ИНФОРМАТИКА

2006 апрель-июнь № 2

УДК 519.8

В.А. Емеличев, К.Г. Кузьмин

О РАДИУСЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Находятся верхняя и нижняя оценки радиуса устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования с паретовским принципом оптимальности при возмущении параметров векторного критерия в пространстве с метрикой l_1. Доказана достижимость нижней оценки. В качестве следствия приводится формула радиуса устойчивости задачи с единственным оптимальным решением.

Введение

Из физических условий многих прикладных задач оптимизации, таких, например, как календарное планирование, размещение и реконструкция предприятий, раскрой материалов, загрузка оборудования, вытекает требование целочисленности переменных. Это обстоятельство обусловило стремительный рост числа работ, посвященных теории и методам дискретной оптимизации и, в частности, целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Поскольку любая задача, относящаяся к проблемам проектирования, планирования и управления в технических и организационных системах, носит ярко выраженный многокритериальный характер, интерес к векторным задачам дискретной оптимизации не ослабевает, что подтверждается частым появлением новых публикаций в этой области (см., например, библиографию к работе [1], содержащую 234 наименования). Возникший в последнее время особый интерес к исследованию дискретных задач [2–5] обусловлен в значительной степени их широким применением для принятия решений в управлении, экономике, проектировании разнообразных сложных систем в условиях неопределенности. Основной вопрос, который при этом возникает: в каких пределах можно варьировать (возмущать) исходные данные задачи, чтобы множество оптимальных решений обладало некоторым свойством инвариантности? Такая постановка вопроса и порождает проблему устойчивости задачи, являющуюся одной из центральных в математических исследованиях. Конкретное содержание понятия устойчивости зависит от выбора множества параметров задачи, подверженных возмущениям, и от структуры, определяющей отношение «близости» на множестве параметров, т. е. от метрики, задаваемой в пространстве исходных данных.

Настоящая работа связана с конструктивным подходом к проблеме устойчивости, состоящим в получении количественных характеристик устойчивости. Одна из таких характеристик, называемая обычно радиусом устойчивости, определяется как предельный уровень возмущений параметров задачи, сохраняющих некоторое наперед заданное свойство множества ее решений (или отдельного решения). В качестве возмущаемых параметров обычно выступают коэффициенты скалярного или векторного критерия. Как правило, результатами исследования радиуса устойчивости являются его формальные выражения, оценки и алгоритмы вычисления. В случае скалярного критерия получены формулы радиуса устойчивости для задач булева программирования, задач на системах подмножеств, на графах, а также для некоторых задач теории расписаний [5–8]. Наряду с поиском аналитических выражений для радиуса устойчивости некоторые авторы исследуют алгоритмические аспекты устойчивости задач дискретной оптимизации (см., например, [9–13]).

Продолжая цикл исследований, посвященный проблемам устойчивости векторных (многокритериальных) задач ЦЛП и отраженный в работах [14–18], проведем анализ дискретного аналога полунепрерывности сверху по Хаусдорфу парето-оптимального отображения для оценки предельных уровней возмущений коэффициентов частных критериев векторной задачи ЦЛП в метрике l_1. Ранее подобные результаты были получены в работе [16] (см. также [15]) для векторной задачи ЦЛП в случае метрики l_∞. Исследованию устойчивости скалярных комбинаторных задач с метрикой l_1 посвящены работы [12, 19]. Отметим, что метрика l_1 используется тогда, когда мера возмущений параметров оценивается суммой абсолютных уклонений по каждой координате.

