

УДК 681.3.06 + 624.13

К.С. Курочка

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДИСПЕРСНЫХ И СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Представляется математическая модель сложной пространственной системы, состоящей из неоднородного упругопластического грунтового основания, гибкой плиты и микросвай. Предлагаются алгоритм и программное обеспечение исследования математической модели методами компьютерного моделирования на основе метода конечных элементов. Используется метод декомпозиции системы. При этом для слоев грунтового основания и гибких плит фундамента принимаются гипотезы малых упругопластических деформаций, а для плит – гипотезы Кирхгофа.

Расхождение результатов исследования математической модели и имеющихся экспериментальных данных для рассматриваемой системы не превысило 7 %.

Введение

В современном градостроительстве широкое распространение получили здания каркасного типа, для которых характерна чувствительность к неравномерным осадкам отдельных колонн и элементов фундаментов [1]. Таким образом, для каркасных зданий особенно важной задачей является обеспечение равномерной нормативной осадки в плане всего сооружения.

Активная застройка населенных пунктов приводит к тому, что в качестве строительных площадок часто выступают заболоченные, пойменно-намывные или инженерно подработанные территории, содержащие, как правило, погребенные биогенные грунты с пониженной несущей способностью. Наличие таких грунтов в основании фундамента каркасного здания значительно усложняет задачу обеспечения нормативных равномерных осадок фундамента в плане всего сооружения. Поэтому для каркасных зданий традиционно предполагают возведение массивных столбчатых фундаментов, устройство перекрестных лент, забивку длинных свай и т. п. [1]. Такие фундаменты являются материалоемкими и дорогостоящими. Более экономичным вариантом является устройство фундаментов с использованием сплошных тонких железобетонных плит с утолщениями в тех местах, где колонны каркаса опираются на основание, упрочненное микросваями [1].

Учет конструктивных особенностей таких фундаментов и наличия слоев грунтового основания с пониженной несущей способностью с целью обеспечения равномерной в плане всего здания осадки фундамента приводит к необходимости рассматривать плитный фундамент, микросвай и неоднородное грунтовое основание как единую сложную пространственную систему. В силу структурных и конструктивных особенностей данной системы область ее определения будет многосвязной, т. е. в пространстве она будет характеризоваться своими внутренними и внешними границами. Поэтому область пространства, занимаемая рассматриваемой системой, классифицируется как n -связная неоднородная область, а сама задача может быть определена как третья краевая задача нелинейной теории упругости для неоднородной n -связной области. Эта область состоит из различных конструктивных элементов фундаментов (плит и микросвай) и элементов грунтового основания (слоев, «линз», вклиниваний, включений). Все элементы системы различны по своей форме и свойствам.

Эффективно решать данную задачу можно способом математического моделирования на основе метода конечных элементов. Дискретизация рассматриваемой области конечными элементами достаточно малых размеров позволяет с приемлемой для практики точностью учитывать неоднородные свойства исследуемой системы [2]. Для компьютерного моделирования и создания виртуальной физической модели системы использован подход, описанный в работе [3].

1. Принимаемые гипотезы

При исследовании рассматриваемой системы и построении математической модели воспользуемся так называемым микроподходом, согласно которому в системе можно выделить три типовых элемента: железобетонная плита, микросвая и элемент грунтового основания с одинаковыми физическими свойствами по всему объему. Рассмотрим последовательно каждый из указанных элементов системы.

Грунтовое основание представляет собой систему дисперсных твердых тел. Предположим, что грунтовое основание является многослойным, может содержать «линзы» и включения. При нагружении каждый однородный слой грунтового основания деформируется линейно-упруго до тех пор, пока величина напряжений не окажется равной некоторой величине. В случае если напряжения будут продолжать расти, материал будет проявлять упругопластические свойства. В качестве критерия пластичности примем соотношение [4]

$$\varepsilon_{\text{и}} = \varepsilon_{\text{T}}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_{\text{и}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$ – интенсивность деформаций;

ε_{T} – предельное значение интенсивности деформаций, при котором наступает явление пластичности. Здесь $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – осевые, а $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – сдвиговые деформации.

Далее рассмотрим только процесс нагружения, учитывая следующие гипотезы теории малых упругопластических деформаций [4, 5]:

1. Объемная деформация упруга, т. е. за счет пластической деформации изменение объема тела не происходит:

$$\sigma_{\text{ср}} = K\theta = 3K\varepsilon_{\text{ср}}, \quad (2)$$

где $\sigma_{\text{ср}}$ – среднее нормальное напряжение; θ – объемная деформация; $\varepsilon_{\text{ср}}$ – средняя нормальная деформация; $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ – объемный модуль упругости, E – модуль упругости, μ – ко-

эффициент Пуассона, причем $\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$, $\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$, $\theta = 3\varepsilon_{\text{ср}}$, а $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения.

