ИНФОРМАТИКА

2008 октябрь-декабрь № 4

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ, ИЗОБРАЖЕНИЙ И ДАННЫХ

УДК 519.246.8:004.67

М.С. Абрамович, М.Н. Мицкевич

ОБНАРУЖЕНИЕ СКАЧКООБРАЗНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ СРЕДНЕГО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА

Для временных рядов, наблюдаемых с шумом, разрабатываются критерии обнаружения скачкообразных изменений среднего, основанные на вейвлет-преобразовании. Относительно шума предполагается, что он имеет более «тяжелые хвосты», чем у нормального распределения. Методом статистического моделирования исследуется эффективность критериев.

Введение

Обнаружение скачкообразных изменений среднего временных рядов, которые описывают процессы в экономике, технике и других приложениях, является актуальной прикладной задачей [1]. В последние годы для выявления локальных особенностей, в том числе и скачкообразных изменений среднего, широко применяется вейвлет-анализ [2, 3]. Использование вейвлет-преобразования для обнаружения скачкообразных изменений основано на том, что в момент скачка абсолютные значения вейвлет-коэффициентов имеют максимальные значения. Альтернативный подход предполагает рассмотрение разностей соседних вейвлет-коэффициентов на уровнях разрешения и определение величины сдвига, для которого разность является максимальной. Эта величина сдвига и определяет момент скачка [4].

Критерии, основанные на использовании максимальных значений вейвлет-коэффициентов или статистик от них, позволяют обнаружить скачкообразные изменения даже при наличии шума. В параметрических критериях обнаружения разладок обычно предполагается нормальное распределение для шума [2], но на практике распределение шума часто отличается от нормального.

В настоящей работе относительно распределения шума предполагается, что он имеет более «тяжелые хвосты», чем у нормального распределения (например, распределения Стьюдента). Для этого случая в работе построены критерии обнаружения скачкообразных изменений временных рядов и методом статистического моделирования исследована их эффективность.

1. Математическая модель скачкообразных изменений

Пусть $T = 2^M$, $t = 0,..., T-1$ и $x_t \in R$ – временной ряд, который описывается следующей моделью:

$$x_t = f(t) + \xi z_t, f(t) = \begin{cases} \mu, 0 \le t \le t_0 - 1; \\ \mu + \tau, t \ge t_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $z_t \in R$, $t = 0,..., T-1$, – независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией σ^2, имеющие распределение Стьюдента $t(n)$, где n – число степеней свободы; ξ – уровень шума; t_0 – момент времени, в который происходит скачкообразное изменение; τ – величина скачка. Заметим, что среднее временного ряда $E\{x_t\} = f(t)$ имеет скачок τ в момент времени t_0.

Определим нулевую гипотезу H_0, состоящую в том, что $\tau = 0$, т. е. анализируемый временной ряд не имеет скачкообразных изменений среднего, и альтернативную гипотезу

$H_1 = \overline{H_0}$, состоящую в том, что $\tau \neq 0$, т. е. в момент времени t_0 временной ряд имеет скачкообразное изменение.

2. Статистические свойства вейвлет-коэффициентов

Дискретное вейвлет-преобразование временного ряда (1) определяется выражением [2]

$$d_{j,k}^{(\psi)} = \sum_{t=0}^{T-1} x_t \psi_{j,k}(t),\ j = 1,...,M,\ k = 0,...,2^{M-j} - 1, \tag{2}$$

где $\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi\left(2^{-j}t - k\right)$; $\psi(t)$ – базисный вейвлет; j – параметр масштаба (уровень разрешения); k – параметр сдвига. В настоящей работе будем использовать вейвлет Хаара, который, как отмечается в [2], является наиболее подходящим для обнаружения скачкообразных изменений:

$$\psi_{j,k}(t) = \begin{cases} 2^{-j/2}, & 2^j k \le t \le 2^j (k + 1/2); \\ -2^{-j/2}, & 2^j (k + 1/2) \le t \le 2^j (k+1); \\ 0 & \text{â ïðîòèâíîì ñëó÷àå.} \end{cases}$$