1. Основные определения

Рассмотрим n-критериальную постановку задачи ЦЛП с m переменными:

$$Cx = (C_1x, C_2x, \dots, C_nx)^T \to \min_{x\in X},$$

где $C = [c_{ij}]_{n\times m} \in \mathbf{R}^{n\times m}$; $n, m \in \mathbf{N}$; C_i – i-я строка матрицы C, т. е. $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{im})$, $i \in N_n = \{1, 2, ..., n\}$; X – конечное множество (допустимых) решений в $\mathbf{Z}^m$, причем $|X| > 1$. Под векторной задачей ЦЛП будем понимать задачу нахождения множества Парето, т. е. множества эффективных решений

$$P^n(C) = \{x \in X:\ \pi(x, C) = \varnothing\},$$

где $\pi(x, C) = \{x' \in X:\ Cx \geq Cx', Cx \neq Cx'\}$.

Такую задачу будем обозначать через $Z^n(C)$.

Введем также множество Слейтера [20], т. е. множество слабоэффективных решений

$$Sl^n(C) = \{x \in X:\ \sigma(x, C) = \varnothing\},$$

где $\sigma(x, C) = \{x' \in X:\ \ C_ix > C_ix',\ \ i \in N_n\}$.

При каждой матрице $C \in \mathbf{R}^{n\times m}$ очевидно включение $P^n(C) \subseteq Sl^n(C)$.

Ясно, что в частном случае, когда $n = 1$, рассматриваемая задача превращается в обычную скалярную задачу ЦЛП $Z^1(C)$, где $C \in \mathbf{R}^m$, на ограниченном множестве допустимых решений, а множества Парето и Слейтера совпадают ($P^1(C) = Sl^1(C)$) и превращаются в множество оптимальных решений задачи $Z^n(C)$.

Возмущение параметров задачи будем моделировать путем прибавления к матрице C возмущающих массивов чисел соответствующей размерности $C' \in \mathbf{R}^{n\times m}$. Таким образом, возмущенная задача $Z^n(C + C')$ имеет вид

$$(C + C')x \to \min_{x\in X},$$

а множество Парето такой задачи – $P^n(C + C')$. Для того чтобы сформулировать вопрос о количественных характеристиках устойчивости, а позднее вывести соответствующие формулы и оценки предельных возмущений, в пространстве $\mathbf{R}^k$ произвольной размерности $k \in \mathbf{N}$ зададим две метрики l_1 и l_∞, т. е. под нормами вектора $z = (z_1, z_2, ..., z_k) \in \mathbf{R}^k$ будем понимать соответственно числа

$$\| z \|_1 = \sum_{i\in N_k} | z_i |, \qquad \| z \|_\infty = \max\{| z_i | \ :\ i \in N_k\},$$

а под нормой матрицы $C = [c_{ij}]_{n\times m}$ – норму вектора, составленного из всех ее элементов, т. е. норму вектора $(c_{11}, c_{12}, ..., c_{n,m-1}, c_{nm})$.

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ определим множество возмущающих матриц в пространстве с метрикой l_1:

$$\Omega(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{n\times m}: \ \| C' \|_1 < \varepsilon\}.$$

Все приведенные ниже определения являются традиционными (см., например, [14–16], где рассмотрен случай, когда в пространстве возмущающих параметров векторной задачи ЦЛП задается метрика l_∞).

Определение 1. *Векторная задача ЦЛП* $Z^n(C)$, $n \geq 1$, *называется устойчивой (к возмущениям элементов матрицы* C*), если существует такое число* $\varepsilon > 0$, *что для любой возмущающей матрицы* $C' \in \Omega(\varepsilon)$ *справедливо включение* $P^n(C + C') \subseteq P^n(C)$.

Очевидно, что свойство устойчивости задачи эквивалентно свойству полунепрерывности сверху по Хаусдорфу [3, 4, 21] в точке $C \in \mathbf{R}^{n\times m}$ оптимального отображения

$$P^n : \mathbf{R}^{n\times m} \to 2^X,$$

т. е. точечно-множественного (многозначного) отображения, которое каждому набору параметров задачи из метрического пространства $\mathbf{R}^{n\times m}$ ставит в соответствие множество Парето $P^n(C)$.

Введем в рассмотрение количественную оценку устойчивости.

