2015 январь-март № 1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.872

С.А. Дудин, О.С. Дудина

МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ С МАРКОВСКИМ ВХОДНЫМ ПОТОКОМ НЕТЕРПЕЛИВЫХ ЗАПРОСОВ, ФУНКЦИОНИРУЮЩАЯ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Исследуется многолинейная система массового обслуживания с бесконечным буфером и нетерпеливыми запросами, функционирующая в случайной среде. В систему поступает марковский входной поток запросов. Время обслуживания запроса имеет распределение фазового типа. В течение времени ожидания в буфере запросы могут проявлять нетерпеливость и покидать систему без обслуживания. Параметры системы зависят от состояния случайной среды. Находится условие существования стационарного режима. Приводятся формулы для вычисления основных характеристик производительности системы. Находится преобразование Лапласа – Стилтьеса распределения времен ожидания и пребывания запроса в системе.

Введение

Современные телекоммуникационные системы и сети связи являются сложным комплексом технических средств, обеспечивающих передачу разнообразных данных на различные расстояния с определенными параметрами качества. Телекоммуникационные системы и сети широко представлены во всех сферах жизнедеятельности человека, науки и техники. Основу телекоммуникационных систем составляют системы передачи данных по электрическим, волоконно-оптическим и радиоканалам. Область телекоммуникационных систем и сетей связи в настоящее время испытывает значительные преобразования, связанные с развитием новых технологий беспроводной передачи данных (в том числе в сенсорных сетях), технологий хранения и обработки информации (облачные вычисления), внедрением волоконно-оптической техники и т. д. Для развития современных телекоммуникационных систем требуется создание адекватных математических моделей их функционирования, которые учитывают особенности, присущие таким системам.

Известно, что на функционирование телекоммуникационных систем могут оказывать существенное воздействие случайные факторы, которые влияют на пропускную способность систем, характеристики входного потока требований, качество передачи данных и т. д. Примерами случайных факторов могут являться искусственные и естественные помехи, различные уровни шумов в канале передачи, изменение расстояния между мобильными передатчиками, параллельная передача информации высокого приоритета, различные сбои и поломки оборудования, влияние погодных условий. Особенно сильное влияние случайные факторы оказывают на беспроводные сети связи, которые интенсивно развиваются в последнее время. Учет влияния случайных факторов на процесс функционирования является крайне важным при построении адекватных математических моделей и расчете характеристик производительности телекоммуникационных систем.

Математические методы теории систем массового обслуживания, функционирующих в случайной среде, позволяют создавать адекватные стохастические модели современных телекоммуникационных систем, учитывающие влияние случайных факторов. Под случайной средой понимается случайный процесс с конечным пространством состояний, независимый от системы. При фиксированном состоянии случайной среды система функционирует как классическая система массового обслуживания. Однако параметры системы (входной поток, распределение времени обслуживания и др.) мгновенно изменяются с изменением состояния случайной среды. Обзор литературы по системам, функционирующим в случайной среде, приведен в статье [1].

В рассматриваемой в данной статье модели предполагается, что обслуживание запросов осуществляется конечным числом приборов. Входной поток запросов определяется с помощью марковского входного потока (MAP, от англ. Markovian arrival process), который позволяет учитывать коррелированный и взрывной характер входного трафика в современных телекоммуникационных сетях. Время обслуживания запроса каждым прибором имеет распределение фазового типа. Как известно, класс распределений фазового типа включает в себя многие традиционно используемые в теории массового обслуживания распределения и всюду плотен в классе всех распределений на неотрицательной полуоси. Вследствие этого произвольное распределение теоретически может быть с любой точностью аппроксимировано распределением фазового типа. Если в момент поступления запроса все приборы заняты, запрос направляется в буфер. Во время ожидания в буфере запросы могут проявлять нетерпеливость и покидать его.

1. Математическая модель

Рассматривается система массового обслуживания, которая состоит из N приборов и буфера бесконечного размера. Поведение системы зависит от состояния случайной среды. Случайная среда определяется стохастическим процессом $r_t, t \geq 0,$ который является неприводимой цепью Маркова с непрерывным временем, с пространством состояний $\{1, 2, \ldots, R\}$ и инфинитезимальным генератором H.

