

ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 621.391

А.А. Борискевич, В.Ю. Цветков

КОМПАКТНОЕ ОПИСАНИЕ И ФОРМИРОВАНИЕ
N-МЕРНЫХ РЕКУРСИВНЫХ РАЗВЕРТОК

Предлагаются компактное описание и итерационный алгоритм формирования непрерывных и прерывистых траекторий произвольных N -мерных рекурсивных разверток на основе матрицы траектории рекурсивной развертки, определяемой достаточно малым набором начальных параметров, который включает размерность развертки, размер примитива, подстановочную матрицу, множество матриц ориентации примитива и номер начальной ориентации примитива. Показано, что предложенные компактное описание и алгоритм позволяют получить траекторию произвольной рекурсивной развертки с любыми начальными условиями за счет выбора примитива, числа итераций построения матрицы траектории рекурсивной развертки и использования рекуррентного преобразования над матрицей номеров ориентаций примитива.

Введение

Интенсивное развитие информационных технологий основано на эффективной реализации алгоритмов сжатия, шифрования, фильтрации, быстрого поиска, распознавания и классификации N -мерных данных. Алгоритмы обработки информации ориентированы на операции с данными в пространстве определенной размерности (одномерном (1D), двумерном (2D) или трехмерном (3D)). Для согласования размерности алгоритмов обработки с размерностью обрабатываемой информации (файлов данных, речи, аудио, изображений, видео, стереоизображений, голограмм и т. д.) используется преобразование развертками, реализующее перестановку элементов данных (пикселей изображения, отсчетов аудиоданных и т. д.) [1–18].

Обобщенной моделью развертки является заполняющая пространство кривая, представляющая траекторию развертки в виде порядка выборки элементов преобразуемых данных [1, 2]. В зависимости от размерности заполняемого пространства развертки делятся на двух- и трехмерные. Заполняющая пространство кривая однозначно описывается двумерной или трехмерной матрицей траектории развертки, элементы которой являются перестановкой и указывают порядок выборки элементов преобразуемых данных соответствующей размерности.

По форме кривой, заполняющей пространство, развертки могут быть разделены на несколько классов. Наибольший интерес для практического применения представляют три класса разверток: хаотические, периодические и рекурсивные (фрактальные).

Заполняющая пространство кривая хаотической развертки имеет прерывистую траекторию (рис 1, а). Одним из возможных применений хаотических разверток является шифрование речи и изображений [3, 4].

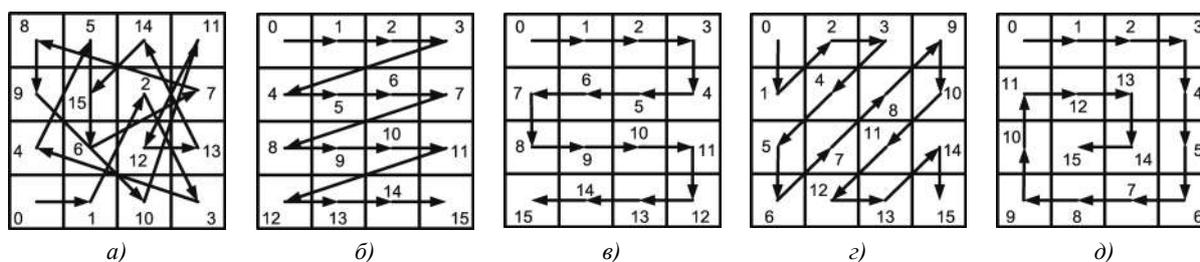


Рис. 1. Примеры траекторий хаотических и периодических разверток:
а) прерывистая хаотическая развертка; б) периодическая прерывистая строчная развертка;
в), г) периодические непрерывные зигзагообразные развертки;
д) периодическая непрерывная спиралеобразная развертка

Траектория периодической развертки отличается сравнительной простотой и достаточно легко масштабируется. Примерами простейших периодических разверток являются строчная, зигзагообразная, спиралеобразная (рис. 1, б-д). Они широко используются в алгоритмах обработки изображений и видео. Зигзагообразная развертка (рис. 1, з) используется в алгоритме JPEG для преобразования двухмерного пространства DCT-коэффициентов в одномерное и обратно [5]. Спиралеобразная развертка (рис. 1, д) применяется в технологии защиты изображений посредством цифровых водяных знаков [6].

Основной особенностью рекурсивных разверток является фрактальное самоподобие траектории развертки, проявляющееся в различных масштабах наблюдения. Рекурсивная развертка задается примитивом (рис. 2, а, б, з, д), определяющим последовательность выбора элементов в небольшой области N -мерного пространства, и правилом, определяющим размещение различным образом ориентированных копий примитива в пространстве, размер которого равен размеру обрабатываемого фрагмента данных. Алгоритм рекурсивной развертки позволяет построить матрицу перестановки элементов N -мерного фрагмента данных необходимого размера за число шагов, зависящее от соотношения размеров примитива и обрабатываемого фрагмента.

Основное применение рекурсивные развертки находят в алгоритмах сжатия изображений в пространственной области без потерь [7] и с потерями [8], в области дискретного косинусного и вейвлет-преобразований [5], а также в алгоритмах фрактального сжатия [9] из-за увеличения интервала корреляции пикселей в одномерном представлении по сравнению с вариантом использования строчной или другой периодической развертки.