Определение 2. *Радиусом устойчивости векторной задачи* ЦЛП $Z^n(C)$, $n \geq 1$, *называется число* $\rho^n(C) = \sup\{\varepsilon > 0: \ \forall C' \in \Omega(\varepsilon) \quad (P^n(C + C') \subseteq P^n(C))\}$, *если задача* $Z^n(C)$ *устойчива, и число* $\rho^n(C) = 0$ *в противном случае.*

Другими словами, в данном контексте радиус устойчивости задачи $Z^n(C)$ – это предельный уровень возмущений элементов матрицы C в пространстве $\mathbf{R}^{n\times m}$ с метрикой l_1, которые не приводят к появлению новых эффективных решений.

Очевидно, что при выполнении равенства $P^n(C) = X$ задача $Z^n(C)$ устойчива и ее радиус устойчивости равен бесконечности. Задачу $Z^n(C)$, для которой множество $\overline{P}^n(C) = X \setminus P^n(C)$ непусто, будем называть нетривиальной.

2. Вспомогательные утверждения

Для произвольного решения $x \in \overline{P}^n(C)$ введем множество $P_x(C) = P^n(C) \cap \sigma(x, C)$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие два очевидных свойства.

Свойство 1. *Если* $P^n(C) = Sl^n(C)$, *то* $P_x(C) \neq \varnothing$ *при любом решении* $x \in \overline{P}^n(C)$.

Для числа $z \in \mathbf{R}$ будем использовать обозначение $[z]^+ = \max\{0, z\}$.

Свойство 2. *Если* $x \in \overline{P}^n(C)$ *и*

$$P^n(C) \cap \sigma(x, C + C') = \varnothing, \tag{1}$$

то существует решение $x^* \in \overline{P}^n(C)$ *с условием* $x^* \in Sl^n(C + C')$.

Действительно, если $\sigma(x, C + C') = \varnothing$, то можно положить $x^* = x$. Если $\sigma(x, C + C') \neq \varnothing$, то в силу внешней устойчивости множества Слейтера (см., например, [20]) найдется такое решение $x^* \in \sigma(x, C + C')$, что $x^* \in Sl^n(C + C')$, причем ввиду (1) решение x^* принадлежит $\overline{P}^n(C)$.

Для любых $p,q \in N_n$, $x \in \overline{P}^n(C)$, $x' \in P_x(C)$ положим

$$\gamma(x,x',p,q) = \frac{C_p(x-x')}{C_q(x-x')}.$$

Ясно, что в предположении $P^n(C) = Sl^n(C)$ величина $\gamma(x,x',p,q)$ положительна при любых указанных параметрах x, x', p, q.

Лемма. *Пусть $P^n(C) = Sl^n(C)$, $x \in \overline{P}^n(C)$, $p,q \in N_n$, а положительное число ψ таково, что*

$$\| C_q \|_1 \max\{\gamma(x,x',p,q): \ \ x' \in P_x(C)\} \le \psi. \tag{2}$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > \psi$ существуют такие $C' \in \Omega(\varepsilon)$ и $x^* \in \overline{P}^n(C)$, что

$$x^* \in Sl^n(C + C'). \tag{3}$$

Доказательство. По условию леммы справедливы неравенства

$$\varepsilon > \psi \ge \| C_q \|_1 \zeta(x),$$

где $\zeta(x) = \max\{\gamma(x,x',p,q): \quad x' \in P_x(C)\}$.

