

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 539.214

В.А. Нифагин

РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ В РЯДАХ ПО ОДНОРОДНЫМ ПОЛИНОМАМ
НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Разрабатывается метод решения пространственных краевых задач для упрочняющихся упругопластических тел на основе специальных представлений функций нескольких комплексных переменных. Применяются метод разложения по параметру нагружения и ряды в однородных полиномах матричных переменных. Находятся представления решений основных краевых задач. Строится приближенное аналитическое решение упругопластической краевой задачи о напряженно-деформированном состоянии толстостенного цилиндра и исследуется влияние пластических свойств на напряженное состояние.

Введение

Получение аналитических решений конкретных прикладных задач теории пластичности – нахождение функций, описывающих напряженно-деформированное состояние пространственных упругопластических тел и конструкций, – представляет значительные математические и вычислительные трудности. Это связано с нелинейностью, а в ряде случаев и неголономностью уравнений состояния. Поэтому разработка аналитических методов решения таких задач для качественного анализа прочностных характеристик материалов и конструкций при сложных типах внешних нагружений является актуальной научно-технической задачей.

1. Общая постановка краевых упругопластических задач в рамках теории течения с изотропным упрочнением и метод их решения

Будем считать, что сплошная упругопластическая среда, занимающая объем $D \in E_3$ с границей Γ , удовлетворяет уравнениям равновесия в напряжениях внутри пространственного тела и граничным условиям на поверхности тела:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + P_i &= 0, \quad P_i = P_i(x, \lambda), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in D; \\ \sigma_{ij} n_j &= T_i \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad T_i = T_i(x, \lambda), \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

где P_i и T_i – заданные компоненты массовых и поверхностных сил; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор внешней нормали к Γ ; λ – параметр нагружения. Суммирование производится по повторяющимся индексам. Внешние нагрузки задаются удовлетворяющими условиям равновесия тела в целом:

$$\int P_i dV = 0; \quad \int T_i dS = 0,$$

где $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ – мера объема; dS – мера площади граничной поверхности Γ соответственно.

Определяющие соотношения теории течения с изотропным упрочнением при условии, что ни в одной точке тела не происходит разгрузки, имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned}
K\varepsilon &= \sigma, \quad 2Ge_{ij} = s_{ij} + p_{ij}; \\
p_{ij} &= \int_0^I s_{ij} dF(Q), \quad Q = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (dQ \geq 0); \\
\varepsilon &= \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}; \\
\sigma &= \frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij},
\end{aligned} \tag{2}$$

где ε, σ – средние деформация и напряжение;

e_{ij}, s_{ij} – девиаторы деформаций и напряжений;

Q – квадрат интенсивности касательных напряжений;

K, G – материальные постоянные;

F – заданная функция напряжения.

Оставаясь в рамках математической теории пластичности с малыми деформациями, тензор деформаций полагаем линейным:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}), \tag{3}$$

где u_i – компоненты вектора перемещений точек деформируемого тела.

Для решения статической упругопластической краевой задачи (1)–(3) в работе [2] был предложен метод разложения по параметру нагружения, в котором внешние нагрузки представляются в виде степенных рядов:

$$P_i(x) = \sum_{n \geq 1} P_i^{(n)}(x) \lambda^n; \quad T_i(x) = \sum_{n \geq 1} T_i^{(n)}(x) \lambda^n, \tag{4}$$

а решение строится в виде

$$u_i(x) = \sum_{n \geq 1} u_i^{(n)}(x) \lambda^n; \quad \sigma_{ij}(x) = \sum_{n \geq 1} \sigma_{ij}^{(n)}(x) \lambda^n. \tag{5}$$

