ИНФОРМАТИКА

2007 апрель-июнь № 2

УДК 618.3.19

Е.Н. Зайцева[1], Ю.В. Поттосин[2]

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ОТКАЗА НЕВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Предлагается алгоритм анализа вероятности отказа невосстанавливаемой технической системы, работоспособность которой задана в виде бинарной структурной функции работоспособности. Данный алгоритм включает два этапа. На первом этапе определяются критические наборы событий, приводящие к выходу из строя системы (отказу). На втором этапе определяется вероятность отказа системы к определенному моменту времени для полученного множества критических событий.

Введение

Одной из важных задач в теории надежности является задача построения математической модели исследуемой системы. Для построения этой модели существует ряд подходов. Один из них состоит в описании функционирования системы в виде логической функции, которая в теории надежности известна как структурная функция надежности [1–3]. Наиболее часто в исследованиях используется бинарная структурная функция [1, 2]. Согласно этой модели система и ее элементы принимают два состояния: работоспособное и неработоспособное (отказ), однако возможно построение структурной функции, в которой система и ее элементы имеют несколько уровней работоспособности [2, 3]. Несмотря на то, что такая модель более досконально описывает функционирование системы, она имеет ограниченное использование в практике анализа надежности из-за сложности анализа. Поскольку при анализе надежности системы наиболее важной оценкой является информация о функционировании системы или ее отказе, то ее описания в виде бинарной структурной функции вполне достаточно.

В настоящей работе рассматривается анализ вероятности отказа системы, заданной в виде бинарной структурной функции. Для нее предложен метод, позволяющий определить вероятность отказа системы при заданных вероятностях отказа (функционирования) элементов системы. В рамках этого метода определяются граничные состояния системы и на их основании осуществляется расчет вероятности отказа системы. В отличие от алгоритма, приведенного в [4], в данной работе исходными данными являются не граничные состояния системы, а непосредственно структурная функция системы. В качестве инструментария для достижения поставленной цели используется аппарат логического дифференциального исчисления [3] и алгоритмы ортогонализации булевых функций [4].

1. Математическая модель

В данной работе рассматривается система, состоящая из n элементов, состояния которых обозначаются как x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). При этом нулевое значение x_i ($x_i = 0$) соответствует отказу i-го элемента, а ненулевое ($x_i = 1$) характеризует состояние этого элемента как работоспособное. При этом работоспособность системы однозначно определяется состояниями ее элементов. Исходными данными при формировании математической модели исследуемой системы являются *структурная функция работоспособности*, однозначно определяющая работоспособность системы в зависимости от состояний ее элементов в некоторый момент времени [1–3, 5]:

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \phi(\boldsymbol{x}): \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}, \quad (1)$$

и *вероятности работоспособности* отдельных ее элементов для этого же момента времени:

$$p_i = \Pr\{x_i = 1\}. \quad (2)$$

Для структурной функции работоспособности характерны следующие свойства [1, 2]: а) если $x = 0$, т. е. все $x_i = 0$, то $\phi(x) = 0$, и если $x = 1$, т. е. все $x_i = 1$, то $\phi(x) = 1$; б) данная функция является монотонной; в) изменения значений переменных являются взаимно независимыми.

Как это обычно принято, будем опираться в расчетах на следующие две теоремы из теории вероятностей [6], используемые в теории надежности [1, 2, 5]:

1) вероятность одновременного наступления *независимых* событий a и b равна произведению вероятностей этих событий: $p(ab)= p(a)p(b)$;

2) вероятность *несовместных* событий a и b (наступления, по меньшей мере, одного из них) равна сумме вероятностей этих событий: $p(a + b) = p(a) + p(b)$.

Поскольку структурная функция (1) представляет собой булеву функцию, то для анализа надежности исследуемой системы допустимо использование методов и алгоритмов булевой алгебры. В работах [2, 5] достаточно подробно рассмотрены методы булевой алгебры, используемые в теории надежности. В частности, в работе [5] отмечается, что одним из таких методов является логическое дифференциальное исчисление и предлагается для анализа работоспособности использовать логические производные структурной функции по i-й переменной:

$$\partial\phi(\boldsymbol{x})/\partial x_i = \phi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \oplus \phi(x_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, x_n), \tag{3}$$

где $\phi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ – структурная функция; $\phi(x_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, x_n)$ – структурная функция, в алгебраическом представлении которой переменная x_i заменена на ее отрицание $\bar{x}$; $\oplus$ – символ логического сложения по модулю два.

