

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 539.3

О.Л. Швед

ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С КОНЕЧНЫМИ «ГРАДИЕНТАМИ» УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Предлагается модель сплошной среды упруговязкопластического тела. Получено допустимое определяющее уравнение в рамках кинематической теории при условии, что среда может проявлять вязкие свойства только при активном процессе. Моделируются все лучевые нагружения в пространстве напряжений. При мягком нагружении тела, все элементы которого находятся в упругом состоянии, определяющее уравнение переходит в уравнение состояния упругопластической среды, описывающее эффект Савара – Массона.

Введение

Рассмотрим деформируемое твердое тело при условии учета нелинейности изменения его геометрии. Сюда можно включить, вероятно, большинство металлов и сплавов. Температуру считаем постоянной, будем предполагать, что явление ползучести отсутствует (вязких деформаций нет), и тогда необратимые деформации будут только пластическими.

Известно, что твердое тело обладает четырьмя фундаментальными свойствами: упругостью, пластичностью, вязкостью и прочностью [1]. Сосредоточим внимание на первых трех из них, главным из которых для нас является упругость, поскольку определяющие уравнения нелинейно-упругого тела достаточно разработаны [2] и могут служить основой возможных дальнейших модельных обобщений. По Нахди [3] эти три свойства можно объединить одним термином – «зависимая от скорости» пластичность, а свойства упругости и пластичности – «не зависящая от скорости» пластичность, или упругопластичность. Согласно работе [4] (см. также ссылку в ней на статью Нахди, Мерча), материал, который обладает вязкими свойствами только в пластическом состоянии (при активном нагружении), называется упруговязкопластическим. Более общий материал в настоящей работе обсуждаться не будет. Кроме того, для построения иерархии моделей среды (упругой – упругопластической – упруговязкопластической) следует изменить указанное определение, заменив в нем слово «обладает» на слова «может обладать». Условие включения свойства вязкости оговорим ниже.

Для идеальных материалов считается, что упругий материал лишен «памяти» о процессе, упругопластический имеет «память» об истории деформации, а упруговязкопластический имеет еще и «память» об истории скорости деформации. Моделирование последнего требует привлечения времени t . Трудности совместного описания не зависящих и зависящих от времени явлений возникают уже в геометрически линейной теории и отмечены в [4]. Согласно обзорной статье [3] положение в этой области исследований при конечных деформациях (в геометрически нелинейной теории) является неудовлетворительным. Вероятно, это связано с естественными и неудачными попытками использования стандартной методологии линейной теории для нелинейных моделей. Не останавливаясь здесь на состоянии исследований в настоящее время, укажем на новое направление при формулировке определяющих уравнений упруговязкопластической среды для математического моделирования поведения реального деформируемого твердого тела. Цель данной работы – показать возможность описания эффекта Савара – Массона (Портвена – Ле Шателье) при учете свойства вязкости материала.

1. Определяющее уравнение

Проблема формулировки определяющих (физических) уравнений неупругой среды является важной и «неразрешимой» проблемой в нелинейной механике деформируемого твердого

тела. Особое значение имеет уровень общности предлагаемых уравнений: возможность описания фундаментальных свойств, основных явлений и эффектов. Определяющее уравнение записывается всегда для элемента среды, поэтому потребуется дополнительное предположение. Поведение элемента тела должно зависеть от состояния остальных элементов и от условия нагружения тела, причем такая зависимость задается следующим образом. При мягком нагружении разгруженного тела, все элементы которого находятся в пассивном процессе, определяющее уравнение записывается как уравнение состояния упругопластического тела. Условие непрерывности при такой замене уравнений соблюдается. Последнее требование является необычным для используемой концепции материала [2], но вполне реализуемым.

Обратимся сначала к простому, одноосному нагружению, например растяжению. На рис. 1 изображены обычные гладкие диаграммы $\sigma - \epsilon$ жесткого нагружения $\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon})$ и выражающая эффект Савара – Массона [5] ступенчатая диаграмма $\sigma - \epsilon$ мягкого нагружения. При жестком нагружении задается скорость деформирующего инструмента, а при мягком нагружении – только внешние силы, и материал сам определяет скорость процесса, причем графики функций напряжения $\sigma = \sigma(t)$ имеют вполне определенную форму. Жесткие диаграммы нагружения приведены для постоянной скорости деформации $\dot{\epsilon}$, причем кривой, расположенной ниже, соответствует меньшая по величине скорость деформации. Кривая при приблизительно нулевой скорости деформации (статическая кривая) также обычно изображается гладкой [4]. Возникает вопрос, соответствует ли она диаграмме при нулевой скорости деформации в предельном смысле, если предполагать, что такой предел существует. Экспериментально проверить этот факт невозможно ввиду ограниченной разрешающей способности макроэксперимента [6], однако есть основание для отрицательного ответа, если не забывать о ступенчатой кривой мягкого нагружения.