2. Девиаторы напряжений и деформаций совпадают с точностью до постоянного множителя:

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_{\text{и}}}{\varepsilon_{\text{и}}} e_{ij}, \quad (3)$$

где $\sigma_{\text{и}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$ – интенсивность напряжений; s_{ij} – компоненты девиатора напряжений; e_{ij} – компоненты девиатора деформаций; $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ – касательные напряжения.

3. Соотношение

$$\sigma_{\text{и}} = \Phi(\varepsilon_{\text{и}}) \quad (4)$$

не зависит от конкретного вида напряженного состояния.

Предположим, что железобетонные плиты являются тонкими, т. е. отношение характерного размера плиты в плане к ее толщине лежит в пределах от 10 до 100. Следовательно, для определения напряженно-деформированного состояния плиты можно воспользоваться теорией изгиба тонких пластинок, основанной на гипотезах Кирхгофа [2, 4]:

1. При деформировании толщина плиты не изменяется.
2. После изгиба плиты нормаль к ее срединной плоскости сохраняется.
3. После приложения нагрузки все точки срединной плоскости не перемещаются вдоль осей OX и OY .
4. Напряжениями надавливания горизонтальных слоев пластины друг на друга можно пренебречь.

Микросваи представляют собой набивные железобетонные сваи в вытрамбованных цилиндрических скважинах. Будем рассматривать их как объемные линейно-упругие тела [2, 6].

Кроме того, предположим, что в процессе деформирования между элементами грунтового основания и фундамента не могут образовываться пустоты, т. е. после приложения нагрузки границы между элементами системы остаются строго общими. Следовательно, железобетонные плиты будут повторять конфигурацию поверхности подстилающего грунтового основания, либо грунт будет заполнять все образующиеся пустоты между фундаментом и поверхностью грунтового основания. Поэтому предположим, что железобетонные фундаментные плиты совместно с грунтовым основанием будут проявлять упругопластические свойства. Таким образом, при определении их напряженно-деформированного состояния необходимо принять гипотезы малых упругопластических деформаций (1)–(4).

2. Построение математической модели системы «фундамент из железобетонных плит на микросваях – неоднородное упругопластическое грунтовое основание»

Дискретизируя область определения рассматриваемой системы конечными элементами, для каждого конечного элемента в соответствии с принципом возможных перемещений получим [2, 4]

$$\{\tilde{\mathbf{g}}\}^T \{\mathbf{R}\} = \iiint_V \{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV, \quad (5)$$

где $\{\mathbf{g}\}$ – вектор узловых перемещений (символ «~» означает его вариацию); $\{\mathbf{R}\}$ – вектор узловых усилий; V – объем конечного элемента.

Микросваи. Для дискретизации микросвай воспользуемся конечными элементами в форме тетраэдров. К вершинам каждого тетраэдра приложим узловые усилия

$$\{\mathbf{R}^{\text{cb}}\}^T = \{X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3, X_4, Y_4, Z_4\},$$

которым будут соответствовать узловые перемещения

$$\{\mathbf{g}^{\text{cb}}\}^T = \{u_1, \vartheta_1, w_1, u_2, \vartheta_2, w_2, u_3, \vartheta_3, w_3, u_4, \vartheta_4, w_4\},$$

где u , ϑ , w – перемещения вдоль осей OX , OY , OZ соответственно. Для тетраэдра можно взять линейные функции для перемещений [2, 6]: $u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z$, $w = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z$, $\vartheta = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z$ или

$$\{\mathbf{g}_0^{\text{cb}}\} = [\mathbf{A}^{\text{cb}}] \{\boldsymbol{\alpha}^{\text{cb}}\}, \quad [\mathbf{A}^{\text{cb}}] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\alpha}^{\text{cb}}\}^T = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{12}\}. \quad (6)$$

Так как выражение (6) имеет место для любой точки тетраэдра, то для его узлов получим

$$\{\mathbf{g}^{\text{CB}}\} = [\mathbf{B}^{\text{CB}}] \{\alpha^{\text{CB}}\}, \quad (7)$$

где $[\mathbf{B}^{\text{CB}}]$ – координатная матрица [2, 6]. Полагая известным вектор узловых перемещений $\{\mathbf{g}^{\text{CB}}\}$, найдем из (7) вектор коэффициентов $\{\alpha^{\text{CB}}\}$:

$$\{\alpha^{\text{CB}}\} = [\mathbf{B}^{\text{CB}}]^{-1} \{\mathbf{g}^{\text{CB}}\}. \quad (8)$$

Подставляя равенство (7) в уравнения Коши [4]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (9)$$

и дифференцируя его, получим

$$\{\xi\} = [\mathbf{C}^{\text{CB}}] \{\alpha^{\text{CB}}\}, \quad [\mathbf{C}^{\text{CB}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Для каждого элемента микросваи справедлив закон Гука [4]:

$$\{\sigma\} = [\mathbf{E}_0] \{\xi\}, \quad [\mathbf{E}_0] = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где $\lambda = \frac{\mu E}{(1-2\mu)(1+\mu)}$ – параметр Ляме, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ – модуль сдвига.