Простейшими рекурсивными развертками, имеющими непрерывную траекторию, являются развертки Гильберта [10] и Пеано [11] (рис. 2). Рекурсивные развертки, например крестообразная (рис. 2, з), реализуемая на замкнутой поверхности в виде тора, могут иметь прерывистую траекторию.

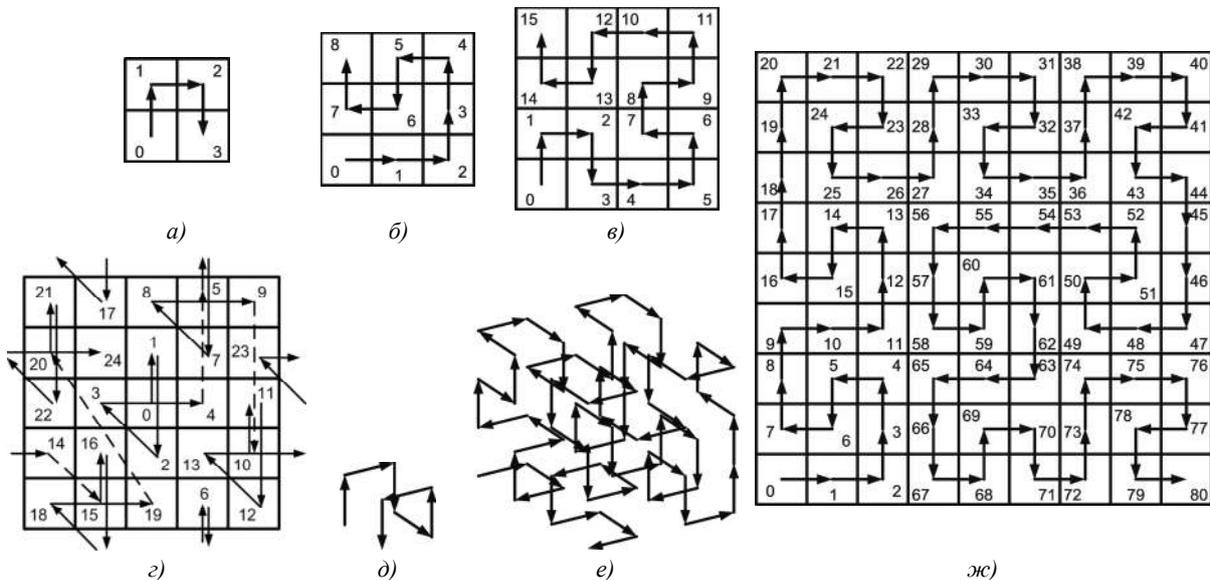


Рис. 2. Примеры траекторий рекурсивных 2D- и 3D-разверток:

- а) примитив 2D-развертки Гильберта; б) примитив 2D-развертки Пеано; в) 2D-развертка Гильберта 4×4;
 г) примитив крестообразной 2D-развертки; д) примитив 3D-развертки Гильберта;
 е) 3D-развертка Гильберта 4×4×4; ж) 2D-развертка Пеано 9×9

Актуальной проблемой является компактное описание траекторий рекурсивных разверток, а также эффективных алгоритмов их формирования. Известные описания рекурсивных разверток представляются в виде рисунков, отражающих закон построения траектории развертки, моделей машин с конечными состояниями [12, 13], графов [14, 12], грамматик искусственного языка [3, 15, 16], а также тензоров [17]. Опубликован ряд алгоритмических и схемотехнических решений по формированию матриц траекторий рекурсивных разверток, используемых в видеокодеках [3, 15, 18]. Общими недостатками данных описаний рекурсивных разверток яв-

ляются узкая ориентация на определенную форму траектории, в основном Гильберта, а также высокая сложность, препятствующая эффективной алгоритмической и аппаратной реализации в условиях увеличения длины траектории развертки. В связи с этим актуальным является вопрос разработки компактного описания траектории рекурсивных разверток, не зависящего от типа, размерности и размера развертки, а также алгоритма формирования траекторий произвольных рекурсивных разверток на основе компактного описания.

1. Компактное описание N -мерных рекурсивных разверток

Предлагается компактное описание траекторий N -мерных рекурсивных разверток на основе множества N -мерных матриц ориентаций примитива и рекуррентного преобразования для формирования непрерывных и прерывистых траекторий кривых, заполняющих N -мерное пространство [4, 19, 20]. Примитив представляет собой множество из S различных элементов, порядок следования которых определяется перестановкой, задающей тип, исходную точку и направление развертки. Рекуррентное преобразование основано на итерационной замене элементов матрицы номеров ориентаций примитива матрицами ориентаций примитива с использованием матрицы замены и определяется следующим выражением:

$$M_r = \Phi_r(M_{r-1}, C), \tag{1}$$

где Φ_r – рекуррентное преобразование; $M_r = \|m_i(r)\|_{(i=0, \overline{S^r-1})}$ – матрица номеров ориентаций примитива; $r = \overline{1, R-1}$ – номер итерации формирования рекурсивной развертки; R – число итераций; S – общее число элементов в примитиве; $m_i(r) \in [0, P-1]$ – номер i -й ориентации примитива на r -й итерации; $M_0 = m_0(0) \in [0, P-1]$ – номер начальной ориентации примитива; P – число ориентаций примитива; C – постоянная часть, задаваемая множеством ориентационных матриц $\{K_n\}_{(n=0, \overline{P-1})}$ и подстановочной матрицей F ; $K_n = \|k_i\|_{(i=0, \overline{S-1})}$ – ориентационная матрица, задающая n -ю ориентацию примитива и определяемая перестановкой из S элементов; $k_i \in [0, S-1]$; $F = \|f_{i,j}\|_{(i=0, \overline{S-1}, j=0, \overline{P-1})}$ – подстановочная матрица, устанавливающая правила формирования элементов $m_i(r)$ в результате подстановки элементов $f_{i,j} \in [0, P-1]$ вместо элементов матрицы, полученной путем замены элементов $m_{\lfloor i/S \rfloor}(r-1)$ на ориентационные матрицы $K_{m_{\lfloor i/S \rfloor}(r-1)}$; $\lfloor \cdot \rfloor$ – операция округления с недостатком.

Преобразование матрицы M_{r-1} в матрицу M_r на каждой итерации осуществляется в два этапа.

1. На основе матрицы M_{r-1} строится вспомогательная матрица $Q_r = \|q_i(r)\|_{(i=0, \overline{S^r-1})}$, элементы которой $q_i(r) \in [0, S-1]$ формируются из элементов ориентационных матриц $\{K_n\}_{(n=0, \overline{P-1})}$ в результате замены элементов $m_{\lfloor i/S \rfloor}(r-1)$ матрицы номеров ориентаций примитива M_{r-1} на соответствующие ориентационные матрицы $K_{m_{\lfloor i/S \rfloor}(r-1)}$, номера которых определяются значениями элементов матрицы номеров ориентаций примитива M_{r-1} : $Q_r = \|q_i(r)\|_{(i=0, \overline{S^r-1})} = \|K_{m_{\lfloor i/S \rfloor}(r-1)}\|_{(i=0, \overline{S^r-1})}$.

2. На основе матрицы номеров ориентаций примитива M_{r-1} предыдущей итерации и вспомогательной матрицы Q_r формируется матрица номеров ориентаций примитива M_r в результате замены элементов $q_i(r)$ вспомогательной матрицы Q_r элементами $f_{q_i(r), m_{\lfloor i/S \rfloor}(r-1)}$ подстановочной матрицы F : $m_i(r) = f_{q_i(r), m_{\lfloor i/S \rfloor}(r-1)}$.

Матрица F может быть задана таблицей, состоящей из S строк и P столбцов, в ячейках которой размещаются элементы $f_{i,j} \in [0, P-1]$. Согласно выражению (1) матрица M_r на итерации r состоит из S^r элементов $m_i(r) = f_{q_i(r), m_{\lfloor i/S \rfloor}(r-1)}$, каждый из которых представляет ориентацию примитива $K_{m_i(r)}$ и выбирается из матрицы $F = \|f_{i,j}\|_{(i=0, \overline{S-1}, j=0, \overline{P-1})}$ рекуррентного преобразования по номеру $q_i(r)$ строки и номеру $m_{\lfloor i/S \rfloor}(r-1)$ столбца. С каждой итерацией размер матрицы M_r увеличивается в S раз по сравнению с размером матрицы M_{r-1} .

Множество $\{Q_r\}_{r=0, \overline{R-1}}$ вспомогательных матриц $Q_r = \|q_i(r)\|_{(i=0, \overline{S^r-1})}$, сформированных на итерациях $r = 0, \overline{R-1}$, служит для построения матрицы $T(R) = \|t_i(R)\|_{(i=0, \overline{S^R-1})}$ траектории рекурсивной развертки, элементы которой определяются по формуле

$$t_i(R) = \sum_{r=1}^R q_{\lfloor i/S^{R-r} \rfloor}(r) \cdot S^{R-r}, \quad (2)$$

где $i = 0, \overline{S^R-1}$.

Последовательность элементов $t_i(R)$ матрицы $T(R)$ траектории рекурсивной развертки является перестановкой из S^R элементов, определяющей порядок выбора отсчетов преобразуемых разверткой N -мерных данных.

Предлагаемое описание не зависит от типа развертки, обеспечивает компактное представление информации о траектории развертки на каждой итерации и формируется в результате следующих шагов.