Запросы поступают в соответствии с MAP-потоком, т. е. поступление запросов управляется стохастическим процессом $\nu_t, t \geq 0,$ с пространством состояний $\{0, 1, \ldots, W\}$. При фиксированном состоянии случайной среды r этот процесс является неприводимой цепью Маркова с непрерывным временем. Время пребывания цепи в состоянии ν имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda_\nu^{(r)}$. Когда время пребывания в состоянии ν истекло, процесс ν_t переходит в состояние ν' с вероятностью $p_0^{(r)}(\nu, \nu')$ без генерации запроса, а с вероятностью $p_1^{(r)}(\nu, \nu')$ с генерацией запроса, $\nu, \nu' = \overline{0, W},$ $r = \overline{1, R}.$

Поведение MAP-потока полностью характеризуется квадратными матрицами $D_0^{(r)}$ и $D_1^{(r)}$ размера $\bar{W} = W + 1,$ которые задаются следующим образом:

$$(D_0^{(r)})_{\nu,\nu} = -\lambda_\nu^{(r)},\ \nu = \overline{0, W},\ (D_0^{(r)})_{\nu,\nu'} = \lambda_\nu^{(r)} p_0^{(r)}(\nu, \nu'),\ \nu \neq \nu',\ \ \nu, \nu' = \overline{0, W},$$

и

$$(D_1^{(r)})_{\nu,\nu'} = \lambda_\nu^{(r)} p_1^{(r)}(\nu, \nu'),\ \nu, \nu' = \overline{0, W}.$$

Матрица $D^{(r)}(1) = D_0^{(r)} + D_1^{(r)}$ представляет собой генератор процесса $\nu_t,$ $t \geq 0,$ при фиксированном состоянии среды $r,$ $r = \overline{1, R}.$

Средняя интенсивность $\lambda^{(r)}$ поступления запросов при фиксированном состоянии случайной среды r определяется формулой

$$\lambda^{(r)} = \boldsymbol{\theta}^{(r)} D_1^{(r)} \boldsymbol{e},$$

где $\boldsymbol{\theta}^{(r)}$ – вектор стационарного распределения цепи Маркова $\nu_t,$ $t \geq 0,$ при фиксированном состоянии среды $r,$ $r = \overline{1, R}.$ Вектор $\boldsymbol{\theta}^{(r)}$ является единственным решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\boldsymbol{\theta}^{(r)} D^{(r)}(1) = \mathbf{0},\ \boldsymbol{\theta}^{(r)} \boldsymbol{e} = 1.$$

Здесь и далее $\boldsymbol{e}$ – вектор-столбец, состоящий из единиц, а $\mathbf{0}$ – вектор-строка, состоящая из нулей.

Коэффициент вариации $c_{\text{var}}^{(r)}$ длин интервалов между моментами поступления запросов при фиксированном состоянии случайной среды r определяется формулой

$$c_{\text{var}}^{(r)} = 2\lambda^{(r)}\boldsymbol{\theta}^{(r)}(-D_0^{(r)})^{-1}\boldsymbol{e} - 1,\ r = \overline{1, R}.$$

Коэффициент корреляции $c_{\text{cor}}^{(r)}$ длин двух соседних интервалов при фиксированном состоянии случайной среды r вычисляется по формуле

$$c_{\text{cor}}^{(r)} = (\lambda^{(r)}\boldsymbol{\theta}^{(r)}(-D_0^{(r)})^{-1}D_1^{(r)}(-D_0^{(r)})^{-1}\boldsymbol{e} - 1) / c_{\text{var}}^{(r)},\ r = \overline{1, R}.$$

Более подробную информацию о MAP-потоке и его свойствах можно найти, например, в [2].

Запросы могут проявлять нетерпеливость, т. е. при фиксированном состоянии случайной среды r, $r = \overline{1, R}$, запрос уходит из системы через экспоненциально распределенное с параметром $\alpha^{(r)}$, $0 < \alpha^{(r)} < \infty$, время с момента попадания в буфер при условии, что он не попал на обслуживание.

Время обслуживания запроса прибором имеет распределение фазового типа (PH, от англ. phase type). Время обслуживания, имеющее распределение фазового типа, можно интерпретировать как время, в течение которого управляющий марковский процесс η_t, $t \geq 0$, с конечным пространством состояний $\{1, 2, \ldots, M, M+1\}$ достигнет единственное поглощающее состояние $M+1$ при условии, что при фиксированном состоянии случайной среды r начальное состояние этого процесса выбирается в множестве $\{1, 2, \ldots, M\}$ согласно стохастическому вектору-строке $\boldsymbol{\beta}^{(r)} = (\beta_1^{(r)}, \ldots, \beta_M^{(r)})$, $r = \overline{1, R}$. При фиксированном состоянии случайной среды интенсивности переходов процесса η_t в множестве состояний $\{1, 2, \ldots, M\}$ определяются субгенератором $S^{(r)}$, а интенсивности переходов в поглощающее состояние – элементами вектора-столбца $\boldsymbol{S}_0^{(r)} = -S^{(r)}\boldsymbol{e}$, $r = \overline{1, R}$. Среднее время обслуживания при фиксированном состоянии случайной среды r вычисляется по формуле $b_1^{(r)} = \boldsymbol{\beta}^{(r)}(-S^{(r)})^{-1}\boldsymbol{e}$, $r = \overline{1, R}$. Более подробное описание распределения фазового типа можно найти в [3].