Предполагаем также, что функция F в (2) разлагается в сходящийся в области изменения Q степенной ряд

$$F = \sum_{m \geq 0} c_m Q^m,$$

где для Q имеет место разложение

$$Q = \sum_{n \geq 2} Q^{(n)} \lambda^n; \quad Q^{(n)} = \sum_{\alpha + \beta = n} s_{ij}^{(\alpha)} s_{ij}^{(\beta)}. \tag{6}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
Q^m &= \sum_{n \geq 2m} Q^{(mn)} \lambda^n; \quad Q^{(mn)} = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_m = n} Q^{(n_1)} \dots Q^{(n_m)}; \\
F &= F_0 + \sum_{n \geq 2} \Psi^{(n)} \lambda^n; \quad \Psi^{(n)} = \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} c_n Q^{(mn)}
\end{aligned} \tag{7}$$

(квадратные скобки соответствуют целой части числа).

Из (6), (7) следуют выражения для коэффициентов разложения (2):

$$p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha+\beta=n} \beta \Psi^{(\beta)} s_{ij}^{(n)}, \quad n \geq 3. \quad (8)$$

Затем, подставляя (4), (5) в (1), получим следующие уравнения и граничные условия на каждом этапе метода

$$\sigma_{ij,j}^{(n)} + P_i^{(n)} = 0; \quad \sigma_{ij}^{(n)} n_j = T_i^{(n)}. \quad (9)$$

Подставляя (4), (5) в (2) и (3), с учетом (8) находим определяющие соотношения на каждом этапе:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(n)} &= 2G\varepsilon_{ij}^{(n)} + (K - 2G)\varepsilon^{(n)}\delta_{ij} - p_{ij}^{(n)}; \\ \varepsilon_{ij}^{(n)} &= \frac{1}{2}(u_{j,i}^{(n)} + u_{i,j}^{(n)}); \quad \varepsilon^{(n)} = \frac{1}{3}u_{k,k}^{(n)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, из (9) и (10) вытекает граничная задача для $n \geq 3$ ($p_{ij}^{(n)} = 0$, $n = 1, 2$):

$$\begin{aligned} -A_{ij}u_j^{(n)} &= P_i^{(n)} - p_{ij,j}^{(n)}; \quad A_{ij} = G\delta_{ij}\Delta(\cdot) + \frac{1}{3}(K + G)(\cdot)_{,ij}; \\ B_{ij}u_j^{(n)} &= T_i^{(n)} + p_{ij}^{(n)}n_j; \quad B_{ij} = G(\delta_{ij}n_k(\cdot)_{,k} + n_j(\cdot)_{,i}) + \frac{1}{3}(K - 2G)n_i(\cdot)_{,j}. \end{aligned} \quad (11)$$

Как показано в [1], если P_i и T_i из (11) удовлетворяют условию Гельдера с некоторым показателем γ и граничная поверхность принадлежит классу $\square^{1,\delta}$, $\delta > \gamma$, то в случае упругости $p_{ij} = 0$ и перемещения имеют первые производные, непрерывные по Гельдеру с тем же показателем γ , и вторые производные непрерывные внутри области D .

При том же условии на гладкость границы тела решения, представимые в виде рядов (5), сходятся, по крайней мере, для малых значений λ [3]. Это означает, что коэффициенты разложений (5) растут не быстрее чем это требуется для сходимости рядов решений в методе разложения по параметру нагружения.

Кроме того, если граница деформируемого тела принадлежит классу $\square^{1,\delta}$, $\delta \leq 1$, и выполняются соответствующие оценки для функций Грина, через которые представимы решения упругих задач на каждом этапе метода [1], то напряжения граничной задачи в напряжениях также непрерывны по Гельдеру с показателем $\gamma < \delta$ при тех же условиях на заданные массовые и поверхностные силы.

2. Структура функций многих комплексных переменных и их применение для описания пространственных задач механики сплошных сред

Для описания пространственных задач теории упругости в работах [4–6] были введены переменные и функции общей матричной структуры в \square^2 . Получены виды дифференциальных операторов и условия аналитичности.

