ИНФОРМАТИКА

2007 январь-март № 1

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 512

О.Л. Швед, С.С. Булюшко

КВАДРАТ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ВАНДЕРМОНДА ДЛЯ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

С помощью символьных вычислений системы Mathcad получено выражение квадрата определителя Вандермонда, которое зависит только от коэффициентов полинома и позволяет определить наличие кратного корня полинома.

Введение

Система Mathcad является удобным средством для частичной автоматизации работы квалифицированного аналитика [1]. С помощью системы существенно расширяются возможности исследователя, например, при преобразовании громоздких алгебраических выражений. Можно использовать стандартные функциональные опции: «expand», «factor», «подобные», «коэффициенты полинома», «дифференциалы», «разложить на составляющие». Оптимально сочетать три режима работы:

R – символьные преобразования, т. е. обычную ручную работу аналитика;

S – символьные преобразования с помощью системы Mathcad;

C – численные вычисления с помощью специально разработанного комплекса программ, например, на языке Фортран. Здесь можно контролировать работу в двух других режимах, увеличивать точность вычислений до удвоенной, учетверенной и т. д., проводить проверку тождественности соотношений.

1. Первое представление квадрата определителя Вандермонда

Указывая по ходу рассуждений режим работы, обратимся, для примера, к задаче об определении существования кратного корня полинома, коэффициенты которого заданы в общем, аналитическом виде. Рассмотрим произвольный полином пятой степени над полем действительных чисел от одной переменной: $Y_0A^5 + Y_1A^4 + Y_2A^3 + Y_3A^2 + Y_4A + Y_5, Y_0 \neq 0$. Запишем полином в нормированном виде: $P(A) = A^5 + X_1A^4 + X_2A^3 + X_3A^2 + X_4A + X_5$, $X_0 = 1$. Обозначим A_i корни полинома. Выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&A_i^5 + X_1A_i^4 + X_2A_i^3 + X_3A_i^2 + X_4A_i + X_5 = 0 \quad (X_i = Y_iY_0^{-1}); \quad X_1 = -(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5);\\
&X_2 = A_1A_2 + A_1A_3 + A_1A_4 + A_1A_5 + A_2A_3 + A_2A_4 + A_2A_5 + A_3A_4 + A_3A_5 + A_4A_5;\\
&X_3 = -(A_3A_4A_5 + A_2A_4A_5 + A_2A_3A_5 + A_2A_3A_4 + A_1A_4A_5 + A_1A_3A_5 + A_1A_3A_4 + A_1A_2A_5 +\\
&+A_1A_2A_4 + A_1A_2A_3);\\
&X_4 = A_1A_2A_3A_4 + A_2A_3A_4A_5 + A_1A_3A_4A_5 + A_1A_2A_4A_5 + A_1A_2A_3A_5; \quad X_5 = -A_1A_2A_3A_4A_5.
\end{aligned} \tag{1}$$

Заменой переменной $A = a - 5^{-1}X_1$ получаем приведенный полином $p(a) = a^5 + x_2a^3 + {}$ $+x_3a^2 + x_4a + x_5$ с корнями $a_i = A_i + 5^{-1}X_1$ (режим S). Имеют место равенства

$$\begin{aligned} & a_i^5 + x_2 a_i^3 + x_3 a_i^2 + x_4 a_i + x_5 = 0; \quad x_1 = -(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 0; \\ & x_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_1 a_5 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_5; \\ & x_3 = -(a_3 a_4 a_5 + a_2 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_5 + a_2 a_3 a_4 + a_1 a_4 a_5 + a_1 a_3 a_5 + a_1 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_5 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_2 a_3); \\ & x_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 a_5 + a_1 a_3 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_3 a_5; \quad x_5 = -a_1 a_2 a_3 a_4 a_5. \end{aligned} \tag{2}$$

Запишем определитель Вандермонда:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_1^2 & A_1^3 & A_1^4 \\ 1 & A_2 & A_2^2 & A_2^3 & A_2^4 \\ 1 & A_3 & A_3^2 & A_3^3 & A_3^4 \\ 1 & A_4 & A_4^2 & A_4^3 & A_4^4 \\ 1 & A_5 & A_5^2 & A_5^3 & A_5^4 \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (A_i - A_j) = \prod_{i<j} (a_i - a_j) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \\ 1 & a_5 & a_5^2 & a_5^3 & a_5^4 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Из равенств (3) следует, что условие существования кратного корня для обоих полиномов совпадает и равносильно равенству $W = 0$. Получим выражение для квадрата последнего через коэффициенты полиномов. Находим из (3) (режим R)

$$W^2 = \prod_{i=1}^{5} (c_4 a_i^4 + c_2 a_i^2 + c_1 a_i + c_0) \quad (c_0 = x_4, \;\; c_1 = 2x_3, \;\; c_2 = 3x_2, \;\; c_4 = 5). \tag{4}$$

Отметим, что по соотношениям (3), (4) условие существования кратного корня равносильно условию того, что этот корень является корнем производной полинома.