Утверждение. *Коэффициенты вейвлет-преобразования (2) временного ряда (1), построенные с использованием вейвлета Хаара, на каждом уровне разрешения $j = 1,...,$ M независимы.*

Доказательство. Коэффициенты вейвлет-преобразования (2), построенные с использованием вейвлета Хаара, можно представить в виде

$$d_{j,k}^{(\psi)} = \sum_{t=0}^{T-1} x_t \psi_{j,t}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \left(\sum_{t=2^j k}^{2^j\left(k+\frac{1}{2}\right)} x_t - \sum_{t=2^j\left(k+\frac{1}{2}\right)}^{2^j(k+1)-1} x_t \right).$$

На каждом уровне j вычисляется 2^{M-j} коэффициентов, каждый из которых построен по интервалу временного ряда длиной 2^j, причем они не пересекаются. Так как значения исходного ряда независимы, то отсюда следует независимость вейвлет-коэффициентов $d_{j,k}^{(\psi)}$ и $d_{j,l}^{(\psi)}$, $k \neq l$, на каждом уровне разрешения j. ■

Заметим, что вейвлет-коэффициенты (2) на каждом уровне разрешения одинаково распределены как борелевские функции от одинаково распределенных случайных величин.

3. Критерии обнаружения скачкообразных изменений

На основании статистических свойств вейвлет-коэффициентов построены три критерия обнаружения скачкообразных изменений временных рядов, наблюдаемых с шумом.

3.1. Критерий, основанный на превышении вейвлет-коэффициентами порогового значения

Критерий обнаружения скачкообразных изменений основан на предположении о том, что вейвлет-коэффициенты временного ряда (1) превышают некоторое пороговое значение в момент скачка t_0.

В работе [3] показано: если $y_i, i = 0,...,n-1$, являются независимыми в совокупности, одинаково распределенными случайными величинами, то

$$P\left((y_i - u)_+ \le x(y_i > u)\right) = 1 - P\left((y_i - u)_+ \ge x(y_i > u)\right) \approx H(x, \rho, \gamma)$$

для всех $i = 0,\ldots,n-1$ и достаточно больших *u*. Здесь $(x-u)_+ = max(x-u,0)$ и

$$H(x,\rho,\gamma) = \begin{cases} 1-(1-\gamma x/\rho)^{1/\gamma}, & \gamma \neq 0; \\ 1-e^{-x/\rho}, & \gamma = 0 \end{cases}$$

есть функция распределения обобщенного распределения Парето с параметрами формы $\gamma \in R$ и масштаба $\rho > 0$ [5], где $0 \le x \le \infty$ при $\gamma \le 0$ и $0 \le x \le \rho/\gamma$ при $\gamma > 0$.

Плотность распределения абсолютных значений вейвлет-коэффициентов, превышающих порог *u*, представляет собой «хвост» плотности распределения Стьюдента, расположенный правее точки *u*. Будем аппроксимировать эту плотность плотностью обобщенного распределения Парето, график которой при $\gamma<0,5$ вогнут и убывает [5]. Поэтому можно предположить, что более точная аппроксимация будет достигаться при выборе порога *u* правее точки перегиба плотности распределения Стьюдента, так как при этом вид плотностей совпадает. Поэтому для выбора промежутка аппроксимации определим точку перегиба плотности распределения Стьюдента:

$$p(x) = \frac{\tilde{A}\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\tilde{A}\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Значение первой производной плотности распределения Стьюдента задается выражением

$$p'(x) = \frac{\tilde{A}\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\tilde{A}\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+3}{2}}\left(-\frac{n+1}{2}\right)\frac{2x}{n}.$$

Обозначим
$$Z(n) = \frac{2\tilde{A}\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(-\frac{n+1}{2}\right)}{n\sqrt{n\pi}\,\tilde{A}\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Вычислим значение второй производной плотности:

$$p''(x) = Z(n)\left(\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+3}{2}} x\right)' = Z(n)\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+5}{2}}\left(1+\frac{x^2}{n}-\frac{n+3}{n}x^2\right) = 0.$$

Отсюда следует, что значение точки перегиба функции плотности вычисляется следующим образом:

$$x = \pm\sqrt{\frac{n}{n+2}}. \tag{3}$$

Для построения оценок параметров распределения шума используем высокочастотный уровень разрешения (j=1), на котором распределение вейвлет-коэффициентов близко к распределению шума [2].