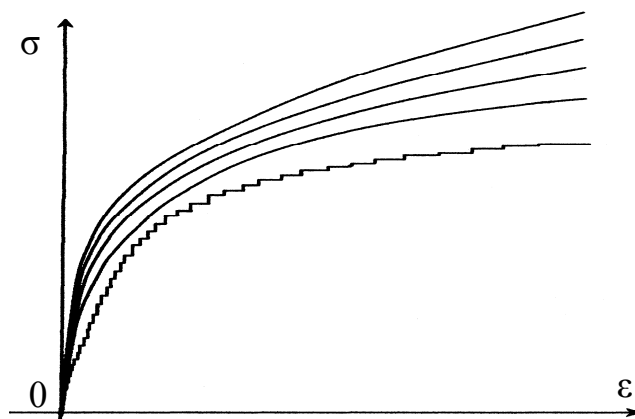


Рис. 1. Диаграммы жесткого нагружения и диаграмма мягкого нагружения при растяжении

К настоящему времени сложилась любопытная ситуация: обнаруженный в 1837 г. эффект Савара – Массона [5] до сих пор не учитывается и даже не обсуждается специалистами, занимающимися построениями феноменологических теорий необратимых деформаций [7]. Наверное, поэтому в литературе отсутствуют совмещенные изображения указанных диаграмм. Можно только предположить, что ступенчатая диаграмма расположена ниже, как и представлено на рис. 1. Диаграмма мягкого нагружения представляет собой многократно повторяющиеся участки упругости и течения, т. е. фактически одноосную кривую упругопластичности, которая по определению не зависит от скорости. Формально это есть диаграмма при любой скорости нагружения, в частности при нулевой скорости, разумеется, в предельном смысле. Диаграмма упругопластичности должна быть предельной для диаграммы упруговязкопластичности при скорости деформации, стремящейся к нулю [3, 4]. Предел последовательности гладких функций не обязан быть гладкой функцией. Известно, что форма гладких диаграмм может быть достаточно произвольной [8], тогда как ступенчатая диаграмма представляет собой график неубывающей

функции, обладающей следующими свойствами: участки упругости при возрастании ε уменьшаются, а участки течения увеличиваются, и в пределе следует ожидать только один участок идеальной пластичности при данном нагружении.

Представленные диаграммы одноосного растяжения позволяют предположить, что явление неустойчивости (эффект Савара – Массона) не является патологическим, оно всегда существует и соответствует нашим представлениям об упругопластичности, но трудно обнаруживается в макроэксперименте. Согласно работе [7] обсуждаемый эффект является главным и ярким проявлением дискретного строения твердого тела. Поэтому, естественно, возникают трудности его описания в рамках концепции материала моделью сплошной среды. Разность напряжений в точках гладкой и ступенчатой кривых при одной величине деформации зависит от скорости деформации, и гладкие кривые скрывают указанное явление.

Основная идея предлагаемого подхода к формулировке определяющих уравнений упруговязкопластичности состоит в естественном разделении напряжений. Обозначим симметричные тензоры не зависящих от скорости деформации упругих напряжений \mathbf{T}_e и зависящих от скорости деформации, вязких (диссипативных) напряжений \mathbf{T}_f . Физический смысл тензора \mathbf{T}_f связан с внутренним трением в среде. Удельная мощность части упругих напряжений также рассеивается при течении. Тензор напряжений Коши теперь можно записать в виде [7, 9]

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_f. \quad (1)$$

Упругие напряжения Коши представляются по [2, 10]:

$$\mathbf{T}_e = 2L_3^{-1} \overset{\tau}{\nabla} \mathbf{R}^T \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{G}} \cdot \overset{\tau}{\nabla} \mathbf{R}, \quad (2)$$

где скалярная функция ε – удельная потенциальная энергия деформации; $\overset{\tau}{\nabla} \mathbf{R}$ – «градиент» упругой деформации; \mathbf{G} – упругая мера Коши – Грина; L_3 – третий инвариант мер искажений $\mathbf{V}, \mathbf{U} (\mathbf{U}^2 = \mathbf{G})$. Тензор-«градиент» в активном процессе определяется через полярное разложение $\overset{\tau}{\nabla} \mathbf{R} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{O}$ (\mathbf{O} – ортогональный тензор, сопровождающий упругую деформацию) [10] и не является градиентом деформации в обычном смысле [3], поэтому используем кавычки, сохраняя для него обычное символическое обозначение при помощи набла-оператора. В пассивном процессе материальная производная тензора-«градиента» определяется так же, как для тензора-градиента общей деформации [2].