2. Процесс изменения состояний системы и условие эргодичности

Примем следующие обозначения:

i_t – число запросов в системе, $i_t \geq 0$;

r_t – состояние случайной среды, $r_t = \overline{1, R}$;

ν_t – состояние управляющего процесса MAP-потока, $\nu_t = \overline{0, W}$;

$\eta_t^{(m)}$ – число приборов, в которых процесс обслуживания находится на фазе m, $m = \overline{1, M}$, $\eta_t^{(m)} = \overline{0, \min\{i_t, N\}}$, $\sum_{m=1}^{M}\eta_t^{(m)} = \min\{i_t, N\}$, в момент времени t, $t \geq 0$. Тогда поведение системы описывается неприводимой регулярной цепью Маркова с непрерывным временем:

$$\xi_t = \{i_t, r_t, \nu_t, \eta_t^{(1)}, \ldots, \eta_t^{(M)}\},\ t \geq 0.$$

Отметим, что значение компонентов $\eta_t^{(m)}$, $m = \overline{1, M}$, выбрано в соответствии с подходом Рамасвами и Лукантони [4].

Лемма 1. Инфинитезимальный генератор Q цепи Маркова ξ_t, $t \geq 0$, имеет блочно-трехдиагональную структуру:

$$Q=\begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & O & O & \dots \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & O & \dots \\ O & Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ненулевые блоки $Q_{i,j}$, $i, j \ge 0$, имеют вид

$$Q_{i,i} = H \otimes I_{\bar{W}K_i} + \tilde{D}_0^{(i)} + A_i + \Delta_i,\ i=\overline{0,N};$$

$$Q_{i,i} = H \otimes I_{\bar{W}K_N} + \tilde{D}_0^{(N)} + A_N + \Delta_N - E_{i-N},\ i>N;$$

$$Q_{i,i-1} = L_{N-i},\ i=\overline{1,N};$$

$$Q_{i,i-1} = \mathrm{diag}\{I_{\bar{W}} \otimes L_0(N,\tilde{S}^{(r)})P_{N-1}(\boldsymbol{\beta}^{(r)}),\ r=\overline{1,R}\} + E_{i-N},\ i>N;$$

$$Q_{i,i+1} = \mathrm{diag}\{D_1^{(r)} \otimes P_i(\boldsymbol{\beta}^{(r)}),\ r=\overline{1,R}\},\ i=\overline{0,N-1};$$

$$Q_{i,i+1} = \tilde{D}_1^{(N)},\ i \ge N,$$

где I – единичная матрица, O – нулевая матрица соответствующего размера;

$\oplus$ и $\otimes$ – символы кронекеровых суммы и произведения матриц;

$K_i = C_{i+M-1}^{M-1},\ i=\overline{0,N};$

$\tilde{D}_l^{(i)} = \mathrm{diag}\{D_l^{(r)},\ r=\overline{1,R}\} \otimes I_{K_i},\ l=0,1,\ i=\overline{0,N};$

$A_i = \mathrm{diag}\{I_{\bar{W}} \otimes A_i(N,S^{(r)}),\ r=\overline{1,R}\},\ i=\overline{0,N};$

$\Delta_i = -\mathrm{diag}\{I_{\bar{W}} \otimes \Delta_i^{(r)},\ r=\overline{1,R}\},\ i=\overline{0,N},\ \Delta_0 = O_{\bar{W}(R+1)};$

$\Delta_i^{(r)} = \mathrm{diag}\{A_i(N,S^{(r)})\boldsymbol{e} + L_{N-i}(N,\tilde{S}^{(r)})\boldsymbol{e},\ r=\overline{1,R}\},\ i=\overline{0,N};$

$\tilde{S}^{(r)} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{S}_0^{(r)} & S^{(r)} \end{pmatrix},\ r=\overline{1,R};$

$E_k = \mathrm{diag}\{k\alpha^{(r)}, r=\overline{1,R}\} \otimes I_{\bar{W}K_N},\ k=\overline{1,K};$

$L_{N-i} = \mathrm{diag}\{I_{\bar{W}} \otimes L_{N-i}(N,\tilde{S}^{(r)}),\ r=\overline{1,R}\},\ i=\overline{1,N}.$

Детальное описание и алгоритмы для вычисления матриц $P_i(\boldsymbol{\beta}^{(r)}),\ i=\overline{0,N-1},\ A_i(N,S^{(r)})$ и $L_{N-i}(N,\tilde{S}^{(r)}),\ i=\overline{0,N},\ r=\overline{1,R},$ приведены в работе [5].