Логическая производная (3) принимает единичное значение на наборах значений переменных $x_1,\ldots, x_n$, для которых любое изменение значения переменной x_i (либо с единицы на нуль, либо с нуля на единицу) обусловливает изменение функции, при этом неизвестно – с единицы на нуль или наоборот. Несомненно, полученные наборы представляют интерес с точки зрения теории надежности, однако их дальнейшее использование требует дополнительного анализа. В работах [3, 7] для анализа надежности систем с несколькими уровнями работоспособности предложено использовать направленные логические производные, которые позволяют определить наборы переменных при заданных изменениях i-й переменной и для заданного изменения функции. Для структурной функции (1) логическая направленная производная по i-й переменной определяется как

$$\partial\phi(j \to \bar{j}) / \partial x_i(a \to \bar{a}) = \{\phi(a_i, \boldsymbol{x}) \sim j\} \wedge \{\phi(\bar{a}_i, \boldsymbol{x}) \sim \bar{j}\}, \tag{4}$$

где $\phi(a_i, \boldsymbol{x}) = \phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)$; $j, a \in \{0, 1\}$ и символ $\sim$ обозначает операцию эквиваленции.

Всего для булевой функции могут быть определены четыре типа направленных логических производных по i-й переменной: $\partial\phi(0 \to 1) / \partial x_i(0 \to 1)$, $\partial\phi(0 \to 1) / \partial x_i(1 \to 0)$, $\partial\phi(1 \to 0) / \partial x_i(0 \to 1)$, $\partial\phi(1 \to 0) / \partial x_i(1 \to 0)$. Для монотонной булевой функции, которой и является структурная функция (1), имеют смысл лишь два типа производных из вышеприведенных: $\partial\phi(0 \to 1) / \partial x_i(0 \to 1)$ и $\partial\phi(1 \to 0) / \partial x_i(1 \to 0)$. Первый из них в теории надежности характеризует восстановление системы (изменение значения структурной функции с нулевого на единичное) при замене неисправного элемента исправным (изменение значения i-й переменной с нулевого на единичное): $\partial\phi(0 \to 1) / \partial x_i(0 \to 1) = \partial_r\phi(\boldsymbol{x})/\partial x_i$. С точки зрения анализа надежности системы производная второго типа описывает отказ системы при отказе одного из элементов, т. е. изменение значения структурной функции с единичного на нулевое при изменении значения i-й переменной с единицы на нуль: $\partial\phi(1 \to 0) / \partial x_i(1 \to 0) = \partial_f\phi(\boldsymbol{x})/\partial x_i$.

Таким образом, работоспособность системы в некоторый момент времени однозначно определяется ее структурной функцией (1) и описание отказа этой системы в зависимости от отказа одного из элементов соответствует направленной логической производной $\partial_f\phi(\boldsymbol{x})/\partial x_i$. Вероятность отказа i-го элемента определяется на основании (2): $q_i = \Pr\{x_i = 0\} = 1 - p_i$.

2. Граничные состояния отказа и восстановления системы

В настоящей работе оценка вероятности отказа системы осуществляется на основании анализа граничных состояний отказа и восстановления системы [3]. Граничные состояния системы – это состояния, для которых изменение работоспособности одного из элементов системы обусловливает изменение работоспособности всей системы в целом (рис.1).