При задании тензора \mathbf{T}_f уравнение (1) представляет собой конечное соотношение кинематической теории, где тензор-«центр» \mathbf{T}_f зависит от скорости процесса и сам по себе не влияет на формулировку включающего необратимый механизм пластичности критерия активного процесса, за которую отвечает только независимый от скорости тензор-«радиус» \mathbf{T}_e и объективная производная его девиатора.

На основании принятого уравнения (1) и согласно упругопластической модели [10] можно утверждать, что общий процесс деформирования тела происходит попеременным чередованием сжимаемых и несжимаемых процессов для его элементов, так как на этапе течения материал предполагается несжимаемым. Очевидно, при этом у материала появляются дополнительные степени свободы, так как чисто пластических и жестких областей в обычном смысле не будет. Это позволит, вероятно, адекватно моделировать процесс прямого выдавливания при обработке металлов давлением. Решение данной задачи по классической теории пластичности обнаруживает наличие зоны застоя материала, а физические эксперименты Треска и Бриджме-

на показывают, что таких зон нет и материал течет, как жидкость. Имеет место требующее устраниения серьезное качественное расхождение теории и эксперимента [7].

2. Одноосное нагружение

Для одноосного варианта теории с функцией сопротивления деформации $F(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ можно записать: $\sigma = \rho + r$. Считаем, что кривые деформирования $F(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ при фиксированной скорости деформации $\dot{\varepsilon} \geq 0$ известны. Тогда получается, что график $r = F(\varepsilon, 0)$ – ступенчатая кривая. Для учета скорости деформации при определении величины сопротивления деформации положим для вязкого напряжения

$$\rho = F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) - F(\varepsilon, 0) - \varphi(\dot{\varepsilon}) \int_0^t L(t - \zeta) dF(\varepsilon, \dot{\varepsilon}), \quad (3)$$

где третье слагаемое представляет собой функционал «памяти».

Дифференциал $dF(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ вычисляется по второй переменной $\dot{\varepsilon}$, а интеграл понимается в смысле Лебега – Стильтьеса. Интеграл обеспечивает учет изменения скорости деформации. Для достаточно гладких функций имеем $dF(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \frac{\partial F}{\partial \dot{\varepsilon}} d\dot{\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial \dot{\varepsilon}} \ddot{\varepsilon} dt$ и при $\dot{\varepsilon} = const$ интеграл обращается в нуль. Интеграл Лебега – Стильтьеса позволяет учитывать и скачкообразное изменение функции $F(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$. Для упрощения положим ядро наследственности $L(t - \zeta) = L_0 e^{-\alpha(t-\zeta)}$, где $L_0, \alpha > 0$ – постоянные.

Функционал φ позволяет осуществить резкое затухание эффекта «памяти» об истории изменения скорости деформации при $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$, так как диаграмма $\sigma = F(\varepsilon, 0)$ лишена такого свойства. Можно положить $\varphi = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_{\max}}\right)^\gamma$, где γ – положительное и близкое к нулю число, $\dot{\varepsilon}_{\max}(t)$ – максимальное значение $\dot{\varepsilon}(\zeta)$, $0 \leq \zeta \leq t$. В случае возникновения неопределенности при $\dot{\varepsilon}_{\max}(t) = 0$ третье слагаемое в (3) доопределяется с учетом $0 \leq \varphi \leq 1$ и нулевого значения интеграла по непрерывности также нулевым значением. Тогда получаем $\rho = 0$, $\sigma = r$. Если оказывается, что $\dot{\varepsilon} \neq 0$, то $\rho \neq 0$ и начинает работать модель упруговязкопластичности до тех пор, пока скорость деформации не обратится в нуль.

Например, при ступенчатом переключении скорости деформации с $\dot{\varepsilon}_1 \neq 0$ на $\dot{\varepsilon}_2 \neq 0$ в момент времени t_0 имеем

$$\sigma = F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}_2) - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\max(\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2)}\right)^\gamma L_0 e^{-\alpha(t-t_0)} (F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}_2) - F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}_1)).$$

Условие непрерывной зависимости напряжения от скорости деформации выполняется, т. е. при $\dot{\varepsilon}_2 \rightarrow \dot{\varepsilon}_1$ $\sigma \rightarrow F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}_1)$.