Доказательство леммы опирается на анализ переходов цепи Маркова ξ_t, $t \ge 0$, за бесконечно малый интервал времени с последующей группировкой интенсивностей соответствующих переходов в блоки матрицы Q.

Замечание. Цепь Маркова ξ_t, $t \ge 0$, принадлежит классу асимптотически квазитеплицевых цепей Маркова с непрерывным временем [6].

Как следует из [6], необходимым условием существования стационарного распределения асимптотически квазитеплицевой цепи Маркова ξ_t, $t \ge 0$, является выполнение неравенства

$$\boldsymbol{y}Y_0\boldsymbol{e} > \boldsymbol{y}Y_2\boldsymbol{e}, \tag{1}$$

где вектор-строка $\boldsymbol{y}$ – решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{y}(Y_0 + Y_1 + Y_2) = \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{ye} = 1,$$

матрицы Y_0, Y_1 и Y_2 определяются как

$$Y_0 = \lim_{i\to\infty} R_i^{-1} Q_{i,i-1},\ Y_1 = \lim_{i\to\infty} R_i^{-1} Q_{i,i} + I,\ Y_2 = \lim_{i\to\infty} R_i^{-1} Q_{i,i+1},$$

а матрица R_i является диагональной матрицей, диагональные элементы которой определяются как модули соответствующих диагональных элементов матрицы $Q_{i,i}$, $i \ge 0.$

Легко убедиться, что в рассматриваемом случае матрицы Y_0, Y_1 и Y_2 имеют следующий вид:

$$Y_1 = (\Phi_{r,r'}),\ r, r' = \overline{1, R},\ Y_2 = \mathrm{diag}\{\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_R\},\ Y_0 = \mathrm{diag}\{\Omega_1, \ldots, \Omega_R\},$$

где

$$\Phi_{r,r'} = \begin{cases} R_r[(H)_{r,r} I_{\bar{W}K_N} + D_0^{(r)} \otimes I_{K_N} + I_{\bar{W}} \otimes (A_N(N, S^{(r)}) - \Delta_N^{(r)})] + I_{\bar{W}K_N},\ \alpha = 0,\ r = r', \\ (H)_{r,r'} R_r,\ \alpha = 0,\ r \ne r',\ r, r' = \overline{1, R}, \\ O,\ \alpha > 0; \end{cases}$$

$$Z_r = \begin{cases} R_r D_1^{(r)},\ \alpha = 0, \\ O,\ \alpha > 0, \end{cases} r = \overline{1, R};$$

$$\Omega_r = \begin{cases} R_r (I_{\bar{W}} \otimes L_0(N, \tilde{S}^{(r)}) P_{N-1}(\boldsymbol{\beta}^{(r)})),\ \alpha = 0, \\ I,\ \alpha > 0, \end{cases} r = \overline{1, R};$$

$$R_r = (-(H)_{r,r} I_{\bar{W}K_N} + \Sigma^{(r)} \otimes I_{K_N} + I_{\bar{W}} \otimes \mathrm{diag}\{L_0(N, \tilde{S}^{(r)})\boldsymbol{e},\ r = \overline{1, R}\})^{-1}.$$

Здесь $\Sigma^{(r)}$ – диагональная матрица, диагональные элементы которой являются соответствующими диагональными элементами матрицы $-D_0^{(r)}$.

Теорема 1. *Если запросы являются нетерпеливыми (т. е.* $\alpha^{(r)} > 0$*) хотя бы для одного состояния случайной среды* r, $r = \overline{1, R}$, *цепь Маркова* ξ_t *является эргодической при любых параметрах системы.*

Доказательство. Пусть $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$ – множество состояний среды, для которых $\alpha^{(l)} > 0, l \in L.$ Можно убедиться, что в данном случае матрица $Y = Y_0 + Y_1 + Y_2$ приводимая и путем согласованной перестановки строк и столбцов может быть представлена в виде

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} \\ O & I \end{pmatrix},$$

где $Y_{1,1}$ – матрица, полученная из матрицы Y путем отбрасывания блочных строк и столбцов с номерами l, $l \in L$; $Y_{1,2}$ – матрица, полученная из матрицы Y путем отбрасывания блочных строк с номерами l, $l \in L$, и столбцов с номерами r, $r = \overline{1, R}$, $r \notin L$.