О п р е д е л е н и е 1. *Граничным состоянием отказа системы* $B_j = (x_1,\ldots, x_n)$ *является такое состояние системы, для которого изменение состояния i-й переменной структурной функции с единицы на нуль обусловливает изменение значения функции с единичного на нулевое, причем эти наборы соответствуют единичным значениям направленной логической производной*:

$$\partial_f \phi(\boldsymbol{x})/\partial x_i = \{\phi(1_i, \boldsymbol{x}) \sim 1\} \wedge \{\phi(0_i, \boldsymbol{x}) \sim 0\} = \phi(1_i, \boldsymbol{x}) \wedge \overline{\phi(0_i, \boldsymbol{x})}\,. \tag{5}$$

Таким образом, логические производные $\partial_f \phi(\boldsymbol{x})/\partial x_i$ по всем переменным позволяют определить все возможные граничные состояния системы. Например, граничные состояния системы на рис.1 вычисляются с помощью логических производных вида $\partial_f \phi(\boldsymbol{x})/\partial x_1$ для набора $(x_1\, x_2\, x_3) = (1\ 1\ 1)$ и $\partial_f \phi(\boldsymbol{x})/\partial x_3$ для набора $(x_1\, x_2\, x_3) = (1\ 0\ 1)$.

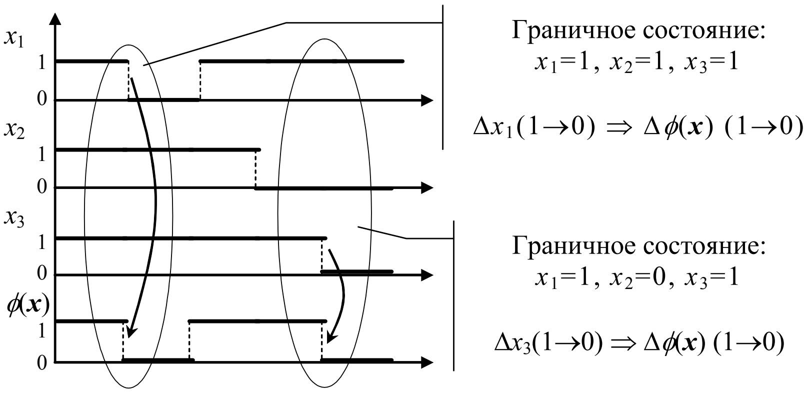

Рис. 1. Примеры граничных состояний отказа системы из трех элементов

О п р е д е л е н и е 2. *Граничным состоянием восстановления системы* $K_j = (x_1,\ldots, x_n)$ *является такое состояние системы, для которого изменение состояния i-й переменной структурной функции с нуля на единицу обусловливает изменение значения функции с нулевого на единичное, причем эти наборы соответствуют единичным значениям направленной логической производной:*

$$\partial_r \phi(\boldsymbol{x})/\partial x_i = \{\phi(0_i, \boldsymbol{x}) \sim 0\} \wedge \{\phi(1_i, \boldsymbol{x}) \sim 1\} = \overline{\phi(0_i, \boldsymbol{x})} \wedge \phi(1_i, \boldsymbol{x})\,. \tag{6}$$

Следует заметить, что согласно соотношениям (5) и (6) граничные состояния отказа и восстановления системы совпадают с точностью до значения i-й переменной: для граничных состояний отказа системы эта переменная равна единице ($x_i = 1$), а для граничных состояний восстановления системы – нулю ($x_i = 0$).

Из определения граничных состояний системы следует, что они являются минимальными наборами и, следовательно, не поглощают друг друга. Представим каждое из граничных состояний восстановления системы в виде элементарной конъюнкции k_i. Тогда функция отказа [3] исследуемой системы определяется как дизъюнкция этих конъюнкций [4]:

$$F = k_1 \vee \ldots \vee k_t. \tag{7}$$

Монотонную булеву функцию отказа системы удобно заменить соответствующей логической матрицей T, столбцы которой соответствуют событиям отказа отдельных элементов системы, а строки представляют (посредством единиц) отдельные граничные состояния.

Пример 1. Задана система из пяти элементов ($n = 5$) типа «3 – из – 5» (система функционирует, если работоспособны как минимум три элемента из пяти). Сформируем логическую матрицу T состояний отказа этой системы и запишем ее функцию отказа (7).

Граничные состояния отказа системы (таблица) вычисляются с помощью направленных логических производных $\partial_f \phi(x)/\partial x_i = \partial \phi(1 \to 0)\ /\ \partial x_i(1 \to 0)$ для $i = 1,\ldots, 5$. Для определения граничных состояний восстановления системы используются направленные логические производные $\partial_r \phi(x)/\partial x_i = \partial \phi(0 \to 1)\ /\ \partial x_i(0 \to 1)$ для $i = 1,\ldots, 5$.