Подставляя равенства (10) в (11) и (8) в (10) и (11), соответственно имеем

$$\{\sigma\} = [\mathbf{E}_0] [\mathbf{C}^{\text{CB}}] \{\alpha^{\text{CB}}\};$$

$$\{\xi\} = [\mathbf{C}^{\text{CB}}] [\mathbf{B}^{\text{CB}}]^{-1} \{\mathbf{g}^{\text{CB}}\}, \quad \{\sigma\} = [\mathbf{E}_0] [\mathbf{C}^{\text{CB}}] [\mathbf{B}^{\text{CB}}]^{-1} \{\mathbf{g}^{\text{CB}}\}. \quad (12)$$

Подставляя в (5) выражения (12), учитывая произвольность $\{\tilde{\mathbf{g}}\}$ и то, что в рассматриваемом случае все матрицы и $\{\mathbf{g}^{\text{CB}}\}$ не зависят от координат, вычисляем определенный интеграл в (5). В результате для каждого конечного элемента микросваи получаем

$$\{\mathbf{R}^{\text{CB}}\} = [\mathbf{K}^{\text{CB}}] \{\mathbf{g}^{\text{CB}}\}, \quad [\mathbf{K}^{\text{CB}}] = V [\mathbf{D}^{\text{CB}}]^T [\mathbf{E}_0] [\mathbf{D}^{\text{CB}}], \quad [\mathbf{D}^{\text{CB}}] = [\mathbf{C}^{\text{CB}}] [\mathbf{B}^{\text{CB}}]^{-1}, \quad (13)$$

где $[\mathbf{K}^{\text{CB}}]$ – матрица жесткости конечного элемента микросваи.

Грунтовое основание. Элементы грунтового основания также будем дискретизировать конечными элементами в форме тетраэдров. Это позволит обеспечить строго общие дискрет-

ные границы между элементами моделируемой системы. Однако элементы грунтового основания при деформировании могут проявлять пластические свойства, т. е. для них будут справедливы гипотезы теории малых упругопластических деформаций (1)–(4) [4, 5].

Решение задач теории пластичности в полной постановке является сложной математической проблемой, которая в аналитическом виде решается только в некоторых частных случаях. Поэтому на практике чаще всего используются приближённые методы. Одним из них является метод последовательных приближений, предложенный А.А. Ильюшиным [4, 5]. Суть его заключается в замене задачи теории пластичности сходящейся итерационной последовательностью линейных задач.

Физические уравнения состояния при выполнении (2) можно переписать следующим образом:

$$s_{ij} = 2G\varphi(\varepsilon_n)e_{ij}, \quad \varphi(\varepsilon_n) = \frac{\Phi(\varepsilon_n)}{3G\varepsilon_n}. \quad (14)$$

Представим функцию $\varphi(\varepsilon_n)$ в виде

$$\varphi(\varepsilon_n) = 1 - \omega(\varepsilon_n), \quad (15)$$

причем $\omega(\varepsilon_n) = 0$ при $\varepsilon_n \leq \varepsilon_T$, где $\omega(\varepsilon_n)$ – функция Ильюшина.

Подставляя (15) в (14), используя (2) и заменяя компоненты девиаторов на соответствующие выражения через напряжения и деформации, получаем $\sigma_x = \left(2G(1 - \omega(\varepsilon_n)) + K - \frac{2}{3}G(1 - \omega(\varepsilon_n))\right)\varepsilon_x + \left(K - \frac{2}{3}G(1 - \omega(\varepsilon_n))\right)\varepsilon_y + \left(K - \frac{2}{3}G(1 - \omega(\varepsilon_n))\right)\varepsilon_z$; $\tau_{xy} = G(1 - \omega(\varepsilon_n))\gamma_{xy}$ и т. д. Преобразовывая последнее выражение, будем иметь $\sigma_x = (2G + \lambda)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z - \frac{4}{3}G\omega(\varepsilon_n)\varepsilon_x + \frac{2}{3}G\omega(\varepsilon_n)\varepsilon_y + \frac{2}{3}G\omega(\varepsilon_n)\varepsilon_z$; $\tau_{xy} = G\gamma_{xy} - G\omega(\varepsilon_n)\gamma_{xy}$ и т. д., откуда несложно получить

$$\{\sigma_i\} = [\mathbf{E}_0]\{\varepsilon\} - [\mathbf{E}_n^{gp}]\{\varepsilon\}, \quad [\mathbf{E}_n^{gp}] = \frac{2}{3}G\omega(\varepsilon_n) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где $[\mathbf{E}_0]$ определяется так же, как и в (11). Очевидно, что при $\varepsilon_n \leq \varepsilon_T$ выражение (16) полностью совпадает с (11). Как и для микросваи, подставляя (12) в (16), а затем полученное выражение в (5), учитывая произвольность $\{\mathbf{g}\}$, будем иметь

$$\{\mathbf{R}^{gp}\} + [\mathbf{R}_n^{gp}]\{\mathbf{g}^{gp}\} = [\mathbf{K}^{gp}]\{\mathbf{g}^{gp}\}, \quad (17)$$