Как следует из [6], условие эргодичности (1) может быть переписано в виде

$$\boldsymbol{x}\bar{Y}_0\boldsymbol{e} > \boldsymbol{x}\bar{Y}_2\boldsymbol{e}, \tag{2}$$

где вектор $\boldsymbol{x}$ является решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{x}I = \boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{xe} = 1,$$

а матрицы $\bar{Y}_0$ и $\bar{Y}_2$ получены из матриц Y_0 и Y_2 путем отбрасывания блочных строк и столбцов с номерами $r,\ r \in R / L$. Видно, что матрица $\bar{Y}_2$ является нулевой, а $\bar{Y}_0$ – единичной. Очевидно, что условие (2) выполняется всегда:

$$\boldsymbol{x}\bar{Y}_0\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}I\boldsymbol{e} = \boldsymbol{xe} = 1 > 0 = \boldsymbol{x}\bar{Y}_2\boldsymbol{e}.$$

Рассмотрим случай, когда запросы являются абсолютно терпеливыми при всех состояниях среды, т. е. $\alpha^{(r)} = 0,\ r = \overline{1, R}.$ В этом случае блоки генератора имеют следующий вид:

$$Q_{i,i} = Q_1 = H \otimes I_{\bar{W}K_N} + \tilde{D}_0^{(N)} + A_N + \Delta_N,\ i > N;$$

$$Q_{i,i+1} = Q_2 = \tilde{D}_1^{(N)},\ i \ge N;$$

$$Q_{i,i-1} = Q_0 = \mathrm{diag}\{I_{\bar{W}} \otimes L_0(N, \tilde{S}^{(r)})P_{N-1}(\boldsymbol{\beta}^{(r)}),\ r = \overline{1, R}\},\ i > N.$$

Таким образом, блоки генератора не зависят от переменной i при $i > N$ и цепь Маркова $\xi_t,\ t \ge 0,$ принадлежит классу квазитеплицевых цепей Маркова с непрерывным временем или цепей Маркова типа $M / G / 1$ [3].

Как следует из [3], необходимым и достаточным условием эргодичности квазитеплицевых цепей Маркова является выполнение неравенства

$$\boldsymbol{\varphi} Q_0 \boldsymbol{e} > \boldsymbol{\varphi} Q_2 \boldsymbol{e},$$

где вектор $\boldsymbol{\varphi}$ – единственное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{\varphi}(Q_0 + Q_1 + Q_2) = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\varphi e} = 1.$$

Далее считаем, что условие эргодичности рассматриваемой системы выполняется. Тогда существуют следующие пределы (стационарные вероятности):

$$\pi(i, r, \nu, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(M)}) = \lim_{t\to\infty} P\{i_t = i,\ r_t = r,\ \nu_t = \nu,\ \eta_t^{(1)} = \eta^{(1)}, \ldots, \eta_t^{(M)} = \eta^{(M)}\},$$

$$i \ge 0,\ r = \overline{1, R},\ \nu = \overline{0, W},\ \eta^{(m)} = \overline{0, \min\{i, N\}},\ m = \overline{1, M},\ \sum_{m=1}^{M} \eta^{(m)} = \min\{i, N\}.$$

Сформируем векторы $\boldsymbol{\pi}(i, r, \nu)$ из вероятностей $\pi(i, r, \nu, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(M)})$, перенумерованных в обратном лексикографическом порядке компонентов $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(M)}$. Далее сформируем векторы

$$\boldsymbol{\pi}(i, r) = (\boldsymbol{\pi}(i, r, 0), \boldsymbol{\pi}(i, r, 1), \ldots, \boldsymbol{\pi}(i, r, W)),\ r = \overline{1, R};$$

$$\boldsymbol{\pi}_i = (\boldsymbol{\pi}(i, 1), \boldsymbol{\pi}(i, 2), \ldots, \boldsymbol{\pi}(i, R)),\ i \ge 0.$$

Известно, что векторы $\boldsymbol{\pi}_i,\ i \ge 0,$ являются единственным решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$(\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \ldots)Q = \boldsymbol{0},\ (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \ldots)\boldsymbol{e} = 1,$$

где Q – генератор цепи Маркова $\xi_t,\ t \ge 0.$

Для решения данной системы может быть использован специальный устойчивый алгоритм, приведенный в работе [7].

3. Характеристики производительности

Найдя векторы стационарных вероятностей $\boldsymbol{\pi}_i,\ i \ge 0,$ можно вычислить различные характеристики производительности системы:

– среднее число запросов в системе

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{\infty} i\boldsymbol{\pi}_i \boldsymbol{e};$$

– среднее число запросов в буфере

$$N^{\text{buffer}} = \sum_{i=N+1}^{\infty} (i-N)\boldsymbol{\pi}_i \boldsymbol{e};$$

– среднее число занятых приборов

$$N^{\text{server}} = \sum_{i=1}^{\infty} \min\{i, N\}\boldsymbol{\pi}_i \boldsymbol{e};$$

– интенсивность выходного потока обслуженных запросов

$$\lambda^{\text{out}} = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_i \text{diag}\{I_{\bar{W}} \otimes L_{\max\{N-i,0\}}(N, \tilde{S}^{(r)}),\ r = \overline{1, R}\}\boldsymbol{e};$$