Постоянные L_0, α, γ должны определяться на основе экспериментальных данных [11] для ступенчатого изменения скорости деформации (рис. 2):

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_1 (0 < t < t_1), \quad \dot{\varepsilon}(t) = 0 (t_1 \leq t \leq t_2), \quad \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_2 (t_2 < t). \quad (4)$$

Соответственно имеем: деформацию $\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_1 t$, $\varepsilon(t) = \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 = \dot{\varepsilon}_1 t_1$), $\varepsilon(t) = \varepsilon_1 + \dot{\varepsilon}_2 (t - t_2)$; вязкое напряжение $\rho(t) = F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}_1) - F(\varepsilon, 0)$, $\rho(t) = 0$, $\rho(t) = F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}_2) - F(\varepsilon, 0) +$

$+ \left(\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\max(\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2)} \right)^\gamma (L_0 e^{-\alpha(t-t_1)} (F(\varepsilon_1, \dot{\varepsilon}_1) - F(\varepsilon_1, 0)) - L_0 e^{-\alpha(t-t_2)} (F(\varepsilon_1, \dot{\varepsilon}_2) - F(\varepsilon_1, 0)))$; упругое напряжение $r(t) = F(\varepsilon, 0)$.

Если полная разгрузка в промежутке $t_1 \leq t \leq t_2$ не производится (имеет место пауза), то такое разгрузочное напряженное состояние называется нейтральным. Упругие и общие деформации не изменяются. Если применить при паузе мягкое нагружение, реализуется модель упругопластичности. Точка процесса (ε, σ) либо перемещается по ступенчатой диаграмме в случае активного нагружения, либо имеет место разгрузка.

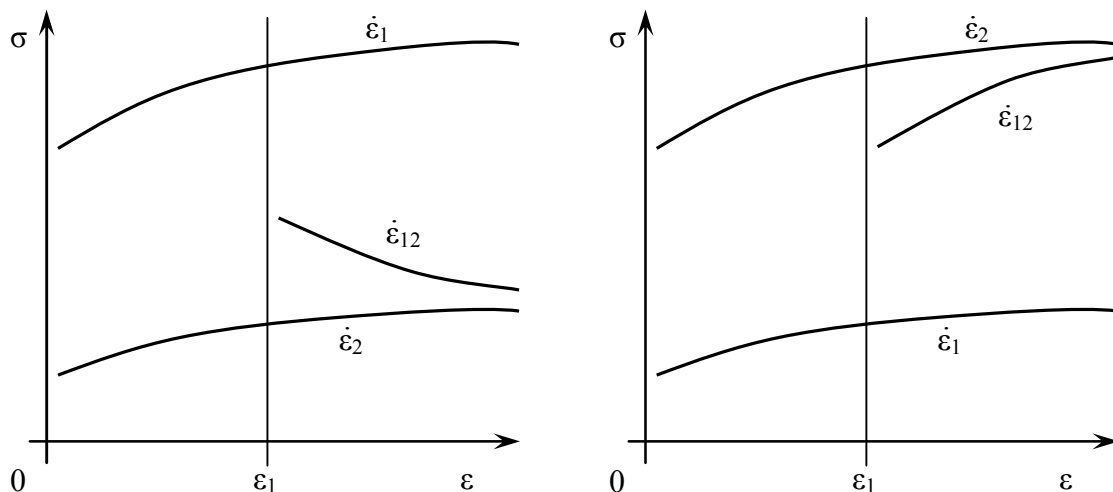


Рис. 2. Эффект «памяти» среды о скорости деформации $\dot{\varepsilon}_1 > \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_1 < \dot{\varepsilon}_2$ (4)

3. Произвольное нагружение

Рассмотрим теперь общий случай нагружения. Сформулируем требования к искомому тензору \mathbf{T}_f , которые потребуется затем согласовать между собой:

1. Пусть тензор \mathbf{T}_f зависит от тензора \mathbf{T}_e , информация о котором служит основой построения.

2. Удельная мощность диссипативных сил $\mathbf{T}_f \cdot \mathbf{D}$ должна быть неотрицательна (две точки означают двойное скалярное произведение [2]). Тогда можно положить для простоты, что \mathbf{T}_f линейно зависит от тензора деформации вектора скорости \mathbf{D} с положительным скалярным коэффициентом, так как $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \geq 0$.

3. Тензор \mathbf{T}_f не должен портить изотропии среды, так как за образование анизотропии отвечает только пластическая деформация [9]. Признаком анизотропии является наличие двух несоосных тензоров в правой части соотношения (1). Значит, \mathbf{T}_f зависит от соосной \mathbf{T}_e части тензора \mathbf{D} .

4. Все лучевые нагружения (поскольку они важны), в том числе одноосные растяжение, сжатие и чистый сдвиг должны моделироваться как для упруговязкопластической среды, так и для упругопластической. Поэтому следует наложить более жесткое ограничение $\mathbf{T}_f = c \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}_e \mathbf{T}_e (c \geq 0)$, однако для непрерывного описания процесса одного тензора \mathbf{T}_e будет не хватать.