Построим оценки для параметров ξ и *n* по методу моментов. Обозначим M_2 и M_4 второй и четвертый выборочные моменты распределения вейвлет-коэффициентов уровня разрешения j=1, получим следующие выражения:

$$M_2 = \frac{1}{2^{M-1}} \sum_{k=0}^{2^{M-1}-1} \left(d_{1,k}^{(\psi)} \right)^2 = \frac{\xi^2 n}{n-2},\ \xi^2 = \frac{M_2 (n-2)}{n};$$

$$M_4 = \frac{1}{2^{M-1}} \sum_{k=0}^{2^{M-1}-1} \left(d_{1,k}^{(\psi)} \right)^4 = \frac{\xi^4 2n^2}{(n-2)(n-4)} = \frac{2M_2^2 (n-2)}{(n-4)}.$$

Определим значения параметров:

$$n = 2\left(\frac{M_4}{M_2^2} - 1 \right) \Big/ \left(\frac{M_4}{2M_2^2} - 1 \right),\ \xi^2 = \frac{M_4 M_2}{2\left(M_4 - M_2^2 \right)}.$$

С учетом (1) и (3) находим значение порога:

$$u = \xi \sqrt{\frac{n}{n+2}} = \frac{M_2 M_4}{2\left(M_4 - M_2^2 \right)} \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{2}{3\left(3\dfrac{M_4}{M_2^2} - 4 \right)}}. \qquad (4)$$

Выражение (4) можно записать в следующем виде:

$$u = \frac{M_2}{2\left(1 - \dfrac{M_2^2}{M_4} \right)} \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{2}{3\left(3\dfrac{M_4}{M_2^2} - 4 \right)}}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{M_4 \to \infty} u = \dfrac{M_2}{\sqrt{6}}$. Поэтому формулу (4) для определения порога u можно применять для всех $n \geq 3$, так как в этом случае существует второй момент вейвлет-коэффициентов (в силу существования второго момента распределения Стьюдента с числом степеней свободы $n \geq 3$), даже если четвертый момент $M_4 \xrightarrow[T \to \infty]{} \infty$ (для числа степеней свободы $n = 3, 4$).

Пусть $q_{(j,1)} \geq q_{(j,2)} \geq \ldots \geq q_{(j, 2^{M-j}-1)}$ – упорядоченные абсолютные значения вейвлет-коэффициентов $q_{j,k} = \left| d_{j,k}^{(\psi)} \right|$, $k = 0, \ldots, 2^{M-j} - 1$, для каждого уровня разрешения $j = 1, \ldots, M$. Определим статистики $r_{j,l} = q_{(j,l)} - u$ и такое число L_j, что $r_{j,l} > 0$, $l = 0, \ldots, L_j - 1$.

Исходные гипотезы H_0 и H_1 заменим набором частных гипотез H_{0j} и H_{1j}:

$H_{0j} : r_{j,l} \leq C_{j,l}$;

H_{1j} : â ï ðî òèâí î ì ñëó÷àå,

где $C_{j,l}$, $l = 0, \ldots, L_j - 1$, – некоторые пороговые значения.

Проверка гипотез H_{0j} и H_{1j} на каждом уровне разрешения $j = 1, \ldots, M$ эквивалентна применению набора из M критериев. Частные гипотезы H_{0j} и H_{1j} проверяются следующим образом: принимается гипотеза H_{0j}, если $r_{j,l} \leq C_{j,l}$ для всех $l = 0, \ldots, L_j - 1$, и отвергается в противном случае. Гипотеза H_0 принимается в том случае, если принимаются гипотезы H_{0j} для всех $j = 1, \ldots, M$, и отвергается в противном случае.