1. Выбор размерности N и размера s примитива рекурсивной развертки. Для преобразования N -мерных данных представляют интерес компактные описания одномерной ($N=1$), двумерной ($N=2$) и трехмерной ($N=3$) рекурсивных разверток. Размер s примитива рекурсивной развертки задает число элементов в направлении каждой оси N -мерного пространства и определяется из соотношения

$$S = s^N. \quad (3)$$

2. Определение множества $\{K_n\}_{(n=0, \overline{P-1})}$ ориентационных матриц:

$$\begin{cases} \{K_n\}_{(n=0, \overline{1})}, K_n = \|k_i\|_{(i=0, \overline{s-1})}, k_i \in [0, s-1] \text{ при } N=1, \\ \{K_n\}_{(n=0, \overline{7})}, K_n = \|k_{i,j}\|_{(i=0, \overline{s-1}, j=0, \overline{s-1})}, k_{i,j} \in [0, s^2-1] \text{ при } N=2, \\ \{K_n\}_{(n=0, \overline{47})}, K_n = \|k_{i,j,l}\|_{(i=0, \overline{s-1}, j=0, \overline{s-1}, l=0, \overline{s-1})}, k_{i,j,l} \in [0, s^3-1] \text{ при } N=3, \end{cases} \quad (4)$$

где P – число ориентаций примитива, определяемое выражением

$$P = 2^{2^{N-1}} \cdot N = \begin{cases} 2 & \text{при } N=1, \\ 8 & \text{при } N=2, \\ 48 & \text{при } N=3. \end{cases} \quad (5)$$

3. Определение номера M_0 начальной ориентации примитива ($r=0$):

$$\begin{cases} M_0 = m_0(0) = 0 & \text{при } N = 1, \\ M_0 = m_{0,0}(0) = 0 & \text{при } N = 2, \\ M_0 = m_{0,0,0}(0) = 0 & \text{при } N = 3. \end{cases} \quad (6)$$

4. Задание подстановочной матрицы F :

$$\begin{cases} F = \|f_{i,j}\|_{(i=0,\overline{s-1},j=0,\overline{1})} & \text{при } N = 1, \\ F = \|f_{i,j}\|_{(i=0,\overline{s^2-1},j=0,\overline{7})} & \text{при } N = 2, \\ F = \|f_{i,j}\|_{(i=0,\overline{s^3-1},j=0,\overline{47})} & \text{при } N = 3. \end{cases} \quad (7)$$

2. Алгоритм формирования N -мерных рекурсивных разверток

Предлагается итерационный алгоритм формирования матриц траекторий N -мерных рекурсивных разверток для преобразования N -мерных данных, основанный на компактном описании рекурсивных разверток и состоящий из следующих шагов.

1. Компактное описание рекурсивной развертки в соответствии с выражениями (3)–(7).
2. Определение длины L_T траектории рекурсивной развертки исходя из числа V_T элементов N -мерных данных, преобразуемых разверткой:

$$L_T = \left(s^{\lceil \log_s(\lceil \sqrt[N]{V_T} \rceil) \rceil} \right)^N, \quad (8)$$

где $\lceil \rceil$ – операция округления с избытком.

3. Определение числа R итераций формирования рекурсивной развертки, исходя из размерности N и длины L_T траектории рекурсивной развертки, с помощью выражения

$$R = \log_s(\sqrt[N]{L_T}). \quad (9)$$

4. Задание начального значения счетчика итераций $r=l$.

5. Начало цикла. Формирование вспомогательной матрицы Q_r :

$$\begin{cases} \begin{cases} Q_r = \|K_{m_{\lfloor i/s \rfloor}}(r-1)\|_{(i=0,\overline{s^r-1})} = \\ = \|q_i(r)\|_{(i=0,\overline{s^r-1})} & \text{при } N = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} Q_r = \|K_{m_{\lfloor i/s \rfloor, \lfloor j/s \rfloor}}(r-1)\|_{(i=0,\overline{s^r-1},j=0,\overline{s^r-1})} = \\ = \|q_{i,j}(r)\|_{(i=0,\overline{s^r-1},j=0,\overline{s^r-1})} & \text{при } N = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} Q_r = \|K_{m_{\lfloor i/s \rfloor, \lfloor j/s \rfloor, \lfloor l/s \rfloor}}(r-1)\|_{(i=0,\overline{s^r-1},j=0,\overline{s^r-1},l=0,\overline{s^r-1})} = \\ = \|q_{i,j,l}(r)\|_{(i=0,\overline{s^r-1},j=0,\overline{s^r-1},l=0,\overline{s^r-1})} & \text{при } N = 3. \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

6. Формирование матрицы номеров ориентаций примитива M_r :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_r = \|m_i(r)\|_{(i=0, \overline{s^r-1})}, m_i(r) = f_{q_i(r), m_{\lfloor i/s \rfloor}}(r-1) \text{ при } N=1, \\ M_r = \|m_{i,j}(r)\|_{(i=0, \overline{s^r-1}, j=0, \overline{s^r-1})}, m_{i,j}(r) = f_{q_{i,j}(r), m_{\lfloor i/s \rfloor, \lfloor j/s \rfloor}}(r-1) \text{ при } N=2, \\ M_r = \|m_{i,j,l}(r)\|_{(i=0, \overline{s^r-1}, j=0, \overline{s^r-1}, l=0, \overline{s^r-1})}, \\ m_{i,j,l}(r) = f_{q_{i,j,l}(r), m_{\lfloor i/s \rfloor, \lfloor j/s \rfloor, \lfloor l/s \rfloor}}(r-1) \text{ при } N=3. \end{array} \right. \quad (11)$$

7. Увеличение счетчика итераций на единицу: $r = r + 1$.

8. Проверка условия окончания цикла. Если $r < R$, переход к началу цикла на шаг 5.