5. Должен учитываться эффект «памяти» материала о скорости процесса деформации [11]. Для этого можно использовать определенный выше функционал ρ , параметры которого следует записать в тензорно-инвариантном виде. Нужно использовать данные по двум ба-

зовым экспериментам – растяжению и сжатию. «Память» среды о процессе деформации учитывается изменением и поверхности текучести в пространстве упругих напряжений, и определяющего уравнения упругопластичности (2) [10]. Там появляются новые ненулевые величины: тензор остаточных напряжений (значение тензора \mathbf{T}_e в момент полной разгрузки) и параметры анизотропии, порождающие дополнительные тензорные слагаемые в выражении для \mathbf{T}_e .

В модели упругопластической среды [10] критерий активного процесса вводится при помощи критериального девиатора $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$. Он определяется как девиаторная часть объективной производной тензора упругих напряжений, который вычисляется по известным соотношениям нелинейной упругости. В статье [12] получен общий метод нахождения девиаторов потенциальных направлений, порождаемых девиатор-оператором $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$. Девиаторы $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ названы главными, так как они находятся однозначно и определяют девиаторное сечение поверхности текучести в пространстве упругих напряжений \mathbf{T}_e . Пять девиаторов \mathbf{N}_i , вычисленных в точке \mathbf{T}_e , образуют локальный ортонормированный базис пространства девиаторов симметричных тензоров второго ранга. Любой такой девиатор может быть записан в указанном тензорном базисе:

$$\text{dev } \mathbf{T}_e = \sum_{i=1}^5 \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i, \text{ dev } \mathbf{D} = \sum_{i=1}^5 \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i, \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^5 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \text{ и } \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j = 0 (i \neq j), \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_i = 1.$$

Девиаторы \mathbf{N}_j ориентируются так, чтобы было $\mathbf{T}_e \cdot \mathbf{N}_j > 0, j = 1, 2$. Из работы [12] следует, что выполняется $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_i = \gamma_i \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_i$ и $\gamma_i \neq 0, \gamma_1, \gamma_2 > 0$. В активном процессе, исключая оговоренный выше случай, реализуется только одна из трех возможностей.

Случай 1. Рассмотрим сначала регулярную точку поверхности текучести (рис. 3). Критерий активного процесса состоит в условии $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_1 > 0$. Значит, выполняется $\mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_1 > 0$. Если имеет место лучевое нагружение ($\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1$), то получаем $\mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1$.

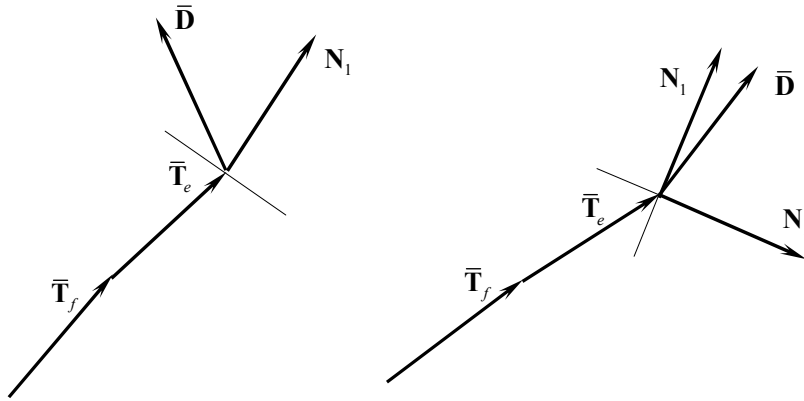


Рис. 3. Активное нагружение (течение) в регулярной и сингулярной точках поверхности текучести. Использована векторная интерпретация тензора

В дальнейшем будем применять обозначения для тензора. Например, для \mathbf{D} норма тензора $\|\mathbf{D}\| = \sqrt{\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}$, нормированный тензор $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \|\mathbf{D}\|^{-1}$. Для последнего выполняется условие $\bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{D}} = 1$. Тензор \mathbf{T}_f можно задать в виде

$$\mathbf{T}_f = \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 \bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_1 \rho \bar{\mathbf{N}}_f. \quad (5)$$

Первый скаляр $\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1$ в правой части (5) обеспечивает непрерывную зависимость \mathbf{T}_f от \mathbf{D} , и если $\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 = 0$ или $\|\mathbf{D}\| = 0$ (в ρ скаляр $\|\mathbf{D}\|$ заменяет $\dot{\epsilon}$), то $\mathbf{T}_f = 0$, происходит разгрузка. Второй скаляр учитывает перенос информации с базовых экспериментов по растяжению и сжатию ($\bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_1 = \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 = 1$) на случай общего нагружения $0 < \bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_1 \leq 1$. Коэффициент при $\bar{\mathbf{N}}_f$ неотрицателен.