Заметим, что множество $P_x(C)$ непусто согласно свойству 1. Очевидно существование числа $\delta > 0$ с условием

$$\varepsilon > (1+\delta) \| C_q \|_1 \zeta(x) > \psi. \tag{4}$$

Построим возмущающую матрицу $C' = [c'_{ij}]_{n\times m}$ по правилу

$$c'_{ij} = \begin{cases} -\alpha_j, & \text{если } i = p, j \in N_m; \\ 0, & \text{если } i \ne p, j \in N_m, \end{cases}$$

где $\alpha_j = (1+\delta)c_{qj}\zeta(x)$. Отсюда, учитывая (4), имеем

$$C' \in \Omega(\varepsilon);$$

$$C'_p = -(1+\delta)C_q\zeta(x); \tag{5}$$

$$C'_i = (0,0,\ldots,0) \in \mathbf{R}^m, \ \ i \in N_n \setminus \{p\}. \tag{6}$$

Далее покажем, что выполняется равенство (1), т. е. никакое решение из $P^n(C)$ не содержится в $\sigma(x, C+C')$. Пусть $x^0 \in P^n(C)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $x^0 \in P_x(C)$. Тогда, применяя равенство (5) и принимая во внимание определение величины $\zeta(x)$, получаем

$$(C_p + C'_p)(x-x^0) = C_p(x-x^0) - (1+\delta)\zeta(x)C_q(x-x^0) \le$$

$$\le C_p(x-x^0)-(1+\delta)\gamma(x,x^0,p,q)C_q(x-x^0)=-\delta C_p(x-x^0)<0.$$

Поэтому решение x^0 не принадлежит $\sigma(x,C+C')$.

Случай 2: $x^0 \in P^n(C)\setminus P_x(C)$. Если существует такой индекс $s \in N_n \setminus \{p\}$, что $C_s(x-x^0)<0$, то в силу (6) верно неравенство $(C_s+C'_s)(x-x^0)<0$.

Если для всякого индекса $i \in N_n \setminus \{p\}$ справедливо неравенство $C_i(x-x^0)\ge 0$, то ввиду $x \in \bar{P}^n(C)$ и $x^0 \in P^n(C)\setminus P_x(C)$ справедливо неравенство $C_p(x-x^0)<0$. Поэтому, учитывая равенство (5), находим

$$(C_p+C'_p)(x-x^0)\le C_p(x-x^0)<0.$$

Следовательно, и во втором случае x^0 не принадлежит $\sigma(x,C+C')$. Отсюда заключаем, что верно равенство (1). Поэтому согласно свойству 2 найдется такое решение $x^* \in \bar{P}^n(C)$, что справедливо включение (3).

Лемма доказана.

3. Радиус устойчивости

Хорошо известно [22] (см. также [3, 4, 15, 16]), что необходимым и достаточным условием неустойчивости нетривиальной задачи $Z^n(C)$ является несовпадение множеств Парето $P^n(C)$ и Слейтера $Sl^n(C)$. Поэтому в этом случае радиус устойчивости задачи $Z^n(C)$ равен нулю.

Остается рассмотреть лишь случай, когда $P^n(C)=Sl^n(C)$.

Теорема. *Пусть*

$$P^n(C)=Sl^n(C);$$

$$\varphi=\min_{x\in\bar{P}^n(C)}\ \max_{x'\in P_x(C)}\ \min_{i\in N_n}\frac{C_i(x-x')}{\|x-x'\|_\infty};$$

$$\psi=\min_{x\in\bar{P}^n(C)}\ \min_{(i,k)\in N_n\times N_n}\ \max_{x'\in P_x(C)}\frac{C_i(x-x')}{C_k(x-x')}\|C_k\|_1.$$

Тогда для радиуса устойчивости $\rho^n(C)$ *нетривиальной векторной задачи ЦЛП* $Z^n(C)$, $n\ge 1$, *имеют место следующие оценки:*

$$0<\varphi\le\rho^n(C)\le\psi.$$

Доказательство. На основании свойства 1 при любом решении $x\in\bar{P}^n(C)$ множество $P_x(C)$ непусто. Поэтому $\varphi>0$.