Следует отметить, что в данном примере граничные состояния восстановления системы могут быть вычислены на основании граничных состояний отказа системы путем инверсии значения анализируемой переменной. Точно так же и граничные состояния отказа системы могут быть определены на основании граничных состояний восстановления системы, если заменить значение анализируемой переменной с нулевого на единичное.

Таблица

Граничные состояния отказа для элемента					Граничные состояния восстановления для элемента				
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
10011	01011	00111	00111	00111	00011	00011	00011	00101	00110
10101	01101	01101	01011	01011	00101	00101	01001	01001	01010
10110	01110	01110	01110	01101	01001	10001	10001	10001	10010
11001	11001	10101	10011	10011	00110	00110	01010	01100	01100
11010	11010	10110	10110	10101	01010	10010	10010	10100	10100
11100	11100	11100	11010	11001	01100	10100	11000	11000	11000

Логическая матрица T состояний отказа системы «3 – из – 5» записывается на основании граничных состояний восстановления системы:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
T = & \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & - & - \\
1 & 1 & - & 1 & - \\
1 & 1 & - & - & 1 \\
1 & - & 1 & 1 & - \\
1 & - & 1 & - & 1 \\
1 & - & - & 1 & 1 \\
- & 1 & 1 & 1 & - \\
- & 1 & 1 & - & 1 \\
- & 1 & - & 1 & 1 \\
- & - & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} .
\end{array}
$$

Тогда функция отказа для рассматриваемой системы задается следующим выражением:

$$F = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_1 x_2 x_5 \vee x_1 x_3 x_4 \vee x_1 x_3 x_5 \vee x_1 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_2 x_4 x_5 \vee x_3 x_4 x_5. \quad (8)$$

Функция отказа системы содержит информацию о возможных событиях, приводящих к отказу системы. Если, например, произойдет событие, реализуемое набором $x_1\, x_3$, который соответствует отказу первого и третьего элементов, то система будет исправно функционировать. Однако наступление события, реализуемого наборами $x_1\, x_3\, x_4$ или $x_1\, x_3\, x_4\, x_5$, приводит к отказу системы, поскольку реализован набор $x_1\, x_3\, x_4$, который входит в множество граничных состояний восстановления системы.

Поскольку изменения значений переменных структурной функции являются событиями независимыми согласно свойству в) структурных функций, то легко подсчитать вероятность возникновения любого из граничных состояний. Однако дальнейшие расчеты вероятности сложного события F затруднительны, поскольку события, представляемые различными граничными состояниями системы, могут быть в общем случае зависимыми и совместимыми.

Решение можно найти, предварительно преобразовав ДНФ (8), представляющую событие F, в эквивалентную ей ДНФ, составленную из взаимно ортогональных конъюнктивных термов, которые соответствуют несовместимым событиям. Тогда вероятность события F можно выразить суммой вероятностей событий, представленных членами полученной ДНФ, которую принято называть ортогональной. В работе [5] доказана теорема, что именно такая форма, состоящая из ортогональных конъюнкций, позволяет легко перейти к вероятностной форме: каждая переменная заменяется соответствующей вероятностью, а отрицание переменной – разностью между единицей и вероятностью.

3. Вычисление вероятности отказа системы для заданных граничных состояний

Таким образом, вычисление вероятности сложного события F сводится в основном к ортогонализации задающей это событие ДНФ. В работе [5] для решения данной задачи разработан подход, получивший название логико-вероятностного исчисления. В случае небольшого числа переменных можно решить эту задачу, разложив дизъюнктивно каждую элементарную конъюнкцию по всем отсутствующим в ней переменным, и, приведя подобные, получить в результате совершенную ДНФ. Однако такой способ может оказаться неприемлемым, когда переменных много. В работе [4] предложены два алгоритма, ориентированные на решение этой задачи именно для большого числа переменных и использующие матричное представление ДНФ.