9. Определение значений элементов матрицы $T(R)$ траектории рекурсивной развертки для R итераций:

$$\left\{ \begin{array}{l} T(R) = \|t_i(R)\|_{(i=0, \overline{s^R-1})}, t_i(R) = \sum_{r=1}^R q_{\lfloor i/s^{R-r} \rfloor}(r) \cdot s^{R-r} \text{ при } N=1, \\ T(R) = \|t_{i,j}(R)\|_{(i=0, \overline{s^R-1}, j=0, \overline{s^R-1})}, \\ t_{i,j}(R) = \sum_{r=1}^R q_{\lfloor i/s^{R-r} \rfloor, \lfloor j/s^{R-r} \rfloor}(r) \cdot s^{2 \cdot (R-r)} \text{ при } N=2, \\ T(R) = \|t_{i,j,l}(R)\|_{(i=0, \overline{s^R-1}, j=0, \overline{s^R-1}, l=0, \overline{s^R-1})}, \\ t_{i,j,l}(R) = \sum_{r=1}^R q_{\lfloor i/s^{R-r} \rfloor, \lfloor j/s^{R-r} \rfloor, \lfloor l/s^{R-r} \rfloor}(r) \cdot s^{3 \cdot (R-r)} \text{ при } N=3. \end{array} \right. \quad (12)$$

Алгоритм формирования матриц траекторий N -мерных рекурсивных разверток включает блоки компактного описания рекурсивной развертки и циклически реализуемые блоки формирования вспомогательных матриц и матриц номеров ориентаций примитива (рис. 3).

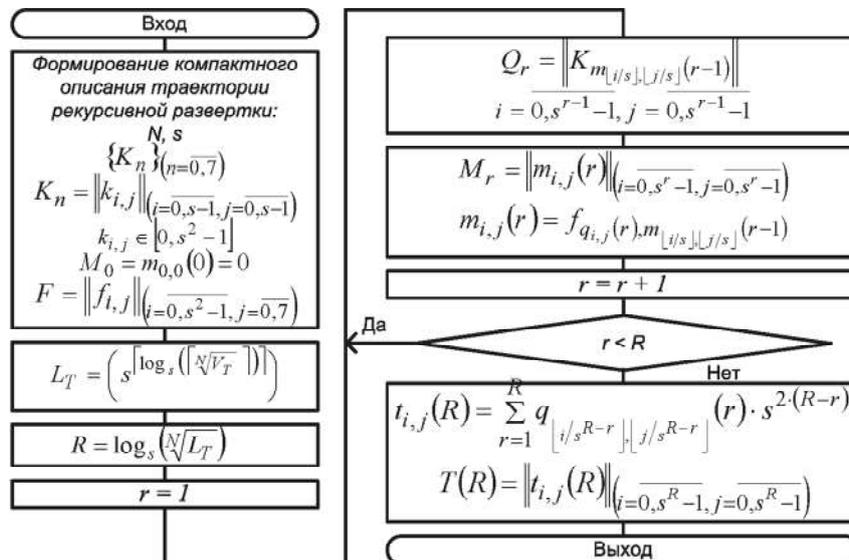


Рис. 3. Блок-схема алгоритма формирования двухмерной рекурсивной развертки

3. Компактное описание и формирование рекурсивной развертки Гильберта

Для эффективной обработки N -мерных данных на основе вейвлет-преобразования представляют интерес рекурсивные развертки с размером примитива, кратным 2^N . Простейшей рекурсивной разверткой, удовлетворяющей данному условию при $N=2$, является развертка Гильберта с размером примитива $s=2$.

Для 2D-развертки Гильберта обеспечивается $P=8$ и $S=2^2=4$. Данная развертка компактно описывается множеством $\{K_n\}_{(n=0,7)}$ ориентационных матриц, $K_n = \begin{bmatrix} k_{0,0} & k_{0,1} \\ k_{1,0} & k_{1,1} \end{bmatrix}$, $k_{i,j} \in [0,3]$, и подстановочной матрицей F , определяемыми следующими выражениями:

$$\begin{cases} K_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, K_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ K_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, K_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, K_6 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, K_7 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \end{cases} \quad (13)$$

$$F = \|f_{i,j}\|_{(i=0,3, j=0,7)} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Правила замены элементов $q_{i,j}(r) \in [0,3]$ вспомогательной матрицы $Q_r = \|K_{m_{\lfloor i/2 \rfloor, \lfloor j/2 \rfloor}}(r-1)\|_{(i=0,2^r-1, j=0,2^r-1)}$ на номера ориентационных матриц представлены в табл. 1 и на основе (10), (11) применяются на каждой итерации согласно логической схеме $M_{r-1} \Rightarrow Q_r \Rightarrow M_r$.

Таблица 1

Таблица подстановки для 2D-развертки Гильберта

$q_{i,j}(r)$	$m_{\lfloor i/2 \rfloor, \lfloor j/2 \rfloor}(r-1)$							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	1	2	3	4	5	6	7
3	5	4	7	6	1	0	3	2

Альтернативным описанием рекуррентного соотношения (14) и табл. 1 является граф смены номеров ориентаций примитива $m_{i,j}(r)$ в зависимости от значений $q_i(r)$ и $m_{\lfloor i/s \rfloor, \lfloor j/s \rfloor}(r-1)$ (рис. 4, а).