Пусть α – уровень значимости критерия. Так как вейвлет-коэффициенты на различных уровнях разрешения зависимы, то согласно [6] уровень значимости α^* для проверки гипотез H_{0j}, H_{1j} на каждом уровне разрешения должен быть выбран таким, чтобы выполнялось условие $\alpha^* \le \alpha / M$. Следует также заметить, что условие $\sum_{l=0}^{L_j-1} P\left(r_{j,l} > C_{j,l}\right) = \alpha^*$ выполняется в силу независимости вейвлет-коэффициентов на каждом уровне разрешения.

Вычислим пороговые значения $C_{j,l}$ для проверки частной гипотезы H_{0j} из условия $P\left(r_{j,l} > C_{j,l}\right) = \alpha^* / L_j$.

Последовательно имеем

$$P\left(r_{j,l} > C_{j,l}\right) = 1 - P\left(r_{j,l} \le C_{j,l}\right) = 1 - P\left(\max\left(r_{j,l},\dots,r_{j,L_j-1}\right) \le C_{j,l}\right) =$$

$$= 1 - P\left(r_{j,l} \le C_{j,l},\dots,r_{j,L_j-1} \le C_{j,l}\right) = 1 - P\left(\bigcap \sum_{k=l}^{L_j-1}\left(r_{j,k} \le C_{j,l}\right)\right) = 1 - \prod_{k=l}^{L_j-1} P\left(r_{j,k} \le C_{j,l}\right) =$$

$$= 1 - \prod_{k=l}^{L_j-1} H\left(C_{j,l};\rho,\gamma\right) = 1 - \left(H\left(C_{j,l};\rho,\gamma\right)\right)^{L_j-l} = \alpha^* / L_j.$$

Отсюда $C_{j,l} = H^{-1}\left(\left(1 - \dfrac{\alpha^*}{L_j}\right)^{\frac{1}{L_j-l}}\right)$, где $H^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\gamma}\left(1-(1-x)^{\gamma}\right), \gamma \ne 0; \\ -\rho \ln(1-x), \gamma = 0. \end{cases}$

Для построения критерия необходимо оценить параметры распределения Парето γ и ρ. Используем метод моментов для обобщенного распределения Парето из [5] и получим оценки $\hat{\rho} = 0{,}5\bar{x}(\bar{x}^2 / s^2 + 1)$ и $\hat{\gamma} = 0{,}5(\bar{x}^2 / s^2 - 1)$. Выборочные среднее $\bar{x}$ и дисперсия s^2 вычисляются с использованием статистик $r_{1,l}$, $l = 0,\dots, L_1 - 1$, для высокочастотного уровня разрешения (j = 1).

3.2. Критерий, основанный на максимуме сумм вейвлет-коэффициентов

Определим статистику

$$V_j = \sqrt{2^j} \sum_{k=0}^{2^{(M-j)}} d_{j,k}^{(\psi)} .$$

Следует заметить, что вейвлет-коэффициенты $d_{j,k}^{(\psi)}$ при фиксированных j и k не зависят от длины временного ряда T. Так как вейвлет-коэффициенты на каждом уровне разрешения являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, т. е. удовлетворяют условиям центральной предельной теоремы, то можно показать, что при выполнении нулевой гипотезы H_0 статистика $\dfrac{V_j}{\hat{\theta}\sqrt{T}}$ имеет асимптотически стандартное нормальное распределение $N(0,1)$, где $\theta = \xi\sigma$.