3.1. Ортогонализация ДНФ на основе дизъюнктивного разложения ее термов

Рассматриваемый метод основан на идее дизъюнктивного разложения элементарной конъюнкции на серию других конъюнкций, каждая из которых либо ортогональна всем конъюнкциям из некоторой совокупности, либо поглощается одной из них [8]. В последнем случае поглощаемая конъюнкция удаляется из решения, а число остающихся по возможности минимизируется – это сокращает последующие вычисления. Следует отметить, что эта же идея положена в основу логико-вероятностного исчисления [5].

Ключевой для данного метода является операция разложения k_i по k_j (k_i и k_j – некоторые элементарные неортогональные конъюнкции), которая состоит из следующих шагов:

– выделяется совокупность из t переменных, которые входят в k_j, но не входят в k_i;

– конъюнкция k_i дизъюнктивно разлагается по первой из t выделенных переменных; один из продуктов разложения будет ортогонален конъюнкции k_j, а другой разлагается по второй из переменных выделенной совокупности и т. д.

В результате конъюнкция k_i окажется замененной на t конъюнкций, ортогональных k_j. Эта операция легко реализуется при представлении конъюнкций троичными векторами (рис. 2), компоненты которых поставлены в соответствие переменным и принимают значение 1 (если переменная входит в конъюнкцию без инверсии), значение 0 (если с инверсией) и значение «–» (если вообще не входит).

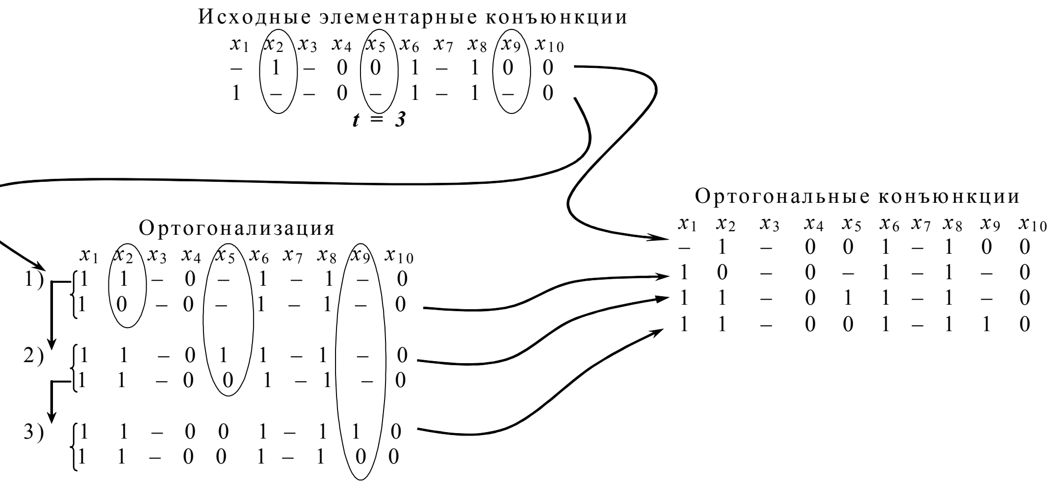

Рис. 2. Пример ортогонализации элементарных конъюнкций

Заметим, что если ранги конъюнкций k_i и k_j не равны, то выгоднее разлагать конъюнкцию большего ранга по конъюнкции меньшего ранга – число продуктов разложения при этом будет меньше. Это учитывается в излагаемом ниже алгоритме ортогонализации ДНФ:

1. Представим исходную ДНФ, описывающую сложное событие F, матрицей T, расположив ее строки в порядке неубывания рангов, измеряемых числом единиц в строке.

2. Последовательно выбирая строки из матрицы T, произведем описанное выше дизъюнктивное разложение соответствующих элементарных конъюнкций, представляя результат некоторой совокупностью троичных векторов и включая последние в формируемую таким образом результативную матрицу T^{+}.

При этом выбранная строка сравнивается последовательно с уже включенными в T^{+} строками и разлагается по первой же из них, которая оказывается неортогональна ей. Не поглощаемые в T^+ продукты этого разложения вносятся в T^+ (в конец) и подвергаются аналогичной операции, пока все строки в матрице T^+ не станут взаимно ортогональными. Лишь после этого выбирается следующая строка из матрицы T.