Далее покажем справедливость неравенства $\rho^n(C)\ge\varphi$. Пусть $C'\in\Omega(\varphi)$. Тогда согласно определению величины φ для любого $x\in\bar{P}^n(C)$ найдется такое решение $x^0\in P_x(C)$, что справедливы неравенства

$$\|C'_i\|_1\le\|C'\|_1<\varphi\le\frac{C_i(x-x^0)}{\|x-x^0\|_\infty},\quad i\in N_n.$$

Отсюда находим

$$(C_i + C_i')(x - x^0) \geq C_i(x - x^0) - \| C_i' \|_1 \| x - x^0 \|_\infty > 0, \qquad i \in N_n,$$

т. е. $x^0 \in \pi(x, C + C')$. Следовательно, $x \in \bar{P}^n(C + C')$. Таким образом заключаем, что при любой матрице $C' \in \Omega(\varphi)$ имеет место включение $P^n(C + C') \subseteq P^n(C)$.

Итак, верна оценка $\rho^n(C) \geq \varphi$.

Наконец, докажем неравенство $\rho^n(C) \leq \psi$. Пусть $\varepsilon > \psi$. В соответствии с определением величины ψ найдутся такие $(p,q) \in N_n \times N_n$ и $x \in \bar{P}^n(C)$, что выполняется неравенство (2). Поэтому на основании леммы для любого числа ε_1, где $\varepsilon > \varepsilon_1 > \psi$, существуют такие $C' \in \Omega(\varepsilon_1)$ и $x^* \in \bar{P}^n(C)$, что $x^* \in Sl^n(C + C')$.

Возможны два случая.

С л у ч а й 1: $x^* \in P^n(C + C')$. Тогда ввиду $x^* \in \bar{P}^n(C)$ справедлива формула

$$P^n(C + C') \not\subseteq P^n(C), \quad C' \in \Omega(\varepsilon).$$

С л у ч а й 2: $x^* \in Sl^n(C + C') \setminus P^n(C + C')$. Тогда согласно теореме 2 из работы [23] (см. также лемму 4.3 из работы [4]) найдется такая матрица $C'' \in \Omega(\varepsilon_2)$, где $\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1 > 0$, что $x^* \in P^n(C + C' + C'')$. Иначе говоря, для всякого числа $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > \psi$ существует такая матрица $C^0 = C' + C''$, что

$$P^n(C + C^0) \not\subseteq P^n(C), \quad C^0 \in \Omega(\varepsilon).$$

Обобщая эти два случая, заключаем, что при любом $\varepsilon > \psi$ справедливо неравенство $\rho^n(C) < \varepsilon$. Следовательно, $\rho^n(C) \leq \psi$.

Теорема доказана.

4. Следствия

Из теоремы и приведенного выше критерия устойчивости нетривиальной задачи $Z^n(C)$ вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Для радиуса устойчивости любой нетривиальной векторной задачи* ЦЛП $Z^n(C)$, $n \geq 1$, *справедливы оценки*

$$\min_{x \in \bar{P}^n(C)} \; \max_{x' \in P^n(C) \cap \pi(x,C)} \; \min_{i \in N_n} \frac{C_i(x - x')}{\| x - x' \|_\infty} \leq \rho^n(C) \leq \min_{i \in N_n} \| C_i \|_1 \leq \| C \|_1, \tag{7}$$

причем если нижняя оценка равна нулю, то и $\rho^n(C) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в выражении ψ (см. теорему) $i = k$, убеждаемся в справедливости верхних оценок

$$\rho^n(C) \leq \| C_i \|_1, \qquad i \in N_n.$$

Поэтому справедлива верхняя оценка в выражении (7).

Далее покажем, что

$$\rho^n(C) \geq \varphi', \tag{8}$$

где φ' – левая часть (7).