Пусть $V = \max\left(|V_1|,|V_2|,\dots,|V_M|\right)$. Найдем пороговое значение Δ для критерия из условия $P\left(\dfrac{V}{\hat{\theta}\sqrt{T}} > \Delta\right) = \alpha$. Проводя такие же рассуждения, как и для предыдущего критерия, найдем пороговое значение $\Delta = -\Phi^{-1}\left(\left(1-(1-\alpha)^{1/M}\right)/2\right)$, где $\Phi^{-1}(\cdot)$ – квантиль стандартного нормального распределения.

В качестве оценки стандартного отклонения θ с целью исключения влияния аномальных наблюдений будем использовать ее робастный аналог [7]:

$$\hat{\theta} = \underset{k}{\text{median}}\left| d_{1,k}^{(\psi)} - \underset{k}{\text{median}}\left(d_{1,k}^{(\psi)} \right) \right| / 0,6745, \tag{5}$$

где median($\cdot$) – символ выборочной медианы.

Тогда решающее правило определяется следующим образом: принимается гипотеза H_0, если $\frac{V}{\hat{\theta}\sqrt{T}} \le \Delta$, и гипотеза H_1 в противном случае.

3.3. Критерий, основанный на сумме вейвлет-коэффициентов

Рассмотрим статистику $Q = \sum_{j=0}^{M} V_j$. Тогда статистика $Q/\sqrt{MT}$ имеет асимптотически нормальное распределение $N(0, \theta^2)$ как сумма асимптотически нормальных случайных величин с распределением $\frac{V_j}{\sqrt{T}} \sim N\left(0, \theta^2\right)$.

Найдем пороговое значение Δ для данного критерия обнаружения разладки аналогично предыдущему критерию: $\Delta = \Phi^{-1}\left(1-\alpha/2\right)$. Как и для критерия, основанного на максимуме сумм вейвлет-коэффициентов, в этом случае в качестве оценки для θ используем робастную оценку (5).

Решающее правило состоит в следующем: принимается гипотеза H_0, если $\frac{|Q|}{\hat{\theta}\sqrt{MT}} \le \Delta$, и гипотеза H_1 в противном случае.

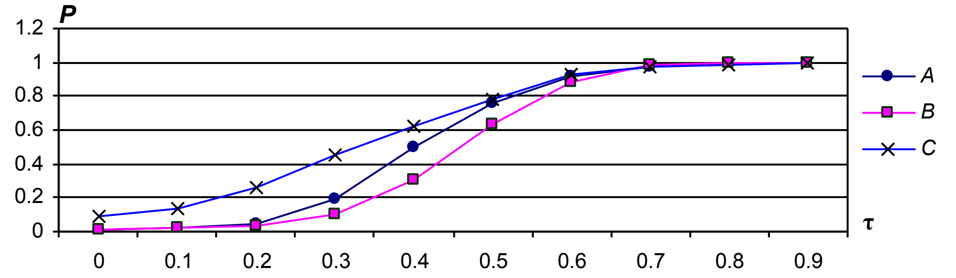
4. Исследование эффективности критериев обнаружения скачкообразных изменений

Для статистического оценивания вероятностей ошибок первого и второго рода выполнялось моделирование временных рядов с шумом z_t, имеющим распределение Стьюдента с числом степеней свободы $n \in \{3, 7, 15\}$, а также стандартное нормальное распределение $N(0,1)$. Моделируемые временные ряды состояли из двух однородных фрагментов длиной $T_1 = \frac{T}{3}, T_2 = \frac{2T}{3}$, скачок $\tau \in \{0,1,\ 0,2,\ ...,\ 0,9\}$ моделировался в момент времени $t_0 = T/3$. Эксперименты проводились для различных длин временного ряда.