Перейдем к определению тензора \mathbf{N}_f . Для модельной реализации лучевых нагружений ($\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 = 1, \mathbf{N}_f = \bar{\mathbf{T}}_e$) и обеспечения неотрицательности удельной мощности вязких напряжений ($\mathbf{T}_f \cdot \mathbf{D} \geq 0$) положим

$$\mathbf{N}_f = \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 \bar{\mathbf{T}}_e + C(1 - \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1) \mathbf{N}_1. \quad (6)$$

Выберем параметр $C > 0$. Вычислим выражение $\mathbf{N}_f \cdot \bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 (\bar{\mathbf{T}}_e \cdot \bar{\mathbf{D}} + C(1 - \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1))$. В активном процессе выполняется $\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 > 0$. Обозначив для простоты $x = \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1, A = \bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_1$, получаем оценку $\bar{\mathbf{T}}_e \cdot \bar{\mathbf{D}} + C(1 - \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1) \geq f = Ax + C(1 - x) - \sqrt{1 - A^2} \sqrt{1 - x^2}$. Здесь использовано неравенство Коши – Буняковского.

Исследуем функцию $f(x)$ при $0 < x \leq 1$. Граничное ее значение $f(1) = A > 0$ и $f(x) \rightarrow C - \sqrt{1 - A^2}$ при $x \rightarrow 0$. Должно выполняться $C \geq \sqrt{1 - A^2}$. Стационарной точкой будет величина $(C - A)(\sqrt{(C - A)^2 + 1 - A^2})^{-1}$. Если положить $C = \sqrt{1 - A^2}$, то точка будет лежать левее $x = 0$ при $(\sqrt{2})^{-1} < A \leq 1$. При $0 < A < (\sqrt{2})^{-1}$ значения C следует минимально увеличить. Положим окончательно:

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{1 - A^2}, \text{ а́ñèè } (\sqrt{2})^{-1} \leq A \leq 1; \\ C &= A - f_0(x_0)(1 - x_0)^{-1}, \text{ а́ñèè } 0 < A < (\sqrt{2})^{-1}; \\ f_0(x) &= Ax + \sqrt{1 - A^2}(1 - x) - \sqrt{1 - A^2} \sqrt{1 - x^2}; \\ x_0 &= (\sqrt{1 - A^2} - A)(\sqrt{(\sqrt{1 - A^2} - A)^2 + 1 - A^2})^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Значение x_0 ($0 \leq x_0 \leq (\sqrt{2})^{-1}$) является точкой минимума функции $f_0(x)$, и выполняется условие $f_0(x_0) \leq 0$. Из (7) следует $f(x) \geq 0$. Таким образом, неотрицательность величины $\mathbf{N}_f \cdot \bar{\mathbf{D}}$ и, следовательно, $\mathbf{T}_f \cdot \bar{\mathbf{D}}$ установлена.

Случай 2. Рассмотрим сингулярную точку поверхности текучести (см. рис. 3). Критерий активного процесса состоит в условии $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_1 > 0$ и $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_2 > 0$ или $\mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_1 > 0$ и $\mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_2 > 0$. При лучевом нагружении имеем $\text{dev } \mathbf{T}_e = \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2, \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2$ и, следовательно, $\mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2$ и $(\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1)^2 + (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2)^2 = 1$. Положим \mathbf{T}_f в виде

$$\mathbf{T}_f = \sqrt{(\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1)^2 + (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2)^2} 2^{-1} (\bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_1 + \bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_2) \rho \bar{\mathbf{N}}_f. \quad (8)$$

Смысл первого множителя в правой части (8) такой, как и в случае регулярной точки. Второй множитель усредняет значения $\bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_1$ и $\bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_2$, которые, в общем, близки, как показывают вычислительные эксперименты.

Определим тензор \mathbf{N}_f . Примем

$$\mathbf{N}_f = ((\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1)^2 + (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2)^2) \bar{\mathbf{T}}_e + C(1 - \sqrt{(\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1)^2 + (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2)^2})(\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1 + \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2). \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что если $\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2 = 0$ и $\|\mathbf{D}\| \neq 0$, то $\mathbf{N}_f = (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1)^2 \bar{\mathbf{T}}_e + C(1 - \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1) \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1 = \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 \bar{\mathbf{T}}_e + C(1 - \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1) \mathbf{N}_1)$. Первый множитель в последнем равенстве пропадет после нормирования \mathbf{N}_f . Следовательно, приходим к (6).