Сначала рассмотрим случай, когда $P^n(C) \neq Sl^n(C)$. Тогда $\rho^n(C) = 0$. Покажем, что $\varphi' = 0$. Очевидно существование решения $x^0 \in \overline{P}^n(C) \cap Sl^n(C)$. Поэтому для всякого решения $x' \in P^n(C) \cap \pi(x, C)$ найдется такой индекс $s \in N_n$, при котором $C_s(x^0 - x') = 0$. Следовательно, $\varphi' = 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $P^n(C) = Sl^n(C)$, и покажем, что тогда $\varphi' = \varphi$ (см. теорему). Введем обозначение

$$\tau(x, x') = \min\left\{\frac{C_i(x - x')}{\| x - x' \|_\infty} : \ i \in N_n\right\}.$$

Учитывая очевидное включение $P_x(C) \subseteq P^n(C) \cap \pi(x, C)$, положим

$$Q(x) = (P^n(C) \cap \pi(x, C)) \setminus P_x(C).$$

В этих обозначениях очевидны соотношения

$$\tau(x, x') \begin{cases} = 0, & \text{если } x' \in Q(x); \\ > 0, & \text{если } x' \in P_x(C). \end{cases}$$

Поэтому с учетом непустоты множества $P_x(C)$ ввиду свойства 1 нетрудно убедиться в справедливости равенства $\varphi' = \varphi$.

Наконец покажем, что $\rho^n(C) = 0$ при $\varphi' = 0$. В этом случае в силу определения величины φ' найдется такое решение $x^0 \in \overline{P}^n(C)$, что для всякого решения $x' \in P^n(C) \cap \pi(x^0, C)$ существует индекс $s \in N_n$, при котором $C_s(x^0 - x') = 0$. Иными словами, никакое решение $x' \in P^n(C) \cap \pi(x^0, C)$ не содержится в $\sigma(x^0, C)$. Поэтому $P^n(C) \cap \sigma(x^0, C) = \varnothing$. Отсюда согласно свойству 2 найдется такое решение $x^* \in \overline{P}^n(C)$, что $x^* \in Sl^n(C)$, т. е. $P^n(C) \neq Sl^n(C)$. Принимая во внимание критерий устойчивости задачи $Z^n(C)$, заключаем, что задача $Z^n(C)$ не является устойчивой. Следовательно, $\rho^n(C) = 0$.

Следствие 1 доказано.

Воспользовавшись следствием 1, получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть векторная задача* ЦЛП $Z^n(C)$, $n \geq 1$, *нетривиальна, а матрица* $C \in \mathbf{R}^{n \times m}$ *имеет хотя бы одну нулевую строку. Тогда задача* $Z^n(C)$ *неустойчива.*

Следствие 3. *Если векторная задача* ЦЛП $Z^n(C)$, $n \geq 1$, *имеет единственное эффективное решение* x^0, *то*

$$\rho^n(C) = \min_{x \in \overline{P}^n(C)} \min_{i \in N_n} \frac{C_i(x - x^0)}{\| x - x^0 \|_\infty}. \tag{9}$$

Доказательство. Для краткости обозначим правую часть формулы (9) через θ. В силу следствия 1 верно неравенство $\rho^n(C) \geq \theta$. Поэтому для доказательства следствия 3 достаточно показать, что $\rho^n(C) \leq \theta$.

Пусть $P^n(C) = \{x^0\}$. Согласно определению величины θ найдутся такое решение $x^* \in \overline{P}^n(C)$ и индекс $s \in N_n$, что

$$C_s(x^* - x^0) = \theta \| x^* - x^0 \|_\infty . \tag{10}$$

Зафиксировав индекс $q = \operatorname{argmax}\{| x_j^* - x_j^0 |: j \in N_m\}$, зададим элементы возмущающей матрицы $C' = [c'_{ij}]_{n\times m}$ по правилу

$$c'_{ij} = \begin{cases} \gamma \operatorname{sign}(x_q^0 - x_q^*), & \text{если } (i,j) = (s,q); \\ \quad 0, & \text{если } (i,j) \neq (s,q), \end{cases}$$