– вероятность потери произвольного запроса

$$P^{\text{loss}} = 1 - \frac{\lambda^{\text{out}}}{\lambda},$$

где средняя интенсивность входного потока λ вычисляется по формуле

$$\lambda = \boldsymbol{\theta}\text{diag}\{D_1^{(r)},\ r = \overline{1, R}\}\boldsymbol{e},$$

а вектор $\boldsymbol{\theta}$ является единственным решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\boldsymbol{\theta}(H \otimes I_{\bar{W}} + \text{diag}\{D_0^{(r)} + D_1^{(r)},\ r = \overline{1, R}\}) = \mathbf{0},\ \ \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{e} = 1.$$

4. Распределение времени пребывания произвольного запроса в системе

Пусть $V(x)$ – функция распределения времени пребывания произвольного запроса в системе и $v(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dV(x),\ \text{Re}\, s > 0,$ – ее преобразование Лапласа – Стилтьеса.

Пометим произвольный запрос и будем отслеживать его пребывание в системе. Выведем выражение для преобразования Лапласа – Стилтьеса $v(s)$ с помощью метода коллективных отметок (метода введения дополнительного события, метода катастроф) [8, 9]. С этой целью интерпретируем переменную s как интенсивность воображаемого стационарного пуассоновского потока катастроф. Таким образом, $v(s)$ означает вероятность того, что катастрофа не наступит в течение времени пребывания помеченного запроса.

Пусть $y(s,r,m)$ – вероятность того, что катастрофа не наступит в течение оставшейся части времени обслуживания помеченного запроса в системе при условии, что в данный момент состояние случайной среды есть r, $r=\overline{1,R}$, а фаза обслуживания – m, $m=\overline{1,M}$.

Сформируем векторы

$$\boldsymbol{y}(s,r)=(y(s,r,1),\dots,y(s,r,M))^T,\ r=\overline{1,R};$$

$$\boldsymbol{y}(s)=((\boldsymbol{y}(s,1))^T,\dots,(\boldsymbol{y}(s,R))^T)^T$$

и введем следующие обозначения:

$$\tilde{S}=\mathrm{diag}\{S^{(r)},\ r=\overline{1,R}\};$$

$$\boldsymbol{S}_0=((\boldsymbol{S}_0^{(1)})^T,\dots,(\boldsymbol{S}_0^{(R)})^T)^T.$$

Лемма 2. Вектор $\boldsymbol{y}(s)$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{y}(s)=(-\tilde{S}-H\otimes I_M+sI)^{-1}\boldsymbol{S}_0.$$

Доказательство. Основываясь на вероятностном смысле преобразования Лапласа – Стилтьеса и формуле полной вероятности, можно показать, что вероятности $y(s,r,m)$ удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}y(s,r,m)=(-(S^{(r)})_{m,m}-(H)_{r,r}+s)^{-1}[(\boldsymbol{S}_0^{(r)})_m+\sum_{r'=1,\ r'\neq r}^{R}(H)_{r,r'}y(s,r',m)+\\+\sum_{m'=1,m'\neq m}^{M}(S^{(r)})_{m,m'}y(s,r,m')],\ r=\overline{1,R},\ m=\overline{1,M}.\end{gathered}\tag{3}$$

Используя обозначения, введенные выше, перепишем систему (3) в матричной форме:

$$(\tilde{S}+H\otimes I_M-sI)\boldsymbol{y}(s)=-\boldsymbol{S}_0.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы, так как матрица $\tilde{S}+H\otimes I_M$ является субгенератором, т. е. у матрицы $\tilde{S}+H\otimes I_M-sI$ существует обратная.

Пусть $w(s,l,r,\eta^{(1)},\dots,\eta^{(M)})$ – вероятность того, что катастрофа не наступит в течение оставшейся части времени пребывания помеченного запроса в системе при условии, что в данный момент помеченный запрос имеет положение l, $l>0$, в буфере, состояние случайной среды есть r, $r=\overline{1,R}$, и состояние процессов обслуживания есть $\eta^{(1)},\dots,\eta^{(M)}$.

Перенумеруем вероятности $w(s,l,r,\eta^{(1)},\dots,\eta^{(M)})$ в обратном лексикографическом порядке компонентов $\eta^{(1)},\dots,\eta^{(M)}$ и сформируем из этих вероятностей векторы-столбцы $\boldsymbol{w}(s,l,r)$.