Вычислим выражение $\mathbf{N}_f \cdot \bar{\mathbf{D}} = ((\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1)^2 + (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2)^2)(\bar{\mathbf{T}}_e \cdot \bar{\mathbf{D}} + C(1 - \sqrt{(\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1)^2 + (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2)^2})$. В активном процессе $(\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1)^2 + (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2)^2 > 0$. Обозначим, как и выше, величины $A, x, y = \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2, B = \bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_2$. Аналогичным образом получаем оценку $\bar{\mathbf{T}}_e \cdot \bar{\mathbf{D}} + C(1 - \sqrt{(\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1)^2 + (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2)^2}) \geq f$, $f = Ax + By + C(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) - \sqrt{1 - A^2 - B^2} \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, где $0 < A, B < 1, x^2 + y^2 \leq 1$ и $x, y > 0$. При $y = 0$ приходим к рассмотренному выше выражению для f .

Граничное значение f при $x^2 + y^2 = 1$ будет $Ax + By > 0$ и $f(x, y) \rightarrow C - \sqrt{1 - A^2 - B^2}$ при $x^2 + y^2 \rightarrow 0$. Рассмотрим стационарную точку f . Приравнявая нулю частные производные f по x, y , получаем систему уравнений

$$x(2(\sqrt{x^2 + y^2})^{-1} - \sqrt{1 - A^2 - B^2} \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = A, \quad y(2(\sqrt{x^2 + y^2})^{-1} - \sqrt{1 - A^2 - B^2} \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = B,$$

откуда находим $y = BA^{-1}x$. Перейдя к полярной системе координат $x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi$, получаем $\tan \varphi = BA^{-1}$, $\cos \varphi = A(\sqrt{A^2 + B^2})^{-1}$. Продолжив дальнейшие рассуждения, как и в случае регулярной точки (7), можно положить

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{1 - A^2 - B^2}, \quad \text{àñè} \quad (\sqrt{2})^{-1} \leq \sqrt{A^2 + B^2} \leq 1; \\ C &= \sqrt{A^2 + B^2} - f_0(R_0)(1 - R_0)^{-1}, \quad \text{àñè} \quad 0 \leq \sqrt{A^2 + B^2} \leq (\sqrt{2})^{-1}; \\ f_0(R) &= R\sqrt{A^2 + B^2} + \sqrt{1 - A^2 - B^2}(1 - R) - \sqrt{1 - A^2 - B^2} \sqrt{1 - R^2}, \\ R_0 &= (\sqrt{1 - A^2 - B^2} - \sqrt{A^2 + B^2})(\sqrt{(\sqrt{1 - A^2 - B^2} - \sqrt{A^2 + B^2})^2 + 1 - A^2 - B^2})^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Соотношение (10) позволяет обеспечить необходимое условие $f \geq 0, \mathbf{N}_f \cdot \bar{\mathbf{D}} \geq 0$. Значит, выполняется условие $\mathbf{T}_f \cdot \mathbf{D} \geq 0$.

Случай 3. Рассмотрим еще один важный случай активного нагружения. Назовем его «скачок». На диаграмме одноосного нагружения (см. рис. 1) он соответствует вертикальным ступенькам. Тензор \mathbf{N}_f можно разложить на девиаторную и шаровую части $\mathbf{N}_f = \text{dev } \mathbf{N}_f + 3^{-1} \mathbf{N}_f \cdot \mathbf{E} \mathbf{E}$, где \mathbf{E} – единичный тензор. При активном процессе тензор \mathbf{D} – девиатор. В случае скачка работают определяющие соотношения нелинейной упругости и \mathbf{D} , как правило, не будет девиатором.

Если выполняется $\text{dev } \mathbf{N}_f \cdot \text{dev } \mathbf{D} \leq 0$, то наступает разгрузка. При скачке будет выполняться $\text{dev } \mathbf{N}_f \cdot \text{dev } \mathbf{D} > 0$, и \mathbf{T}_f определяется соотношениями (5)–(7) (в случае регулярной точки), где скаляры $\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1, \bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_1$ считаются постоянными, их значения соответствуют мо-

менту конца течения и переходу на скачок. Тензор \mathbf{N}_f также сохраняет свое значение, если выполняется, как при лучевом нагружении, $\mathbf{N}_f \cdot \mathbf{D} > 0$, и его следует заменить на значение дивергента $\text{div } \mathbf{N}_f$, если $\mathbf{N}_f \cdot \mathbf{D} \leq 0$. Условия непрерывности \mathbf{T}_f по тензору \mathbf{D} при переходе с течения на скачок соблюдаются по построению тензора \mathbf{N}_f . Скаляр ρ изменяется. Для случая сингулярной точки (8)–(10) рассуждения аналогичные.

Поясним, каким образом преобразуется ρ для произвольного нагружения. Функционал ρ в соотношении (3) представляется в виде $\rho = \Psi(\chi^+, \chi^-, s, \|\mathbf{D}\|)$. Функционалы упругопластического процесса χ^+, χ^- – параметры упрочнения типа Р. Шмидта, которые заменяют деформацию ε во время течения [10]. Параметр s представляет собой относительную высоту текущей ступеньки $0 < s < 1$ и позволяет использовать соотношение (3) во время скачка. Скаляр $\|\mathbf{D}\|$ заменяет скорость деформации $\dot{\varepsilon}$, как было отмечено выше. Усреднение значения ρ по диаграммам растяжения и сжатия выполняется таким же способом, как и в работе [10].