где $\{\mathbf{R}_n^{gp}\} = V[\mathbf{D}^{gp}]^T[\mathbf{E}_n^{gp}][\mathbf{D}^{gp}]$, $[\mathbf{K}^{gp}] = V[\mathbf{D}^{gp}]^T[\mathbf{E}_0][\mathbf{D}^{gp}]$ – матрица жесткости конечного элемента грунта.

Железобетонные плиты. Из первой гипотезы Кирхгофа следует, что деформации $\varepsilon_z = 0$. Воспользовавшись уравнениями (9), получим $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$. Следовательно, прогиб плиты не зависит от z , т. е. $w = w(x, y)$.

Из второй гипотезы следует, что прямоугольник, образованный вдоль осей OZ и OX или OZ и OY , не изменится, т. е. касательные деформации γ_{yz} и γ_{zx} равны нулю. Подставив послед-

нее равенство в (9), получаем $\gamma_{yz} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$, $\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Интегрируя последние выражения по z , имеем $u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y)$, $\vartheta = -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y)$, где $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ – произвольные функции.

Согласно третьей гипотезе для срединной плоскости плиты получаем $u_0 = 0$ и $\vartheta_0 = 0$, где u_0 и ϑ_0 – соответственно перемещения срединной плоскости вдоль осей OX и OY . Таким образом, для срединной плоскости, т. е. при $z = 0$, получаем $u_0 = f_1(x, y) = 0$ и $\vartheta_0 = f_2(x, y) = 0$, откуда

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \vartheta = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (18)$$

Соответственно уравнения Коши (9) для тонкой плиты преобразуются к виду

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Из четвертой гипотезы следует, что напряжения вдоль оси OZ $\sigma_z = 0$. Следовательно, векторы деформаций и напряжений будут иметь по три ненулевые компоненты $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}$, $\{\boldsymbol{\sigma}\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}$. В плите реализуется плоское напряженное состояние. Используя закон Гука для этого случая [4], приходим к (16), причем матрицы $[\mathbf{E}_0^{пл}]$ и $[\mathbf{E}_H^{пл}]$ будут следующими:

$$[\mathbf{E}_0^{пл}] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{E}_H^{пл}] = \frac{2}{3} G \omega(\varepsilon_H) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Рассмотрим прямоугольный конечный элемент, работающий на изгиб при действии поперечной нагрузки [2, 6]. Каждый узел конечного элемента будет иметь три степени свободы: $\{\mathbf{g}_{cp}^{пл}\}^T = \{w \quad \theta_x \quad \theta_y\}$, где w – перемещение вдоль оси OZ ; θ_x – угол поворота относительно оси OX ; θ_y – угол поворота относительно оси OY , причем $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$, $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$.

Для выражения поверхности прогиба принимается полином, удовлетворяющий однородному дифференциальному уравнению изгибаемой плиты [2, 6]: $w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^3 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3$. Дифференцируя это выражение, получаем

$$\{\mathbf{g}_0^{пл}\} = [\mathbf{A}^{пл}] \{\boldsymbol{\alpha}^{пл}\}, \quad [\mathbf{A}^{пл}] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^2 y & xy^2 & x^3 & y^3 & x^3 y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & x & x^2 & 2xy & 0 & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & 0 & y & 2xy & y^2 & 3x^2 & 0 & 3x^2 y & y^3 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где $\{\alpha^{\text{e}}\}^T = \{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6 \ \alpha_7 \ \alpha_8 \ \alpha_9 \ \alpha_{10} \ \alpha_{11} \ \alpha_{12}\}$.

Так как равенство (20) имеет место для любой точки прямоугольного конечного элемента, то для его вершин справедливы соотношения

$$\{\mathbf{g}_{\text{cp}}^{\text{пл}}\} = [\mathbf{B}^{\text{пл}}] \{\alpha^{\text{пл}}\}, \quad \{\mathbf{g}_{\text{cp}}^{\text{пл}}\}^T = \{w_{z_1} \ \theta_{x_1} \ \theta_{y_1} \ w_{z_2} \ \theta_{x_2} \ \theta_{y_2} \ w_{z_3} \ \theta_{x_3} \ \theta_{y_3} \ w_{z_4} \ \theta_{x_4} \ \theta_{y_4}\}, \quad (21)$$