Векторы $\boldsymbol{w}(s,l,r)$, $l>0$, $r=\overline{1,R}$, могут быть найдены из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{w}(s,l,r)=((s+l\alpha^{(r)}-(H)_{r,r})I_{T_N}-A^{(r)})^{-1}(\delta_{l,1}L_0(N,\tilde{S}^{(r)})\boldsymbol{e}\boldsymbol{\beta}^{(r)}\boldsymbol{y}(s,r)+\\+(1-\delta_{l,1})(L^{(r)}+(l-1)\alpha^{(r)}I_{T_N})\boldsymbol{w}(s,l-1,r)+\sum_{r'=1,\ r'\neq r}^{R}(H)_{r,r'}\boldsymbol{w}(s,l,r')+\alpha^{(r)}\boldsymbol{e}_{T_N}),\end{gathered}\tag{4}$$

где $\delta_{i,j}=0$ при $i=j$ и $\delta_{i,j}=1$ в противном случае,

$$L^{(r)} = L_0(N, \tilde{S}^{(r)})P_{N-1}(\boldsymbol{\beta}^{(r)});$$

$$A^{(r)} = A_N(N, S^{(r)}) - \mathrm{diag}\{A_N(N, S^{(r)})\boldsymbol{e} + L_0(N, \tilde{S}^{(r)})\boldsymbol{e},\ r = \overline{1, R}\},\ r = \overline{1, R}.$$

Чтобы найти решение системы (4), введем векторы-столбцы

$$\boldsymbol{w}(s, l) = ((\boldsymbol{w}(s, l, 1))^T, \ldots, (\boldsymbol{w}(s, l, R))^T)^T$$

и перепишем систему (3) в матричном виде

$$(-sI + A - lE + H \otimes I_{T_N})\boldsymbol{w}(s, l) +$$

$$+\delta_{l,1} L\boldsymbol{e}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{y}(s) + (1 - \delta_{l,1})(L + (l-1)E)\boldsymbol{w}(s, l-1) + E\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}^T,\ l > 0,$$

где

$$A = \mathrm{diag}\{A^{(r)},\ r = \overline{1, R}\};$$

$$E = \mathrm{diag}\{\alpha^{(r)} I_{T_N},\ r = \overline{1, R}\};$$

$$L = \mathrm{diag}\{L^{(r)},\ r = \overline{1, R}\};$$

$$\boldsymbol{\beta} = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{\beta}^{(r)},\ r = \overline{1, R}\}.$$

Векторы $\boldsymbol{w}(s, l),\ l > 0,$ можно вычислить по рекуррентным формулам

$$\boldsymbol{w}(s, 1) = (-A + E - H \otimes I_{T_N} + sI)^{-1}(L\boldsymbol{e}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{y}(s) + E\boldsymbol{e})^T;$$

$$\boldsymbol{w}(s, l+1) = (-A + (l+1)E - H \otimes I_{T_N} + sI)^{-1}[E\boldsymbol{e} - (L + lE)\boldsymbol{w}(s, l)]^T,\ l > 1.$$

После нахождения векторов $\boldsymbol{w}(s, l),\ l > 1,$ получим следующий результат.

Теорема 2. *Преобразование Лапласа – Стилтьеса $v(s)$ распределения времени пребывания произвольного запроса в системе вычисляется как*

$$v(s) = P^{\mathrm{loss}} + \lambda^{-1}[\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{r=1}^{R}\boldsymbol{\pi}(i, r)(D_1^{(r)} \otimes I_{T_i})\boldsymbol{e}\boldsymbol{\beta}^{(r)}\boldsymbol{y}(s, r) + \sum_{i=N}^{\infty}\sum_{r=1}^{R}\boldsymbol{\pi}(i, r)(D_1^{(r)}\boldsymbol{e} \otimes I_{T_N})\boldsymbol{w}(s, i - N + 1, r)].$$

Доказательство основывается на вероятностном смысле преобразования Лапласа – Стилтьеса и формуле полной вероятности.

Следствие 1. *Среднее время пребывания V_{soj} произвольного запроса рассчитывается как*

$$V_{\mathrm{soj}} = -v'(s)|_{s=0} = -\lambda^{-1}[\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{r=1}^{R}\boldsymbol{\pi}(i, r)(D_1^{(r)} \otimes I_{T_i})\boldsymbol{e}\boldsymbol{\beta}^{(r)}\frac{\partial \boldsymbol{y}(s, r)}{\partial s}|_{s=0} +$$

$$+\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{r=1}^{R}\boldsymbol{\pi}(i, r)(D_1^{(r)}\boldsymbol{e} \otimes I_{T_N})\frac{\partial \boldsymbol{w}(s, i - N + 1, r)}{\partial s}|_{s=0}].$$