Пример 2. Применимый в случае произвольной ДНФ этот алгоритм годится и для монотонной булевой функции. Так, ортогонализация приведенной выше матрицы T, которая задает функцию отказа системы «3 – из – 5», приводит к следующему результату:

$$
\begin{array}{c}
\\ T =
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & - & - \\
1 & 1 & - & 1 & - \\
1 & 1 & - & - & 1 \\
1 & - & 1 & 1 & - \\
1 & - & 1 & - & 1 \\
1 & - & - & 1 & 1 \\
- & 1 & 1 & 1 & - \\
- & 1 & 1 & - & 1 \\
- & 1 & - & 1 & 1 \\
- & - & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10
\end{array}
\Rightarrow T^+ =
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & - & - \\
1 & 1 & 0 & 1 & - \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & - \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & - \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Таким образом, рассматриваемое сложное событие отказа системы «3 – из – 5» может быть представлено формулой

$$
\begin{aligned}
F = {} & x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee \\
& \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Например, если все базисные события $x_1, x_2, \ldots, x_5$ независимы и вероятность каждого из них равна 1/3 ($q_i = q_j = q$), то $P(F)$ на основании (9) вычисляется как

$$P(F) = q^3 + 3\, q^3 \cdot (1 - q) + 6\, q^3 \cdot (1 - q)^2 \approx 0{,}21.$$

3.2. Ортогонализация ДНФ на основе разложения Шеннона

Основным недостатком описанного выше алгоритма вычисления вероятности отказа системы является необходимость хранения в памяти ЭВМ ортогональной ДНФ, которая может достичь довольно больших размеров. Эксперимент показал, что число строк матрицы T^+ оказывается в среднем в сотни раз больше, чем число строк исходной матрицы T [4]. Этот недостаток позволяет разрешить алгоритм ортогонализации функции отказа системы с помощью разложения Шеннона.

Согласно разложению Шеннона [9] любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть представлена как

$$f = \bar{x}_i f^0 \vee x_i f^1, \tag{8}$$

где $f^0 = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ и $f^1 = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Очевидно, оба слагаемых в данной дизъюнкции являются взаимно ортогональными. Разлагая так же f^0 и f^1 соответственно по некоторым x_j и x_k ($i \neq j,\ i \neq k$), получим четыре взаимно ортогональных слагаемых (если ни одно из них не окажется тождественно равным нулю). Продолжая этот цепной процесс до тех пор, пока все получаемые коэффициенты разложения не станут элементарными конъюнкциями или константами, получим в результате ДНФ со взаимно ортогональными термами.

Описанный процесс легко представить в виде построения ориентированного дерева с корнем [10]. Этот процесс носит рекурсивный характер и содержит следующие действия.

1. Вводится вершина r, объявляемая корнем, и в нее помещается исходная функция.

2. Если из некоторой вершины v получаемого дерева не исходит ни одна дуга и она имеет функцию f, которая не представима элементарной конъюнкцией и не является константой, то из множества аргументов f выбирается переменная x_i для описанного выше разложения; вводятся

две вершины, в одну из которых помещается функция f^0, в другую – f^1, и в них направляются дуги из v. Соответственно одна из этих дуг считается связанной с $\bar{x}_i$, другая – с x_i.

3. Процесс заканчивается, когда ни для одной из вершин не выполняется условие п. 2. В дальнейшем вершины с $f \equiv 0$ не рассматриваются, и их следует удалить.

В полученном дереве каждый путь от корня к листу, т. е. к вершине без исходящих дуг, определяет элементарную конъюнкцию переменных, связанных с дугами этого пути. Логически умножив ее на функцию f листа, получим один из термов искомой ортогональной ДНФ.

С целью сокращения объема вычислений применяется следующее эвристическое правило выбора переменных разложения: в ДНФ, представляющей исходную функцию или очередной коэффициент разложения, рассматриваются все элементарные конъюнкции минимального ранга, а в них выбирается переменная, присутствующая в членах ДНФ разлагаемой функции максимальное число раз.

