o_4^2o_5^2 + o_5^2o_6^2 + o_4^2o_6^2)$. Таким образом, приходим к основному неравенству, обеспечивающему достаточное условие того, что большее собственное значение характеристического полинома будет простым:

$$O = o_4^2(cC_1 - o_5^2 - o_6^2) + o_5^2(cC_2 - o_4^2 - o_6^2) + o_6^2(cC_3 - o_4^2 - o_5^2) > 0(o_4^2 + o_5^2 + o_6^2 \neq 0). \quad (16)$$

Соотношение (16) устраняет недопустимую по выражению (10) окрестность точки $(0, 0)$ критических значений параметров k_1, k_2 с учетом неравенств (13), не зависящих от o_4, o_5, o_6 . Должны выполняться, конечно, и соотношения (10), (11), (14), (15).

Приведем численный пример для сплава D 54 S. При значениях $o_1 = 0,0009084438$; $o_2 = -0,000713736$; $o_4 = -0,007$; $o_5 = 0,008$; $o_6 = -0,009$; $y = 1,05$; $L_3 = 1$; $g_1 = 0,000013$; $g_2 = -0,000012(x_0 = 0)$ получаем $k_1 = k_2 = 0, O = -2,46 \cdot 10^{-8}, f(x_0) = 3,29 \cdot 10^{-6}$. Изменив одно значение $o_2 = -0,000713836$, находим $k_1 = 10^{-7}, k_2 = -10^{-7}, O = -1,09 \cdot 10^{-8}, f(x_0) = 1,2 \cdot 10^{-6}$. Изменим снова одно значение $o_2 = -0,000714736$ и получим $k_1 = 10^{-6}, k_2 = -10^{-6}, O = 1,12 \cdot 10^{-7}, f(x_0) = -1,76 \cdot 10^{-6}$. В последнем случае недопустимые значения k_1, k_2 устраняются и неравенство (16) выполняется.

Заключение

В работе представлен общий метод определения девиаторов потенциальных направлений в модели упругопластической среды. Дано определение девиаторов главных потенциальных направлений, определяющих девиаторное сечение предельной поверхности и используемых при формулировке определяющих соотношений среды. Получены ограничения (10)–(12), (14)–(16), достаточные для существования девиаторов главных потенциальных направлений. Аналитические выкладки проводились с использованием символьных средств системы Mathcad. Анализ показывает, что эти ограничения выполняются в достаточно широком диапазоне изменения анизотропных структур, обеспечивающих описание упругопластического процесса. Игнорирование анизотропных структур второго порядка для трехмерного напряженно-деформированного состояния сделано с целью упрощения матрицы в равенстве (6). Их учет проведен для случая двумерного напряженно-деформированного состояния (12), и это ограничение является более жестким. Рост параметров анизотропии в модели [1] должен быть максимально ограничен.

Следовательно, в работе получено дополнительное, формальное подтверждение обоснованности метода построения модели среды, не чувствительной к скорости приложения внешних нагрузок. Модель упругопластической среды является одним из главных элементов более сложной модели упруговязкопластической среды, позволяющей учитывать большие градиенты деформации при строгом геометрически нелинейном описании поведения реальных материалов – металлов и сплавов при деформировании.

Список литературы

1. Швед, О.Л. К теории упругопластичности при конечных упругих деформациях и поворотах / О.Л. Швед // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49. – № 3. – С. 45–48.
2. Белл, Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. II. Конечные деформации / Дж.Ф. Белл. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
3. Murnagan, F.D. Finite deformation of an elastic solid / F.D. Murnagan. – N.-Y.: Dover, 1967. – 140 p.
4. Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 517 с.
5. Ольшак, В. Современное состояние теории пластичности / В. Ольшак, З. Мурз, П. Пежина. – М.: Мир, 1964. – 104 с.
6. Махнач В.И. Начальное условие пластичности / В.И. Махнач, О.Л. Швед // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 3. – С. 95–99.

7. Махнач, В.И. К определению упругой деформации при нагрузке / В.И. Махнач, О.Л. Швед // Технологии физтеха: юбилейный сборник науч. тр. / Под общ. ред. С.А. Астапчика. – 2004. – Т. 2. – С. 126–138.

8. Швед, О.Л. Об условии пластичности при конечных деформациях для двухмерного напряженно-деформированного состояния / О.Л. Швед. – Деп. в ВИНТИ 22.08.03, № 1617-В2003 // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2003. – 24 с.

Поступила 25.04.06

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6*

O.L. Shwed

MAIN POTENTIAL DIRECTIONS IN THE MODEL OF ELASTO-PLASTIC MEDIUM

It is shown that a limit surface deviator section for medium with advanced anisotropic properties can be determined on base of potential nature conservation law in active process. Sufficient constraints for anisotropic structures of generic elasticity law are found using Mathcad analytic calculations.