2. Второе представление квадрата определителя Вандермонда

Согласно работе [2] для симметричных канонических полиномов справедливы равенства

$$\begin{aligned} & s_1 = 0; \;\; s_2 = -2x_2; \;\; s_3 = -3x_3; \;\; s_4 = 2(x_2^2 - 2x_4); \;\; s_5 = -5(x_5 - x_2 x_3); \\ & s_{k+5} = -x_2 s_{k+3} - x_3 s_{k+2} - x_4 s_{k+1} - x_5 s_k \quad (s_k = a_1^k + a_2^k + a_3^k + a_4^k + a_5^k, \;\; k = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{5}$$

Раскрыв рекуррентное равенство в (5), получим (режим S) следующие тождества:

$$\begin{aligned} & s_6 = 6x_2 x_4 + 3x_3^2 - 2x_2^3; \;\; s_7 = 7(x_3 x_4 + x_2 x_5 - x_2^2 x_3); \\ & s_8 = 2(4(x_3 x_5 - x_2 x_3^2 - x_2^2 x_4) + 2x_4^2 + x_2^4); \;\; s_9 = 3(-6x_2 x_3 x_4 + 3(x_4 x_5 - x_2^2 x_5 + x_2^3 x_3) - x_3^3); \\ & s_{10} = -20 x_2 x_3 x_5 + 15 x_2^2 x_3^2 + 10(x_2^3 x_4 - x_3^2 x_4 - x_2 x_4^2) + 5x_5^2 - 2x_2^5; \\ & s_{11} = 11(3x_2^2 x_3 x_4 - 2x_2 x_4 x_5 - x_3^2 x_5 - x_3 x_4^2 + x_2^3 x_5 + x_2 x_3^3 - x_2^4 x_3); \\ & s_{12} = 36(x_2^2 x_3 x_5 + x_2 x_3^2 x_4) - 24(x_2^3 x_3^2 + x_3 x_4 x_5) + 18 x_2^2 x_4^2 - 12(x_2^4 x_4 + x_2 x_5^2) - 4x_4^3 + 3x_3^4 + 2x_2^6; \\ & s_{13} = 13(-4x_2^3 x_3 x_4 + 3(x_2 x_3 x_4^2 + x_2^2 x_4 x_5 + x_2 x_3^2 x_5) - 2x_2^2 x_3^3 - x_3 x_5^2 - x_2^4 x_5 - x_3^3 x_4 - x_4^2 x_5 + x_2^5 x_3); \\ & s_{14} = 84(x_2 x_3 x_4 x_5 - x_2^2 x_3^2 x_4) - 56 x_2^3 x_3 x_5 + 35 x_2^4 x_3^2 - 28 x_2^3 x_4^2 + 21(x_3^2 x_4^2 + x_2^2 x_5^2) + 14(x_2 x_4^3 - \\ & - x_4 x_5^2 - x_2 x_3^4 + x_2^5 x_4 + x_3^3 x_5) - 2x_2^7. \end{aligned} \tag{6}$$

Из соотношения (4) с учетом (2), (5), (6) вычислим $W^2 = \sum_{i=0}^{20} t_i$, где первоначально t_i – симметричные полиномы от переменных $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ порядка i без учета произведений степеней c_j. Получим конечные выражения для t_i (режим R):