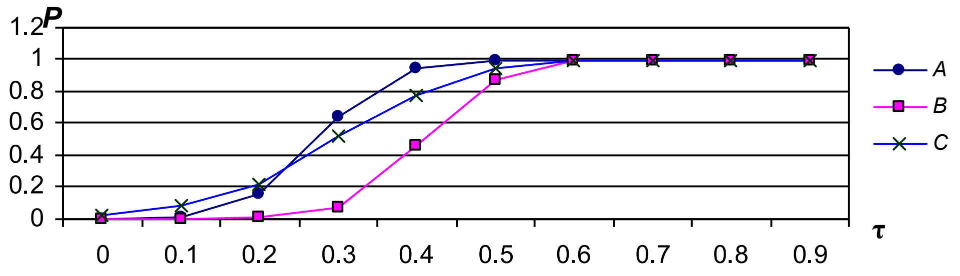
Полученные оценки для параметра γ критерия, основанного на превышении вейвлет-коэффициентами порогового значения, попали в интервал [–0,47, …, 0,19], что подтвердило предположение относительно значения этого параметра ($\gamma < 0,5$).

Для сравнения мощности различных критериев длина временного ряда была выбрана равной $T = 2^{11}$, число экспериментов $K = 1000$, параметр $\xi = 1$. Уровень значимости для критериев полагался $\alpha = 0,05$.

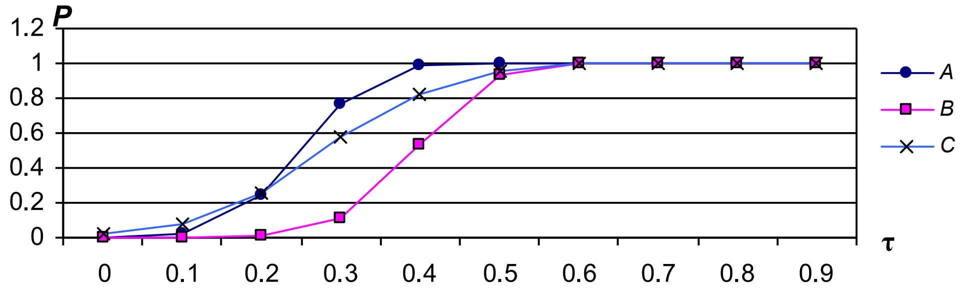
Как видно из результатов, показанных на рис. 1, оценки вероятностей ошибок первого рода для критериев *A* и *B* не превосходят уровня значимости. Для критерия *C* оценки вероятностей ошибок первого рода являются максимальными из всех критериев, а в случае самых «тяжелых хвостов» (n=3) превосходят уровень значимости. Это говорит о чувствительности критерия *C* к распределению шума. Значения оценок мощности предложенных критериев увеличиваются с ростом величины скачка τ и числа степеней свободы n распределения Стьюдента. Отметим, что для большой величины скачка ($\tau > 0,6$) наибольшую оценку мощности имеет критерий, основанный на превышении вейвлет-коэффициентами порогового значения.



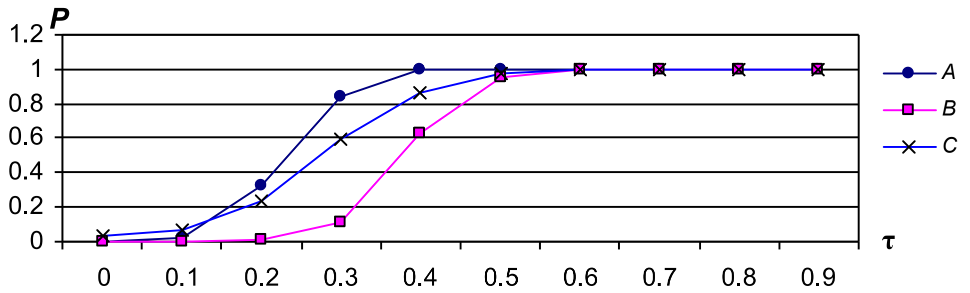
а)



б)



в)



г)

A – критерий, основанный на превышении вейвлет-коэффициентами порогового значения;
B – критерий, основанный на максимуме сумм вейвлет-коэффициентов;
C – критерий, основанный на сумме вейвлет-коэффициентов