На основе компактного описания (13), (14) может быть построена рекурсивная развертка Гильберта произвольного размера и начальной ориентации примитива. Для $R=3$ и $M_0=0$ матрицы номеров ориентаций примитива M_r и вспомогательные матрицы Q_r развертки Гильберта определяются следующими выражениями.

Инициализация: $r=0$, $M_0 = m_{0,0}(0) = [0]$.

Итерация 1: $r=1$, $Q_1 = [K_{m_{0,0}(0)}] = [K_0] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $M_1 = \begin{bmatrix} m_{0,0}(1) & m_{0,1}(1) \\ m_{1,0}(1) & m_{1,1}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$.

Итерация 2: $r = 2$,

$$Q_2 = \begin{bmatrix} K_{m_{0,0}(1)} & K_{m_{0,1}(1)} \\ K_{m_{1,0}(1)} & K_{m_{1,1}(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_0 & K_0 \\ K_7 & K_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} m_{0,0}(2) & m_{0,1}(2) & m_{0,2}(2) & m_{0,3}(2) \\ m_{1,0}(2) & m_{1,1}(2) & m_{1,2}(2) & m_{1,3}(2) \\ m_{2,0}(2) & m_{2,1}(2) & m_{2,2}(2) & m_{2,3}(2) \\ m_{3,0}(2) & m_{3,1}(2) & m_{3,2}(2) & m_{3,3}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 7 & 5 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Итерация 3: $r = 3$,

$$Q_3 = \begin{bmatrix} K_{m_{0,0}(2)} & K_{m_{0,1}(2)} & K_{m_{0,2}(2)} & K_{m_{0,3}(2)} \\ K_{m_{1,0}(2)} & K_{m_{1,1}(2)} & K_{m_{1,2}(2)} & K_{m_{1,3}(2)} \\ K_{m_{2,0}(2)} & K_{m_{2,1}(2)} & K_{m_{2,2}(2)} & K_{m_{2,3}(2)} \\ K_{m_{3,0}(2)} & K_{m_{3,1}(2)} & K_{m_{3,2}(2)} & K_{m_{3,3}(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_0 & K_0 & K_0 & K_0 \\ K_7 & K_5 & K_7 & K_5 \\ K_2 & K_7 & K_5 & K_2 \\ K_0 & K_7 & K_5 & K_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 7 & 5 & 7 & 5 & 7 & 5 \\ 2 & 7 & 5 & 2 & 2 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 0 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 7 & 5 & 2 & 7 & 5 & 2 & 7 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 7 & 5 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 7 & 5 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

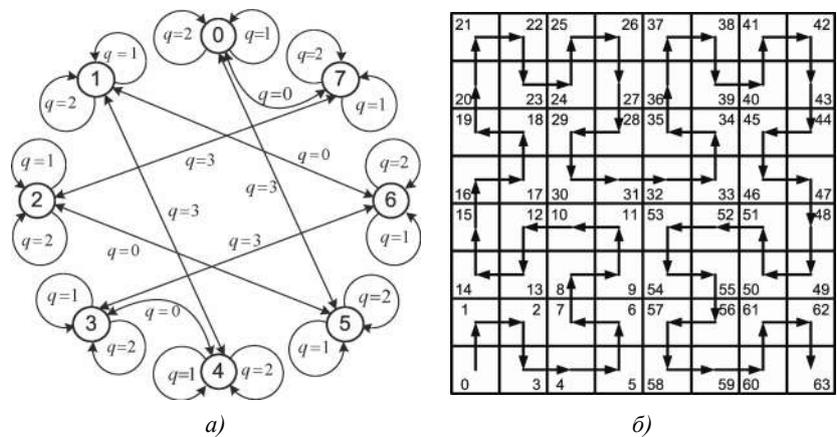


Рис. 4. Граф формирования и траектория рекурсивной 2D-развертки Гильберта: а) граф развертки; б) траектория развертки при $R=3$ и $M_0=0$

Матрица $T(3)$ траектории рекурсивной развертки Гильберта имеет вид

$$T(3) = \begin{bmatrix} 21 & 22 & 25 & 26 & 37 & 38 & 41 & 42 \\ 20 & 23 & 24 & 27 & 36 & 39 & 40 & 43 \\ 19 & 18 & 29 & 28 & 35 & 34 & 45 & 44 \\ 16 & 17 & 30 & 31 & 32 & 33 & 46 & 47 \\ 15 & 12 & 11 & 10 & 53 & 52 & 51 & 48 \\ 14 & 13 & 8 & 9 & 54 & 55 & 50 & 49 \\ 1 & 2 & 7 & 6 & 57 & 56 & 61 & 62 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 58 & 59 & 60 & 63 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

На рис. 4, б показана траектория рекурсивной развертки Гильберта, соответствующая матрице (15). Аналогично формируются компактные описания и траектории других рекурсивных разверток.