$$
\begin{aligned}
&t_0 = c_0^5;\quad t_1 = 0;\quad t_2 = c_0^3c_1^2x_2 + c_0^4c_2s_2;\quad t_3 = -c_0^2c_1^3x_3 - c_0^3c_1c_2s_3;\\
&t_4 = c_0c_1^4x_4 + c_0^4c_4s_4 + c_0^2c_1^2c_2(s_2x_2 + s_4) + c_0^3c_2^2 2^{-1}(s_2^2 - s_4);\\
&t_5 = -c_1^5x_5 + 5c_0c_1^3c_2x_5 + c_0^2c_1c_2^2(s_5 - s_2s_3) - c_0^3c_1c_4s_5;\\
&t_6 = c_0^3c_2c_4(s_2s_4 - s_6) + c_0^2c_1^2c_4(s_4x_2 + s_6) + c_0c_1^2c_2^2x_2x_4 + c_0^2c_2^3(x_3^2 - 2x_2x_4);\\
&t_7 = c_0^2c_1c_2c_4(2s_7 - s_2s_5 - s_3s_4) + c_0c_1^3c_4(s_3x_4 + s_2x_5) - c_1^3c_2^2x_2x_5 - c_0c_1c_2^3(x_3(s_4 + x_2s_2 +\\
&+5x_4) + 5x_2x_5 + x_5s_2);\\
&t_8 = c_0^3c_4^2 2^{-1}(s_4^2 - s_8) + c_0c_1^2c_2c_4(3s_3x_5 - s_4x_4) + c_0^2c_2^2c_4(2^{-1}(s_2^2 - s_4)s_4 + s_8 - s_2s_6) -\\
&-c_1^4c_4x_5s_3 + c_0c_2^4(x_4^2 - 2x_3x_5) + c_1^2c_2^3x_3x_5;\\
&t_9 = c_0^2c_1c_4^2(s_9 - s_4s_5) - c_1c_2^4x_4x_5 + c_1^3c_2c_4x_5s_4 + c_0c_1c_2^2c_4(2^{-1}s_5(s_4 - s_2^2) - s_2(s_3s_4 - 2s_7) +\\
&+s_3s_6 + s_4s_5 - 3s_9);\\
&t_{10} = c_0c_1^2c_4^2(2^{-1}(s_3^2 - s_6)(s_4 + x_2s_2 + 5x_4) + x_5(s_2s_3 - s_5)) - c_1^2c_2^2c_4x_5(s_5 + x_2s_3) + c_2^5x_5^2 +\\
&+c_0c_2^3c_4((x_4s_4 - x_5s_3 + x_2x_4s_2 + 5(x_4^2 - x_3x_5))s_2 - 5x_5^2) + c_0^2c_2c_4^2(2^{-1}s_2(s_4^2 - s_8) - s_4s_6 + s_{10}); \qquad (7)\\
&t_{11} = c_1^3c_4^2 2^{-1}(s_6 - s_3^2)x_5 + c_0c_1c_2c_4^2(2^{-1}(s_8 - s_4^2)s_3 - s_2(s_4s_5 - s_9) + s_5s_6 - 3s_{11} + 2s_4s_7) -\\
&-c_1c_2^3c_4x_4x_5s_2;\\
&t_{12} = c_0c_2^2c_4^2(2^{-1}(x_4^2 - 2x_3x_5)(s_2^2 - s_4) - 4x_5^2s_2) + c_2^4c_4x_5^2s_2 + c_0^2c_4^3 3^{-1}(2^{-1}(s_4^2 - s_8)s_4 -\\
&-s_4s_8 + s_{12}) + c_1^2c_2c_4^2x_5(s_3s_4 - s_7);\\
&t_{13} = c_0c_1c_4^3(2^{-1}(s_8 - s_4^2)s_5 + s_4s_9 - s_{13}) + c_1c_2^2c_4^2(2^{-1}(s_4 - s_2^2)x_4x_5 + x_5^2s_3);\\
&t_{14} = c_0c_2c_4^3(3^{-1}s_2(2^{-1}(s_4^2 - s_8)s_4 - s_4s_8 + s_{12}) - s_6 2^{-1}(s_4^2 - s_8) + s_4s_{10} - s_{14}) +\\
&+c_2^3c_4^2x_5^2 2^{-1}(s_2^2 - s_4) - c_1^2c_4^3x_5 3^{-1}(2^{-1}(s_3^2 - s_6)s_3 - s_3s_6 + s_9);\\
&t_{15} = c_1c_2c_4^3x_5(2^{-1}(s_3^2 - s_6)s_4 - s_3s_7 + s_{10});\\
&t_{16} = c_2^2c_4^3x_5^2(x_3^2 - 2x_2x_4) + c_0c_4^4((x_4^2 - 2x_3x_5)^2 - 2x_5^2(x_3^2 - 2x_2x_4));\\
&t_{17} = c_1c_4^4x_5(-x_4^3 + 3x_5((x_2^2 + 2x_4)s_3 - s_2s_5 + s_7 + 2x_2x_5));\\
&t_{18} = c_2c_4^4x_5^2(x_4^2 - 2x_3x_5);\quad t_{19} = 0;\quad t_{20} = c_4^5x_5^4.
\end{aligned}
$$