Теорема 3. *Преобразование Лапласа – Стилтьеса $z(s)$ распределения времени ожидания произвольного запроса в системе вычисляется как*

$$z(s) = P^{\mathrm{loss}} + \lambda^{-1}[\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{r=1}^{R}\boldsymbol{\pi}(i, r)(D_1^{(r)} \otimes I_{T_i})\boldsymbol{e} + \sum_{i=N}^{\infty}\sum_{r=1}^{R}\boldsymbol{\pi}(i, r)(D_1^{(r)}\boldsymbol{e} \otimes I_{T_N})\boldsymbol{z}(s, i - N + 1, r)],$$

где векторы $\mathbf{z}(s,l,r),\ l>0,$ *являются подвекторами векторов* $\mathbf{z}(s,l),\ l>0,$ *которые вычисляются по рекуррентным формулам*

$$\mathbf{z}(s,1)=(-A+E-H\otimes I_{T_N}+sI)^{-1}(L\mathbf{e}+E\mathbf{e})^T;$$
$$\mathbf{z}(s,l+1)=(-A+(l+1)E-H\otimes I_{T_N}+sI)^{-1}[E\mathbf{e}-(L+lE)\mathbf{z}(s,l)]^T,\ l>1.$$

Следствие 2. *Среднее время ожидания* V_{wait} *произвольного запроса рассчитывается как*

$$V_{\text{wait}}=-z'(s)|_{s=0}=-\lambda^{-1}\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{r=1}^{R}\boldsymbol{\pi}(i,r)(D_1^{(r)}\mathbf{e}\otimes I_{T_N})\frac{\partial\mathbf{z}(s,i-N+1,r)}{\partial s}|_{s=0}.$$

Заключение

В статье изучена многолинейная система обслуживания с марковским входным потоком нетерпеливых запросов и фазовым распределением времени обслуживания, функционирующая в случайной среде. Рассмотрен процесс изменения состояний системы, найдено условие эргодичности, приведены формулы для нахождения основных характеристик производительности, включая средние времена пребывания и ожидания произвольного запроса в системе. Результаты исследования могут применяться для оценивания производительности и оптимизации функционирования телекоммуникационных систем и сетей связи, на функционирование которых оказывают влияние случайные факторы различной природы.

Работа выполнена при частичной поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект № Ф14МВ-001.

Список литературы

1. Erlang loss queueing system with batch arrivals operating in a random environment / C.S. Kim [et al.] // Computers & Operations Research. – 2009. – Vol. 36, № 3. – P. 674–697.

2. He, Q.M. Queues with marked customers / Q.M. He // Advances in Applied Probability. – 1996. – Vol. 28. – P. 567–587.

3. Neuts, M. Matrix-geometric solutions in stochastic models – an algorithmic approach / M. Neuts. – Johns Hopkins University Press, 1981. – 332 p.

4. Ramaswami, V. Algorithms for the multi-server queue with phase-type service / V. Ramaswami, D.M. Lucantoni // Comm. Statist.-Stochastic Models. – 1985. – Vol. 1. – P. 393–417.

5. Queueing system MMAP/PH/N/N+R with impatient heterogeneous customers as a model of call center / C.S. Kim [et al.] // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, № 3. – P. 958–976.

6. Klimenok, V.I. Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory / V.I. Klimenok, A.N. Dudin // Queueing Systems. – 2006. – Vol. 54. – P. 245–259.

7. Dudina O. Retrial Queueing System with Markovian Arrival Flow and Phase Type Service Time Distribution / O. Dudina, Ch. Kim, S. Dudin // Computers and Industrial Engineering. – 2013. – Vol. 66. – P. 360–373.

8. Kesten, H. Priority in waiting line problems / H. Kesten, J.Th. Runnenburg. – Amsterdam : Mathematisch Centrum, 1956. – 234 p.

9. Danzig, van D. Chaines de Markof dans les ensembles abstraits et applications aux processus avec regions absorbantes et au probleme des boucles / D. van Danzig // Ann. de l'Inst. H. Pioncare. – 1955. – Vol. 14. – P. 145–199.

Поступила 09.12.2014

Белорусский государственный университет,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: dudin85@mail.ru,
dudina_olga@email.com

S.A. Dudin, O.S. Dudina

MULTISERVER QUEUEING SYSTEM WITH MARKOVIAN ARRIVAL FLOW OF IMPATIENT CUSTOMERS OPERATING IN A RANDOM ENVIRONMENT

Multiserver queuing system with an infinite buffer and impatient customers, operating in a random environment is investigated. Customers arrive to the system according to the Markovian arrival flow. Service time of a customer has a phase type distribution. During the waiting time in the buffer customers can be impatient and leave the system forever. The system parameters depend on the state of the random environment. The ergodicity condition is derived. The formulas for calculating the main performance measures of the system are obtained. The Laplace-Stieltjes transforms of waiting and sojourn times of a customer in the system are calculated.