где $[\mathbf{B}^{\text{пл}}]$ – координатная матрица [2, 6]; x_i, y_i, z_i ($i = \overline{1,4}$) – координаты узлов конечного элемента. Из (21) следует

$$\{\alpha^{\text{пл}}\} = [\mathbf{B}^{\text{пл}}]^{-1} \{\mathbf{g}_{\text{cp}}^{\text{пл}}\}. \quad (22)$$

Подставив соотношения (21) в уравнения Коши (9) и продифференцировав их, получим

$$\{\xi\} = -z [\mathbf{C}^{\text{пл}}] \{\alpha^{\text{пл}}\}, \quad [\mathbf{C}^{\text{пл}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2y & 0 & 6x & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 0 & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4x & 4y & 0 & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Подставляя равенство (22) в (23), получаем

$$\{\xi\} = -z [\mathbf{C}^{\text{пл}} [\mathbf{B}^{\text{пл}}]^{-1}] \{\mathbf{g}_{\text{cp}}^{\text{пл}}\}. \quad (24)$$

Учитывая (19), подставим (24) в (16) и получим $\{\sigma\} = -z [\mathbf{E}_0^{\text{пл}} [\mathbf{C}^{\text{пл}} [\mathbf{B}^{\text{пл}}]^{-1}] \{\mathbf{g}_{\text{cp}}^{\text{пл}}\} + z [\mathbf{E}_h^{\text{пл}} [\mathbf{C}^{\text{пл}} [\mathbf{B}^{\text{пл}}]^{-1}] \{\mathbf{g}_{\text{cp}}^{\text{пл}}\}$. Подставляя последние выражения для деформаций и напряжений в выражение (5), имеем

$$\{\tilde{\mathbf{g}}_{\text{cp}}^{\text{пл}}\}^T \{\mathbf{R}^{\text{пл}}\} = \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \{\tilde{\mathbf{g}}_{\text{cp}}^{\text{пл}}\}^T [\mathbf{B}^{\text{пл}}]^{-1T} [\mathbf{C}^{\text{пл}}]^T z \left([\mathbf{E}_0^{\text{пл}} [\mathbf{C}^{\text{пл}} [\mathbf{B}^{\text{пл}}]^{-1}] \{\mathbf{g}_{\text{cp}}^{\text{пл}}\} - [\mathbf{E}_h^{\text{пл}} [\mathbf{C}^{\text{пл}} [\mathbf{B}^{\text{пл}}]^{-1}] \{\mathbf{g}_{\text{cp}}^{\text{пл}}\} \right) dz dx dy, \quad (25)$$

где a, b – размеры конечного элемента вдоль осей OX и OY соответственно, h – толщина конечного элемента.

Учитывая, что матрица $[\mathbf{B}^{\text{пл}}]$ не зависит от координат, несложно получить выражение, аналогичное (17):

$$\{\mathbf{R}^{\text{пл}}\} + \{\mathbf{R}_h^{\text{пл}}\} = [\mathbf{K}^{\text{пл}}] \{\mathbf{g}_{\text{cp}}^{\text{пл}}\}, \quad (26)$$

где $[\mathbf{K}^{\text{пл}}] = \frac{h^3}{12} [\mathbf{B}^{\text{пл}}]^{-1T} \left(\int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} [\mathbf{C}^{\text{пл}}]^T [\mathbf{E}_0^{\text{пл}} [\mathbf{C}^{\text{пл}}] dx dy \right) [\mathbf{B}^{\text{пл}}]^{-1}$ – матрица жесткости конечного элемента

железобетонной плиты, $\{\mathbf{R}_h^{\text{пл}}\} = \frac{h^3}{12} [\mathbf{B}^{\text{пл}}]^{-1T} \left(\int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} [\mathbf{C}^{\text{пл}}]^T [\mathbf{E}_h^{\text{пл}} [\mathbf{C}^{\text{пл}}] dx dy \right) [\mathbf{B}^{\text{пл}}]^{-1} \{\mathbf{g}_{\text{cp}}^{\text{пл}}\}$. Интегралы в

последних выражениях несложно вычислить точно.

Для обеспечения общей дискретизированной границы между различными элементами системы предлагается первоначально всю рассматриваемую область разбить на параллелепипеды. Будем считать, что каждый такой параллелепипед, соответствующий грунтовому основанию или микросвае, состоит из шести равновеликих тетраэдров, представляющих собой соответствующие конечные элементы. Параллелепипеды, дискретизирующие плитный фундамент,