Рис. 1. Зависимость оценок вероятностей ошибок первого рода и мощности критерия от величины скачка τ: *а)* для распределения Стьюдента с числом степеней свободы $n = 3$; *б)* распределения Стьюдента с числом степеней свободы $n = 7$; *в)* распределения Стьюдента с числом степеней свободы $n = 15$; *г)* стандартного нормального распределения

В качестве примера применения критериев для решения реальной задачи были взяты ежедневные данные (8096 значений) об изменении индекса Доу-Джонса за период с 1945 по 1983 г. (рис. 2). Критерий, основанный на превышении вейвлет-коэффициентами порогового значения, обнаружил скачкообразные изменения для отсчетов $t = 4096$ (1960 г.) и $t = 7680$ (1974 г.). Критерии, основанные на максимуме сумм вейвлет-коэффициентов и на сумме вейвлет-коэффициентов, также показали наличие скачкообразных изменений в этом временном ряду.

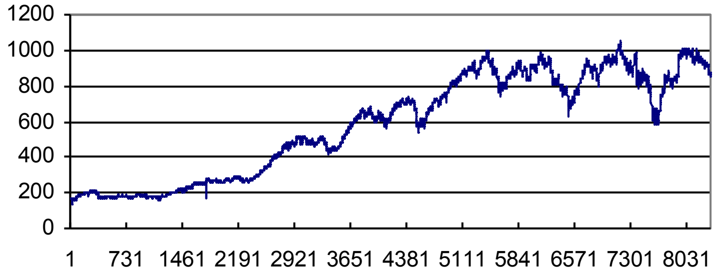


Рис. 2. Изменение индекса Доу-Джонса за период с 1945 по 1983 г.

Заключение

Исследованы статистические свойства вейвлет-коэффициентов временного ряда, полученных с использованием вейвлета Хаара. На основании статистик от вейвлет-коэффициентов построены три критерия обнаружения скачкообразных изменений временных рядов, наблюдаемых с аддитивным шумом, который имеет более «тяжелые хвосты», чем нормальное распределение. Методом статистического моделирования для случая, когда шум имеет распределение Стьюдента, получены оценки вероятностей ошибок первого рода и мощности критериев. Результаты проведенных экспериментов показывают эффективность предложенных критериев обнаружения скачкообразных изменений среднего временных рядов.

Работа частично поддержана ГКПНИ «Инфотех» (задание Инфотех 15).

Список литературы

1. Kharin, Yu.S. Detection of spectral change-point in a two-dimensional time series / Yu.S. Kharin, M.S. Abramovich // Optoelectronics, Instrumentations and Data Processing. – 1999. – № 2. – P. 45–53.

2. Ogden, R.T. Testing for abrupt jumps with wavelets / R.T. Ogden, C. Cheng // Proceedings of the 29th Symposium on the Interface, Interface Foundation of North America. – Houston, Texas, 1997. – P. 138–142.

3. Raimondo, M. Wavelet shrinkage via peaks over threshold / M. Raimondo // Interstat. – 2002. – № 5. – P. 1–19.

4. Raimondo, M. Minimax estimation of sharp change points / M. Raimondo // The annals of Statistics. – 1998. – Vol. 26, № 4. – P. 1379–1397.

5. Hosking, J.R.M. Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution / J.R.M. Hosking, J.R. Wallis // Technometrics. – 1987. – № 29. – P. 339–349.

6. Кокс, Д. Теоретическая статистика / Д. Кокс, Д. Хинкли. – М. : Наука, 1978. – 560 с.

7. Хьюбер П. Робастность в статистике / П. Хьюбер. – М. : Мир, 1984. – 303 с.

Поступила 25.03.08

НИИ прикладных проблем математики
и информатики БГУ,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: abramovichms@bsu.by

M.S. Abramovich, M.M. Mitskevich

DETECTING JUMPS OF MEAN VALUES USING THE HAAR WAVELET TRANSFORM

Wavelet-based tests for time series with noise are developed. The noise is assumed to have more heavy tails comparing the Gaussian distribution. The efficiency of these tests is studied by statistical modeling.