где $\theta < \gamma < \varepsilon$. Очевидно, что $C' \in \Omega(\varepsilon)$. В силу строения матрицы C' имеют место равенства

$$C'_s(x^* - x^0) = \sum_{j\in N_m} c'_{sj}(x^* - x^0) = c'_{sq}(x^* - x^0) = -\gamma \,| x_q^* - x_q^0 | = -\gamma \| x^* - x^0 \|_\infty .$$

Отсюда и из равенства (10) получаем

$$(C_s + C'_s)(x^* - x^0) = C_s(x^* - x^0) - \gamma \| x^* - x^0 \|_\infty = (\theta - \gamma) \| x^* - x^0 \|_\infty < 0,$$

т. е. $x^0 \notin \pi(x^*, C + C')$. Если $\pi(x^*, C + C') = \varnothing$, то $x^* \in P^n(C + C')$. Если $\pi(x^*, C + C') \neq \varnothing$, то благодаря внешней устойчивости множества $P^n(C + C')$ (см., например, [20]) найдется такое решение $\tilde{x} \in \pi(x^*, C + C')$, что $\tilde{x} \in P^n(C + C')$.

Таким образом, в случае когда $P^n(C) = \{x^0\}$, для любого числа $\varepsilon > \theta$ может быть построена такая матрица $C' \in \Omega(\varepsilon)$, что найдется решение $x' \neq x^0$ с условием $x' \in P^n(C + C')$, т. е. $P^n(C + C') \not\subseteq P^n(C)$. Следовательно, $\rho_1^n(C) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > \theta$. Это и означает справедливость оценки $\rho^n(C) \leq \theta$.

Следствие 3 доказано.

Следствие 3 свидетельствует о том, что нижняя оценка φ, установленная теоремой, достижима при $| P^n(C) | = 1$.

Поскольку $P^1(C) = Sl^1(C)$, то из теоремы вытекает также

Следствие 4. *Однокритериальная* (*скалярная*) *задача* ЦЛП $Z^1(C)$ $(C \in \mathbf{R}^m)$ *всегда устойчива.*

Заключение

Поскольку исходные данные реальных задач оптимизации, как правило, задаются с некоторой степенью точности, возникает потребность в исследовании устойчивости искомых решений к «малым» возмущениям параметров задачи.

В работе рассматривается устойчивость по векторному критерию задачи ЦЛП. Изучено поведение множеств Парето и Слейтера при возмущениях коэффициентов частных критериев в метрике l_1, и получены верхняя и нижняя оценки радиуса того типа устойчивости, который соответствует свойству непоявления новых эффективных решений при указанных возмущениях. Показано, что нижняя оценка является точной, т. е. достижимой.

Полученные результаты задают предельные уровни возмущений параметров векторной задачи ЦЛП в метрике l_1, при которых множество Парето не расширяется.

Работа выполнена при финансовой поддержке БГУ в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Математические структуры» (грант 913/28) и межвузовской программы «Фундаментальные и прикладные исследования» (грант 492/28) Республики Беларусь.

Список литературы

1. Ehrgott, M. A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization / M. Ehrgott, X. Gandibleux // OR Spectrum. – 2000. – Vol. 22. – № 4. – P. 425–460.

2. Greenberg, N.J. An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer and combinatorial optimization / N.J. Greenberg // Advances in computational and stochastic optimization, Logic Programming and Heuristic Search. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998. – P. 97–148.

3. Сергиенко, И.В. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач / И.В. Сергиенко, Л.Н. Козерацкая, Т.Т. Лебедева. – Киев: Наукова думка, 1995. – 170 с.

4. Сергиенко, И.В. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования / И.В. Сергиенко, В.П. Шило. – Киев: Наукова думка, 2003. – 261 с.

5. Сотсков, Ю.Н. Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами / Ю.Н. Сотсков, Н.Ю. Сотскова. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2004. – 290 с.

6. Sotskov, Yu.N. Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization / Yu.N. Sotskov, V.K. Leontev, E.N. Gordeev // Discrete Applied Mathematics. – 1995. – Vol. 58. – № 2. – P. 169–190.