Пусть $q(v)$ – число, которое следует разместить в вершине v. Вычисление вероятности $P(F)$ сложного события F, заданного матрицей T, связано с обходом описанного дерева, который сопровождается размещением в его вершинах чисел, получаемых следующим образом:

1. В корне дерева r располагается число 1, т. е. $q(r) = 1$.

2. Если из вершины v идет дуга в вершину v', то либо $q(v') = q(v)\,p(d_i)$, либо $q(v') = q(v)\,(1 - p(x_i))$ в зависимости от того, связана эта дуга с x_i или $\bar{x}_i$.

3. Если вершина v' является листом с $f = x_j\,x_k \ldots x_l$, то после выполнения действия из п. 2 $q(v') := q(v')\,p(x_j)\,p(x_k) \ldots p(x_l)$.

Тогда $P(F) = \Sigma_{v \in L}\, q(v)$, где L – множество листьев данного дерева.

Дерево разложения для ДНФ из примера 2 приведено на рис. 3, где матрицы упрощены с помощью операции «простое поглощение».

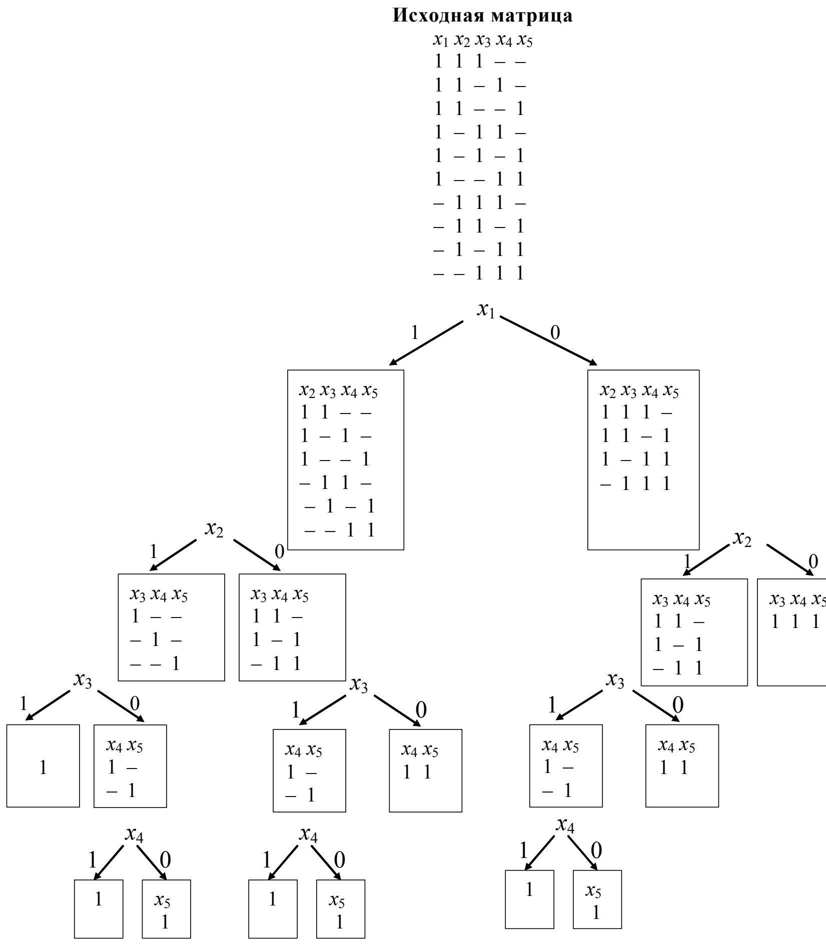

Рис. 3. Дерево, полученное на основе разложения функции по Шеннону

Кроме коэффициентов разложения, в листьях помещены соответствующие произведения вероятностей. Сумма их совпадает с суммой, полученной предыдущим способом. Матрица, которая представляет соответствующую ортогональную ДНФ, выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & - & - \\ 1 & 1 & 0 & 1 & - \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & - \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Заключение

В работе предложен метод вычисления вероятности отказа системы на основе ее структурной функции, который предполагает следующие этапы (рис. 4):

– формирование структурной функции работоспособности;

– определение граничных состояний системы с помощью математического аппарата логических направленных производных;

– вычисление функции отказа системы и ее представление в виде ортогональной формы;

– вычисление вероятности отказа системы путем замены переменных в функции отказа вероятностями отказа соответствующих элементов системы.