4. Результаты моделирования рекурсивных разверток

На рис. 5, а-в представлены 2D-образы рекурсивных разверток Гильберта 64×64 ($R=6$), Пеано 81×81 ($R=4$) и крестообразной 125×125 ($R=3$) в виде полутоновых изображений, полученные по матрицам траекторий $T(R)$ в результате пересчета их значений по модулю 64, 81 и 125 соответственно. Выбор модуля определяет особенности визуализации структуры формируемого 2D-образа развертки и позволяет оценить степень ее нерегулярности. На рис. 5, г изображен 2D-образ 512×512 пикселей 3D-развертки Гильберта $64 \times 64 \times 64$ ($R=6$), полученный в результате пересчета значений матрицы $T(R)$ по модулю 64. 2D-образ составлен из 64 фрагментов 64×64 .

Оценка компактности предложенного описания рекурсивных разверток (1) может быть представлена в виде отношения G объемов информации $\nu(T(R))$ и $\nu(M_0, K_0, F, R)$, относящихся соответственно к формируемой матрице траектории $T(R)$ рекурсивной развертки и элементам компактного описания:

$$G = \nu(T(R)) / \nu(M_0, K_0, F, R), \quad (16)$$

где $\nu(M_0, K_0, F, R) = \nu(M_0) + \nu(K_0) + \nu(F) + \nu(R)$; $\nu(M_0)$, $\nu(K_0)$, $\nu(F)$, $\nu(R)$ – объемы информации, относящиеся к описанию матриц M_0 , K_0 , F и числу итераций R соответственно.

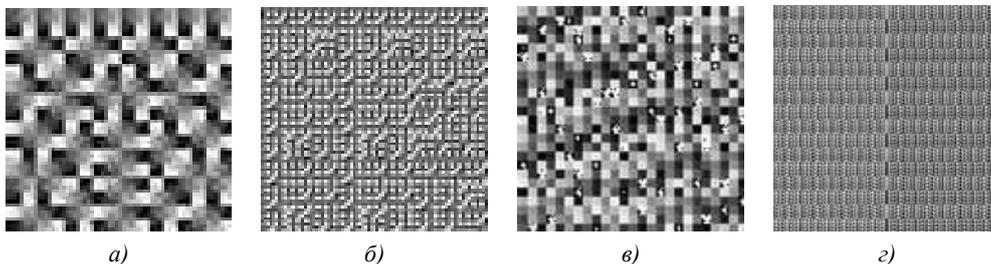


Рис. 5. 2D-образы рекурсивных разверток:
а) 2D-развертка Гильберта 64×64 ; б) 2D-развертка Пеано 81×81 ; в) крестообразная 2D-развертка 125×125 ; г) 2D-образ 512×512 3D-развертки Гильберта $64 \times 64 \times 64$

С учетом формулы (2), размера S примитива и числа R итераций построения развертки оценка $\nu(T(R))$ вычисляется с помощью $\nu(T(R)) = S^R$ (символов) или $\nu(T(R)) = S^R \cdot \lceil \log_2 S^R \rceil$ (бит). С учетом (1), (2), (5), размера S и числа P ориентаций примитива оценки $\nu(M_0)$, $\nu(K_0)$, $\nu(F)$ и $\nu(R)$ вычисляются в соответствии с выражениями

$$\nu(M_0) = 1 \text{ (символ) или } \nu(M_0) = \lceil \log_2 P \rceil \text{ (бит);} \quad (17)$$

$$\nu(K_0) = S \text{ (символов) или } \nu(K_0) = S \cdot \lceil \log_2 S \rceil \text{ (бит);} \quad (18)$$

$$\nu(F) = S \times P \text{ (символов) или } \nu(F) = S \cdot P \cdot \lceil \log_2 P \rceil \text{ (бит);} \quad (19)$$

$$\nu(R) = 1 \text{ (символ) или } \nu(R) = \lceil \log_2 R \rceil \text{ (бит).} \quad (20)$$

В табл. 2 приведены значения оценок компактности G рекурсивных 2D-разверток Гильберта, Пеано и крестообразной, показанных на рис. 5 ($N=2, P=8$).

Таблица 2

Объемы информации для компактного описания двумерных рекурсивных разверток

Типы разверток	S	$\nu(M_0)$, бит	$\nu(K_0)$, симв./бит	$\nu(F)$, симв./бит	$\nu(R)$, бит	$\nu(M_0, K_0, F, R)$, бит	$\nu(T(R))$, симв./бит	G
Гильберта	4	3	4 / 8	32 / 96	3	110	4096/49152	446,8
Пеано	9	3	9 / 36	72 / 216	3	258	6561/85293	330,6
Крестообразная	25	3	25 / 125	200/600	2	730	15625/218750	299,7

Важно отметить, что компактность предложенного описания слабо зависит от размера матрицы траектории $T(R)$ рекурсивной развертки. Выигрыш G от использования компактного описания рекурсивной развертки растет с увеличением размера матрицы траектории $T(R)$.

Заключение

В отличие от известных описаний рекурсивных разверток, построенных на графах, блок-схемах алгоритмов, рисунках траекторий и ориентированных на алгоритм синтеза развертки определенного типа и размерности, предложенное описание рекурсивных разверток является компактным и позволяет получить траекторию развертки произвольного типа и размерности за счет выбора примитива, числа итераций построения матрицы траектории и использования рекуррентного преобразования над матрицей номеров ориентаций примитива. Данное компактное описание и алгоритм формирования рекурсивных разверток практически не зависят от размера матрицы траектории и позволяют получить эффективную аппаратно-программную реализацию произвольных рекурсивных разверток.