Заключение

Объективное определяющее уравнение упруговязкопластической среды получено в виде соотношения кинематической теории (1). Тензор упругих напряжений определяется по (2). Тензор вязких напряжений удовлетворяет требованиям зависимости от тензора деформации скорости и близости к тензору упругих напряжений, неотрицательности удельной мощности вязких напряжений, возможности моделирования всех лучевых нагружений. Тензор \mathbf{T}_f вводится с учетом (3) соотношениями (5)–(7) и (8)–(10) для случаев, когда точка процесса \mathbf{T}_e находится в регулярной либо сингулярной точках поверхности текучести. В активном процессе возможен еще третий рассмотренный случай скачка. В пассивном процессе имеют место обычные соотношения нелинейной упругости, где общий градиент деформации заменяется «градиентом» упругой деформации. Тензор вязких напряжений не влияет на критерий активного процесса.

Ни одна из существующих теорий деформируемого твердого тела, учитывающих влияние вязкости, не описывает эффект Савара – Массона, который является отнюдь не второстепенным. Его следует считать одним из основных, т. е. эффект требует описания. Такое построение было выполнено в модели упругопластической среды [10], где влияние вязкости по определению отсутствовало. В данной работе, в которой свойство вязкости учитывается при упрощающем предположении, сделана попытка описать эффект Савара – Массона. Согласно работе [7] это невозможно было осуществить в рамках концепции материала. Поэтому сделано дополнительное предположение, противоречащее концепции материала, с которой, в общем-то, вступила в противоречие и модель [10]: отсчетная (разгрузочная) конфигурация для (2) оказывается, как правило, неизвестной. Эффект Савара – Массона наблюдается при указанных обстоятельствах. Тогда реализуется модель упругопластической среды, в силу своей природы не различающая мягкое и жесткое нагружения. В остальных случаях выполняется уравнение (1), обобщающее уравнение $\mathbf{T} = \mathbf{T}_e$ (2), которое, в свою очередь, обобщает уравнение состояния нелинейно-упругой среды [2].

Список литературы

1. Рейнер, А.И. Реология / А.И. Рейнер. – М.: Наука, 1960. – 224 с.
2. Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 517 с.
3. Naghdi, P.M. A Critical Review of the State of Finite Plasticity / P.M. Naghdi // ZAMP. – 1990. – Vol. 41, № 3. – P. 315–394.
4. Пежина, П. Основные вопросы вязкопластичности / П. Пежина. – М.: Мир, 1968. – 176 с.

5. Белл, Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. II. Конечные деформации / Дж. Ф. Белл. – М., 1984. – 432 с.
6. Ключников, В.Д. Физико-математические основы прочности и пластичности / В.Д. Ключников. – М.: МГУ, 1994. – 189 с.
7. Жилин, П.А. Математическая теория неупругих и сыпучих сред / П.А. Жилин // Успехи механики. – 2003. – Т. 2, № 4. – С. 3–36.
8. Полухин, П.И. Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов. Справочник / П.И. Полухин, А.М. Галкин, Г.Я. Гун. – М.: Металлургия, 1976. – 480 с.
9. Ивлев, Д.Д. Теория упрочняющегося пластического тела / Д.Д. Ивлев, К.И. Быковцев. – М.: Наука, 1971. – 232 с.
10. Швед, О.Л. К теории упругопластичности при конечных упругих деформациях и поворотах / О.Л. Швед // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 45–48.
11. Полухин, П.И. Моделирование на пластометре различных законов развития деформации во времени / П.И. Полухин, А.М. Галкин, Г.Я. Гун // Изв. АН СССР. Металлы. – 1971. – № 5. – С. 117–119.
12. Швед, О.Л. Главные потенциальные направления в модели упругопластической среды / О.Л. Швед // Информатика. – 2006. – № 3(11). – С. 70–79.

Поступила 14.02.07

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: swed@newman.bas-net.by*

O.L. Shwed

DETERMINING EQUATION FOR THE ELASTIC-VISCOPLASTIC MEDIUM WITH THE FINITE «GRADIENTS» OF ELASTIC DEFORMATION

A model has been offered for the continuum, elastic-viscoplastic body. The feasible determining equation has been obtained within the limits of kinematics theory in condition when the medium can show the viscous properties only in active process. All the radial loads are provided in the stress space. In case of soft load of the body with all its elements in the elastic state the determining equation is transformed into the state equation of the elastic-plastic medium describing the Savar – Mason effect.