Подставив выражения для c_j, s_k из соотношений (4)–(6) в равенства (7), находим (режим S):

$$
\begin{aligned}
W^2 &= 3125x_5^4 - 3750x_2x_3x_5^3 + (2000x_2x_4^2 + 825x_2^2x_3^2 + 2250x_3^2x_4 - 900x_2^3x_4 + 108x_2^5)x_5^2 +\\
&+(-630x_2x_3^3x_4 - 1600x_3x_4^3 + 108x_3^5 + 560x_2^2x_3x_4^2 - 72x_2^4x_3x_4 + 16x_2^3x_3^3)x_5 + 16x_2^4x_4^3 + \qquad (8)\\
&+256x_4^5 - 27x_3^4x_4^2 + 144x_2x_3^2x_4^3 - 4x_2^3x_3^2x_4^2 - 128x_2^2x_4^4.
\end{aligned}
$$

Если в равенстве (8) принять $x_5 = 0$, то для полинома четвертой степени и его приведенного полинома $p(a) = a^4 + x_2 a^2 + x_3 a + x_4$ получим условие существования кратного корня:

$$256x_4^3 - 128x_2^2 x_4^2 + (144x_2 x_3^2 + 16x_2^4)x_4 - 27x_3^4 - 4x_2^3 x_3^2 = 0. \tag{9}$$

Если в равенстве (9) положить $x_4 = 0$, то приходим к известному условию $(3^{-1}x_2)^3 + (2^{-1}x_3)^2 = 0$ наличия кратного корня кубического полинома и его приведенного полинома $p(a) = a^3 + x_2 a + x_3$.

Переход в равенстве (8) к соотношению, связывающему квадрат определителя Вандермонда с коэффициентами исходного полинома, осуществляется преобразованием (режимы *R*, *S*)

$$\begin{aligned}
&x_i = y_i y_0^{-1}; \quad y_1 = 0;\\
&y_0 = Y_0; \quad y_2 = (5Y_0)^{-1}(5Y_0Y_2 - 2Y_1^2); \quad y_3 = (5Y_0)^{-2}(4Y_1^3 + 25Y_0^2Y_3 - 15Y_0Y_1Y_2);\\
&y_4 = (5Y_0)^{-3}(125Y_0^3Y_4 - 50Y_0^2Y_1Y_3 + 15Y_0Y_1^2Y_2 - 3Y_1^4);\\
&y_5 = -5^{-5}Y_0^{-4}(-3125Y_0^4Y_5 + 625Y_0^3Y_1Y_4 - 125Y_0^2Y_1^2Y_3 + 25Y_0Y_1^3Y_2 - 4Y_1^5).
\end{aligned} \tag{10}$$

В этом случае с помощью преобразования (10) учитывается аналитический вид коэффициента Y_0.

Заключение

В результате комбинирования трех режимов работы получен ряд соотношений (8)–(10), которые могут быть полезными при аналитических исследованиях, например, в вопросах математического моделирования деформируемого твердого тела [3]. Так, соотношение (8) позволяет обнаружить существование кратного корня $(W^2 = 0)$ полинома пятой степени.

Полученные выражения для квадрата определителя Вандермонда остаются справедливыми, если рассматривать полином над полем комплексных чисел.

Список литературы

1. Кудрявцев, Е.М. Mathcad 8 / Е.М. Кудрявцев. – М.: ДМК Пресс, 2000. – 320 с.
2. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.
3. Швед, О.Л. Главные потенциальные направления в модели упругопластической среды / О.Л. Швед // Информатика. – 2006. – № 3 (11). – С. 70–79.

Поступила 26.04.06

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6

O.L. Shwed, S.S. Bulyushko

SQUARED VANDERMOND DETERMINANT FOR THE ROOTS OF FIFTH DEGREE POLYNOM

The expression for the squared Vandermond determinant has been obtained using symbolic calculations of Mathcad system. It depends only on the polynomial coefficients and allows determining the polynomial multiple root existence.