в математической модели будут аппроксимироваться плоскими конечными элементами в форме прямоугольников. Степени свободы таких элементов определяются выражением (21) и будут вычислены для срединного слоя параллелепипеда. При составлении ансамбля конечных элементов для всей системы необходимо вычислить узловые перемещения для вершин каждого параллелепипеда плитного фундамента. При этом степени свободы узла плиты должны соответствовать степеням свободы узлов грунтового основания и микросвай, т. е. степени свободы любого узла системы должны определяться вектором $\{u, \vartheta, w\}$. Воспользовавшись (18) и полагая, что направление оси OZ совпадает с направлением действия вертикальных сил, на нижней грани параллелепипеда будем иметь следующие узловые перемещения: $\{\mathbf{g}^{\text{пл}}\} = [\mathbf{L}]\{\mathbf{g}_{\text{ср}}^{\text{пл}}\}$,

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & [\mathbf{Z}] & [\mathbf{Z}] & [\mathbf{Z}] \\ [\mathbf{Z}] & [\mathbf{M}] & [\mathbf{Z}] & [\mathbf{Z}] \\ [\mathbf{Z}] & [\mathbf{Z}] & [\mathbf{M}] & [\mathbf{Z}] \\ [\mathbf{Z}] & [\mathbf{Z}] & [\mathbf{Z}] & [\mathbf{M}] \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h}{2} \\ 0 & \frac{h}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Отсюда}$$

$$\{\mathbf{g}_{\text{ср}}^{\text{пл}}\} = [\mathbf{L}^{-1}]\{\mathbf{g}^{\text{пл}}\}. \quad (27)$$

Подставив равенство (27) в (26), получим основное уравнение метода конечных элементов в перемещениях для нижней плоскости плиты.

Формирование глобальной матрицы жесткости и учет граничных условий. Матрица жесткости системы, определяющая жесткость конструкции в целом, строится в следующем порядке: $K_{ij}^{\text{гл}} = \sum_{r=1}^N K_{ij}^r$, где N – количество конечных элементов, которыми дискретизирована рассматриваемая система; $K_{ij}^{\text{гл}}$ – элемент глобальной матрицы жесткости $[\mathbf{K}^{\text{гл}}]$, характеризующий вклад j -го единичного перемещения в i -й компонент узловых сил всей системы в целом; K_{ij}^r – элемент матрицы жесткости $[\mathbf{K}^r]$ r -го конечного элемента, характеризующий вклад j -го единичного перемещения в i -й компонент узловых сил, причем матрицы жесткости $[\mathbf{K}^r]$ могут вычисляться по формулам (13), (17), (26).

Разумеется, под знаком суммы ненулевой вклад дадут лишь элементы, примыкающие к узлу, в котором приложен i -й компонент сил. Таким образом, для всей рассматриваемой системы

$$[\mathbf{K}^{\text{гл}}]\{\mathbf{g}^{\text{узл}}\} = \{\mathbf{R}\} + \{\mathbf{R}_n\}, \quad (28)$$

где $[\mathbf{K}^{\text{гл}}]$ – глобальная матрица жесткости; $\{\mathbf{g}^{\text{узл}}\}$ – вектор узловых перемещений всей системы; $\{\mathbf{R}\}$ – вектор узловых усилий; $\{\mathbf{R}_n\}$ – вектор узловых усилий, определяемый для конечных элементов грунтового основания и плитного фундамента по формулам (17), (26).

Решение полученного основного уравнения метода конечных элементов (28) для определения напряженно-деформированного состояния системы производится с учетом граничных условий. При исследовании математической модели граничные условия определяются значениями перемещений на границах активной зоны грунтового основания и зависят от способа закрепления железобетонной плиты. При этом предполагается, что в каждом узле любого конечного элемента могут быть заданы известные перемещения или узловые усилия.

Существует три основных способа закрепления фундаментной плиты и связи ее с другими несущими элементами здания: шарнирное, жесткое и свободное соединения.

Пусть край плиты, параллельный оси OX , имеет шарнирное соединение, тогда вдоль этого края прогиб и изгибающий момент будут равны нулю, т. е. $w=0$ и $M_x = 0$.

Пусть край плиты, параллельный оси Ox , заземлен, тогда прогиб и угол поворота по всей образующей края должны равняться нулю, т. е. $w=0$ и $\theta_y = 0$, откуда из равенств (18) следует $u = 0$.

Пусть край плиты, параллельный оси Ox , свободно опирается, тогда изгибающий момент и усилие, передающееся от плиты на ребро, будут равны нулю, т. е. $M_x = 0$ и $R_x = 0$. Получается, что функция прогиба на этом крае не зависит от x и, по крайней мере, дважды дифференцируема по y , следовательно, $u = 0$.

Аналогично рассуждая, можно определить граничные условия и для других краев плиты.

3. Алгоритм компьютерного моделирования и численный эксперимент

С помощью графического интерфейса, реализующего методику визуального объектно-ориентированного моделирования [3, 7], осуществляется задание геометрической конфигурации исследуемой системы, физических свойств (модуля упругости, коэффициента Пуассона) ее элементов, граничных условий и действующих внешних сил.

Шаг 1. Согласно изложенному алгоритму формируется матрица жесткости $[K^{гл}]$ и вектор узловых усилий $\{R\}$.