В отличие от алгоритмов, рассмотренных в работе [4], данный метод включает этап определения граничных состояний системы.

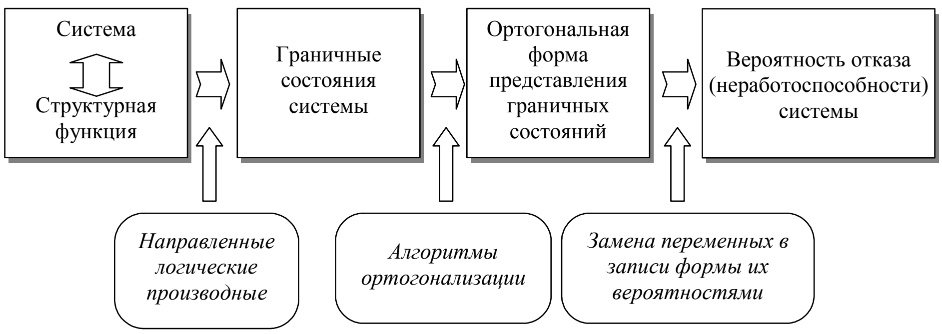

Рис. 4. Схема вычисления вероятности отказа системы

Следует отметить, что в данной работе рассматривается вычисление вероятности отказа системы и вероятность работоспособности системы определяется как разность между единицей и вероятностью отказа. Однако предложенный метод может быть адаптирован для первоначального вычисления и вероятности работоспособности системы. В этом случае будут использованы не граничные состояния восстановления системы, а граничные состояния отказа системы.

Список литературы

1. Ushakov, I. Handbook of Reliability Engineering / I. Ushakov. – N.-Y.: Wiley, 1994. – 354 p.

2. Xie, M. Computing System Reliability. Models and Analysis / M. Xie, Y.-S. Dai, K.-L. Poh. – N.-Y., Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 293 p.

3. Zaitseva, E.N. Reliability analysis of multi-state system / E.N. Zaitseva // Dynamical Systems and Geometric Theories. – 2003. – № 1(2). – P. 213–222.

4. Закревский, А.Д. Расчет надежности технической системы при заданных критических наборах событий / А.Д. Закревский, Ю.В. Поттосин // Логическое проектирование. – Вып.1. – Минск: Ин-т техн. кибернетики АН Беларуси, 1996. – С. 123–132.

5. Рябинин, И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем / И.А. Рябинин. – СПб.: Политехника, 2000. – 248 с.

6. Чистяков, В.П. Курс теории вероятностей / В.П. Чистяков. – М.: Наука, 1987. – 240 с.

7. Zaitseva, E. Dynamic rreliability indices for parallel, series and k-out-of-n multi-state system / E. Zaitseva, V. Levashenko // Proc. of the IEEE 52nd Annual Reliability & Maintainability Symposium (RAMS). – Newport Beach, California, USA, 2003. – P. 253–259.

8. Bochmann, D. Logikentwurf mit XBOOLE. Algorithmen und Programme / D. Bochmann, B. Steinbach. – Berlin: Verlag Technik GmbH, 1991. – 304 p.

9. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский. – М.: Наука, 1986. – 384 с.

10. Евстигнеев, В.А. Алгоритмы на деревьях / В.А. Евстигнеев, В.Н. Касьянов. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1989. – 312 с.

Поступила 11.04.07

[1]*Жилинский университет,*
Жилина, Словакия

[2]*Объединенный институт проблем*
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: pott@newman.bas-net.by

E.N. Zaitseva, Yu.V. Pottosin

ESTIMATION OF FAILURE PROBABILITY OF A NONRECOVERABLE SYSTEM USING LOGIC ALGEBRA TECHNIQUE

An algorithm for analysis of the failure probability of a nonrecoverable engineering system whose operability is given by a binary structural function is suggested. The algorithm is of two stages. At the first stage, the critical sets of events are determined that result in a failure of the system. At the second stage, the probability of the system failure by a certain point of time is calculated for the obtained set of critical events.