Список литературы

1. Sagan, H. Space-Filling Curves / H. Sagan. – Springer Verlag, 1994.
2. Lamarque, C.-H. Image analysis using space-filling curves and 1D wavelet bases / C.-H. Lamarque, F. Robert // Pattern Recognition. – 1996. – № 29(8). – P. 1309–1322.
3. Maniccam, S.S. Lossless image compression and encryption using SCAN / S.S. Maniccam, N.G. Bourbakis // Pattern Recognition. – 2001. – № 34. – P. 1229–1245.
4. Преобразование размерности пространств представления информации на основе рекурсивных разверток / А.А. Борискевич [и др.] // Современные средства связи: материалы науч.-техн. конф. Нарочь, 2005 / Изв. Бел. инж. акад. – 2005. – № 1 (19)/4. – С. 36–38.
5. Артюшенко, В.М. Цифровое сжатие видеoinформации и звука: учеб. пособие / В.М. Артюшенко, О.И. Шелухин, М.Ю. Афонин / Под ред. В.М. Артюшенко. – М.: Дашков и К°, 2003. – 426 с.
6. Hartung, F. Multimedia Watermarking Techniques / F. Hartung, M. Kutter // Proc. of IEEE. – 1999. – Vol. 87, № 7. – P. 1079–1107.
7. Provine, J.A. Lossless compression of peanoscanned images / J.A. Provine, R.M. Rangayyan // Journal of Electronic Imaging. – 1994. – Vol. 3. – P. 176–181.
8. Moghaddam, B. Space-filling curves for image compression / B. Moghaddam, K.J. Hintz, C.V. Steward // Proc. of SPIE. Automatic Object Recognition. – Vol. 1497. – San Jose, CA, 1991. – P. 414–421.

9. Уэлстид, С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии: учеб. пособие / С. Уэлстид – М.: Триумф, 2003. – 230 с.
10. Hilbert, D. Uber die stetige abbildung einer linie auf Flachenstuck / D. Hilbert // *Mathematische Annalen*. – 1891. – № 38. – P. 459–460.
11. Peano, G. Sur une courbe qui remplit touteune aire plane / G. Peano // *Mathematische Annalen*. – 1890. – № 36. – P. 157–160.
12. Bially, T. Space-Filling Curves: Their Generation and Their Application to Bandwidth Reduction / T. Bially // *IEEE Trans. Information Theory*. – 1969. – Vol. 15. – P. 658–664.
13. Elshafei-Ahmed, M. Fast methods for split codebooks / M. Elshafei-Ahmed // *Signal Processing*. – 2000. – № 80. – P. 2553–2565.
14. Hart, C. J. The object instancing paradigm for linear fractal modeling / C.J. Hart // *Proc. Graphics Interface*. – Vancouver, 1992. – P. 224–231.
15. Drost, G.W. A hybrid system for real-time lossless image compression / G.W. Drost, N.G. Bourbakis // *Microprocessors and Microsystems*. – 2001. – № 25. – P. 19–31.
16. Кудреватых, С.И. Генетический код для рекурсивных разверток / С.И. Кудреватых. – Минск, 1990. – 52 с. – (Препринт / АН БССР, Ин-т техн. кибернетики; № 34).
17. Huang, C.-H. A tensor product formulation of Strassen's matrix multiplication algorithm / C.-H. Huang, J. R. Johnson, R. W. Johnson // *Appl. Math Letters*. – 1990. – Vol. 3(3). – P. 104–108.
18. Maniccam, S.S. Lossless compression and information hiding in images / S.S. Maniccam, N. Bourbakis // *Pattern Recognition*. – 2004. – Vol. 37. – P. 475–486.
19. Цветков, В.Ю. Метод двухмерного представления аудио и речевой информации на основе рекурсивных разверток / В.Ю. Цветков // *Докл. Бел. гос. университета информатики и радиоэлектроники*. – 2005. – № 6. – С. 34–40.
20. Борискевич, А.А. Метод шифрования речи и данных на основе рекурсивных разверток и муаровых ключей / А.А. Борискевич, В.Ю. Цветков // *Докл. Бел. гос. университета информатики и радиоэлектроники*. – 2005. – № 5. – С. 66–67.

Поступила 23.03.07

*Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники,
Минск, П. Бровки, 6
e-mail: vtsvet@bsuir.unibel.by*

A.A. Baryskevich, V.Yu. Tsviatkou

A COMPACT DESCRIPTION AND FORMING N-DIMENSIONAL RECURSIVE SCANS

A compact description and an iterative algorithm of forming continuous and noncontinuous trajectories of arbitrary N -dimensional recursive scans based on recursive scan trajectory matrix are proposed. The matrix is defined by a sufficiently small set of initial parameters: the scan dimension, the primitive size, the substitution matrix, the primitive orientation matrix set and the initial primitive orientation number. It is shown that the description and the algorithm allow to receive a trajectory of arbitrary recursive scan with any initial conditions due to choice of the primitive, the iterations number of recursive scan trajectory matrix design, and using the recurrent transform of primitive orientation number matrix.