Шаг 2. Учитываются граничные условия, для этого осуществляется корректировка матрицы $[K^{гл}]$ и вектора $\{R\}$. Результатом корректировки матрицы $[K^{гл}]$ является понижение ее размерности за счет исключения граничных значений перемещений и моментов, при этом не нарушается ленточная и симметричная структура матрицы. В итоге будут получены: новая матрица жесткости $[K_0^{гл}]$, новый вектор узловых усилий $\{R_0\}$, вектор неизвестных узловых перемещений и моментов $\{g_0^{узл}\}$, вектор известных граничных перемещений и моментов $\{g_{гр}^{узл}\}$ и вектор номеров граничных узлов.

Шаг 3. Осуществляется преобусловливание Холецкого для матрицы $[K_0^{гл}]$.

Шаг 4. На первом шаге в системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (28) предполагается, что вектор $\{R_n\}$ отсутствует.

Шаг 5. Решается СЛАУ (28) с преобусловленной матрицей $[K_0^{гл}]$ методом сопряженных градиентов [2].

Шаг 6. Для каждого конечного элемента грунтового основания и плитного фундамента осуществляется проверка критерия пластичности (1). В случае его удовлетворения вычисляются компоненты вектора $\{R_n\}$ по формуле (17) для элементов грунтового основания или по формуле (26) для конечного элемента плитного фундамента.

Шаг 7. Осуществляется решение СЛАУ (28) с новым вектором свободных членов.

Шаг 8. Проверяется, достигнута ли заданная точность найденного решения [4–6]. В случае невыполнения данного условия осуществляется переход на шаг 6.

Шаг 9. Осуществляются визуализация и сохранение результатов моделирования.

Для проверки адекватности математической модели, верификации алгоритмов и программного обеспечения была рассмотрена реальная система плитных фундаментов на неоднородном грунтовом основании, упрочненном набивными фундаментами [1]. Грунтовое основание представлено пылеватыми и мелкими песками с включением рыхлых слоев толщиной до 1 м со следующими характеристиками: $E = 9$ МПа, $\mu = 0,41$. На плитный фундамент размером 20×30 м и толщиной 0,35 м с утолщениями до 0,65 м в местах опоры колонн действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 114 \text{ кН/м}^2$. Модуль упругости и коэффициент Пуассона для плиты и микросваи соответственно будут равны $E = 27\,000$ МПа, $\mu = 0,33$ и $E = 24\,000$ МПа, $\mu = 0,2$. Диаметр в верхней части микросваи равен 1,2 м, диаметр в нижней части – 0,5 м, длина – 2 м. При моделировании цилиндрические микросваи будем заменять равновеликими параллелепипедами.

Функция Ильюшина при активном процессе ($\varepsilon_T \leq \varepsilon_H$) принята в виде [4]

$$\omega(\varepsilon_H) = A \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_H} \right)^\alpha, \text{ где значения постоянных взяты для плиты } (\varepsilon_T^{\text{т.б.}} = 0,001, A^{\text{т.б.}} = 0,93, \alpha^{\text{т.б.}} = 1,57) \text{ и для грунта } (\varepsilon_T^{\text{г.б.}} = 0,002, A^{\text{г.б.}} = 0,98, \alpha^{\text{г.б.}} = 1,12).$$

Было осуществлено компьютерное моделирование указанной системы, причем в силу симметричности рассматривалась только ее четверть. Плитный фундамент дискретизировался 2400 конечными элементами в форме прямоугольников, грунтовое основание и микросваи дискретизировались 460 800 конечными элементами. Количество узлов в дискретной математической модели системы составило 82 533. Размерность системы линейных алгебраических уравнений (28) после учета граничных условий составила 219 900 неизвестных.

При использовании метода сопряженных градиентов для решения СЛАУ (28) итерационный процесс можно остановить на какой-либо итерации, не дожидаясь полной сходимости. В работе применялся критерий завершения итерационного процесса, когда в 70 % точек с максимальными значениями перемещений разница между предыдущими и последующими значениями не превышала заданной точности. Таким образом, для рассматриваемой задачи при использовании указанного критерия для нахождения линейного решения требовалось порядка 3700 итераций метода сопряженных градиентов, а время нахождения решения составило 3115 с.

При организации итерационного процесса для нахождения упругопластического решения использовался коэффициент ускорения сходимости $\kappa_{\text{о.б.}} = 1,55$ [6], т. е. на каждом шаге итерационного процесса решалась задача $[\mathbf{K}_{\text{гл}}] \{ \mathbf{g}^{\text{узл}} \} = \{ \mathbf{R} \} + \kappa_{\text{уск}} \{ \mathbf{R}_H \}$. Как показал вычислительный эксперимент, применение коэффициента ускорения сходимости позволило снизить количество итераций до 5–7.