7. Sotskov, Yu.N. Stability radius of an optimal schedule: a survey and recent developments / Yu.N. Sotskov, V.S. Tanaev, F. Werner // Industrial applications of combinatorial optimization. – Kluwer Academic Publishers, 1998. – Vol. 16. – P. 72–108.

8. Сотсков, Ю.Н. Исследование устойчивости оптимальных расписаний / Ю.Н. Сотсков // Информатика. – 2004. – № 4. – С. 65–75.

9. Chakravarti, N. Calculation of stability radius for combinatorial optimization problems / N. Chakravarti, A. Wagelmans // Operations Research Letters. – 1998. – Vol. 23. – № 1. – P. 1–7.

10. Stability aspects of the traveling salesman problem based on k-best solutions / M. Libura [et al.] // Discrete Applied Mathematics. – 1998. – Vol. 87. – P. 159–185.

11. Van Hoesel, S. On the complexity of postoptimality analysis of 0-1 programs / S. Van Hoesel, A. Wagelmans // Discrete Applied Mathematics. – 1999. – Vol. 91. – P. 251–263.

12. Гордеев, Э.Н. Исследование устойчивости в оптимизационных задачах на матроидах в метрике l_1 / Э.Н. Гордеев // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 2. – С. 132–144.

13. Колоколов, А.А. Анализ устойчивости некоторых алгоритмов дискретной оптимизации / А.А. Колоколов, М.В. Девятерикова // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 3. – С. 48–54.

14. Емеличев, В.А. О количественной мере устойчивости векторной задачи целочисленного программирования / В.А. Емеличев, Д.П. Подкопаев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38. – № 11. – С. 1801–1805.

15. Емеличев, В.А. Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования / В.А. Емеличев, Д.П. Подкопаев // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. – 2001. – Т. 8. – № 1. – С. 47–69.

16. Stability and regularization of vector problems of integer linear programming / V.A. Emelichev [et al.] // Optimization. – 2002. – Vol. 51. – № 4. – P. 645–676.

17. Emelichev, V.A. The stability radius of an efficient solution in minimax Boolean programming problem / V.A. Emelichev, V.N. Krichko, Yu.V. Nikulin // Control and Cybernetics. – 2004. – Vol. 33. – № 1. – P. 127–132.

18. Емеличев, В.А. Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации / В.А. Емеличев, К.Г. Кузьмин, А.М. Леонович // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 2. – С. 79–92.

19. Гордеев, Э.Н. Исследование устойчивости задачи о кратчайшем остове в метрике l_1 / Э.Н. Гордеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1990. – Т. 39. – С. 770–778.

20. Подиновский, В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

21. Tanino, T. Stability of nondominated solutions in multicriteria decision-making / T. Tanino, Y. Sawaragi // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1980. – Vol. 30. – № 2. – P. 229–253.

22. Козерацкая, Л.Н. Задачи целочисленного программирования с векторным критерием: параметрический анализ и исследование устойчивости / Л.Н. Козерацкая, Т.Т. Лебедева, Т.И. Сергиенко // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 307. – № 3. – С. 527–529.

23. Емеличев, В.А. О регуляризации многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования / В.А. Емеличев, О.А. Янушкевич // Известия вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 38–42.

Поступила 18.01.06

Белорусский государственный университет,
Минск, пр-т Независимости, 4
E-mail: emelichev@bsu.by,
kuzminkg@mail.ru

V.A. Emelichev, K.G. Kuzmin

ON THE STABILITY RADIUS OF THE VECTOR PROBLEM OF INTEGER LINEAR PROGRAMMING

For the vector problem of integer linear programming with Pareto optimality principle, lower and upper bounds of the stability radius of the problem are obtained for the case of l_1 metric in the space of problem parameters. Attainability of the lower estimate is shown. As a corollary we derive a formula for the stability radius of the problem with a single optimal solution.