Общее время нахождения напряженно-деформируемого состояния системы согласно предложенному алгоритму составило примерно 7537 с.

Результаты моделирования (рисунок) сравнивались с данными натурных наблюдений за фактическими осадками фундаментов построенного здания [1, рис. 3]. Максимальная величина мгновенных осадок была в центре плитного фундамента и составила: в результате исследования математической модели 1,53 мм и согласно наблюдениям – 1,62 мм. Минимальная величина осадок была в углах плитного фундамента и составила 0,2 мм, что соответствовало экспериментальным данным. В целом же, расхождения между экспериментальными данными и результатами вычислительного эксперимента не превышали 7 %.

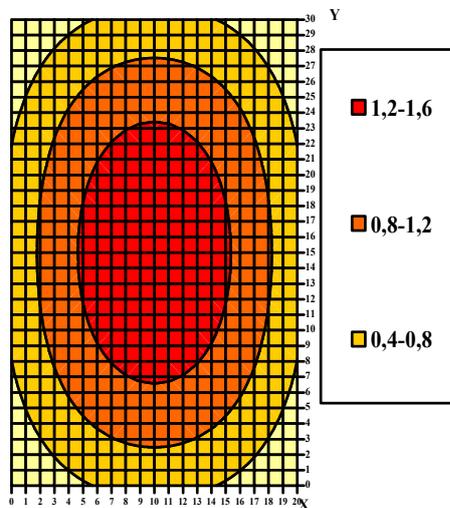


Рис. Осадки плитного фундамента, мм

Заключение

Согласно результатам проведенного моделирования предлагаемая математическая модель, алгоритм и программное обеспечение могут быть использованы для исследования напряженно-деформированного состояния сложных систем неоднородных упругопластических дисперсных и сплошных твердых тел.

Достоинством предлагаемой математической модели и методики ее исследования является возможность рассматривать напряженно-деформированное состояние сложных систем неоднородных упругопластических дисперсных и сплошных твердых тел с различными граничными условиями.

Итерационный процесс построен таким образом, что глобальная матрица жесткости на каждом шаге будет оставаться неизменной. Это позволяет значительно ускорить процесс нахождения решения. Для этого на нулевой итерации (при нахождении мгновенных деформаций) можно осуществить преобусловливание матрицы $[K^{gl}]$. Кроме того, для большего ускорения итерационного процесса в методе сопряженных градиентов в качестве начального приближения можно выбрать решение, полученное на предыдущем шаге. Таким образом, время, затрачиваемое на нахождение деформаций на каком-либо шаге итерационного процесса, оказалось значительно меньше времени, требуемого для выполнения нулевой итерации, т. е. нахождения линейных деформаций.

Список литературы

1. Сеськов, В.Е. Эффективные фундаменты для каркасных зданий и сооружений / В.Е. Сеськов, В.Н. Лях // Современные архитектурно-конструктивные системы зданий и сооружений, новые строительные материалы и технологии: сб. тр. – Минск: Стринко, 2000. – С. 109–118.
2. Быховцев, В.Е. Компьютерное моделирование систем нелинейной механики грунтов / В.Е. Быховцев, А.В. Быховцев, В.В. Бондарева. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2002. – 215 с.
3. Курочка, К.С. Формализация процесса компьютерного моделирования линейной системы: здание–фундамент–основание / К.С. Курочка // Материалы IV Республиканской науч. конф. студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях». – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2001. – С. 29–31.
4. Горшков, А.Г. Теория упругости и пластичности: учеб. для вузов / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М.: Физматлит, 2002. – 416 с.
5. Ильюшин, А.А. Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
6. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич; пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
7. Быховцев, В.Е. Визуальное объектно-ориентированное моделирование зданий с фундаментами на грунтовых основаниях / В.Е. Быховцев, А.В. Быховцев, К.С. Курочка // Тр. Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 10–12 окт. 2001 г.: в 2 т. – Т. 2. – Минск: Стринко, 2001. – С. 5–16.

Поступила 23.04.07

Гомельский государственный технический
университет имени П.О. Сухого,
Гомель, пр. Октября, 48
e-mail: kkostik@tut.by

K.S. Kurachka

**MATHEMATICAL MODELLING
STRESS-STRAINED STATE OF COMPLEX SYSTEMS
CONSISTING OF HETEROGENEOUS ELASTOPLASTIC
DISPERSE AND CONTINUOUS FIRM BODIES**

A mathematical model of a complex 3D system consisting of heterogeneous elastoplastic basis, the flexible plate and micropiles is considered. The algorithm and the software of mathematical model is based on a finite elements method. A system decomposition method is applied. At this small elastoplastic deformations were accepted for land bases layers and flexible plates. Besides the hypotheses of Kirchhoff were accepted for plates.

The divergence of results of mathematical model and available experimental data for the considered system has not exceeded 7 %.