Матричную переменную как элемент пространства \square^2 представляем в виде

$$\kappa = \sum_{m \geq 1}^4 x_m e_m = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

а сопряженную к ней – в виде

$$\bar{\kappa} = \sum_{m \geq 1}^4 x_m \bar{e}_m = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & -z_2 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $x_m \in \mathbb{C}$, e_m – матрицы Гамильтона – Кэли, $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$. Модуль переменной в \mathbb{C}^2

$$|\kappa|^2 = \kappa \bar{\kappa} = (z_1 z_1 + z_2 z_2) e_1 = (|z_1|^2 + |z_2|^2) e_1.$$

В силу некоммутативности операции матричного умножения в \mathbb{C}^2 можно рассматривать следующие произведения: $\kappa \mathcal{D}$, $\bar{\mathcal{D}} \bar{\kappa}$, $\mathcal{D} \kappa$, $\bar{\kappa} \bar{\mathcal{D}}$, $\kappa \bar{\mathcal{D}}$, $\mathcal{D} \bar{\kappa}$, $\bar{\mathcal{D}} \kappa$, $\bar{\kappa} \mathcal{D}$, при этом их число сокращается за счет операции сопряжения $\overline{\kappa \mathcal{D}} = \bar{\mathcal{D}} \bar{\kappa}$.

Введем комплексную функцию матричной переменной

$$f(\kappa) = \begin{pmatrix} f_1(x_m) + if_2(x_m) & f_3(x_m) + if_4(x_m) \\ -f_3(x_m) + if_4(x_m) & f_1(x_m) - if_2(x_m) \end{pmatrix}, \quad m = \overline{1, 4}. \quad (14)$$

Оператор матричной производной имеет вид

$$n \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial \kappa} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial z_1} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial z_2} \\ -\frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{z}_2} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{z}_1} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

При вырождении $E_4 \rightarrow E_3 \rightarrow E_2$ комплексная матричная переменная (12) представляется как

$${}^0 \kappa = \begin{pmatrix} z_1 & \operatorname{Re} z_2 \\ -\operatorname{Re} z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}; \quad {}^{00} \kappa = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Аналогично преобразуется переменная (13), оператор матричной функции (14) и производной (15). Заметим, что круговым перестановкам координат $\rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow$ в E_4 соответствуют круговые перестановки элементов $\mathbb{C}^2 \rightarrow \kappa_{(1)} \rightarrow \kappa_{(2)} \rightarrow \kappa_{(3)} \rightarrow \kappa_{(4)} \rightarrow$, при этом перестановкам в ${}^0 \mathbb{C}^2 \rightarrow {}^0 \kappa_{(1)} \rightarrow {}^0 \kappa_{(2)} \rightarrow {}^0 \kappa_{(3)} \rightarrow {}^0 \kappa_{(4)} \rightarrow$ соответствуют перестановки $\rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow 0 \rightarrow$ в E_3 .

Введенная структура матричных переменных и функций в \mathbb{C}^2 (12)–(16) позволяет ввести необходимые в дальнейшем полиномы (левый и правый):

$$W^- = P_n^-(\kappa) = \sum_{m \geq 0}^n a_m \kappa^{n-m}; \quad W^+ = P_n^+(\kappa) = \sum_{m \geq 0}^n \kappa^{n-m} a_m, \quad |a_0| \neq 0, a_k \in \mathbb{C}^2.$$

Рациональная функция

$$P(\kappa) = \frac{P_n(\kappa)}{Q_m(\kappa)} = P_n(\kappa) Q_m^{-1}(\kappa) = \frac{P_n(\kappa)}{|Q_m(\kappa)|^2} \overline{Q_m(\kappa)},$$

где $Q_m^{-1}(\cdot)$ – обратная матрица для $Q_m(\cdot)$, $|Q_m(\kappa)|^2 = Q_m(\kappa) \overline{Q_m(\kappa)}$.

Простейшим случаем функциональных рядов в \square^2 являются степенные ряды по однородным матричным полиномам вида

$$P_n(\kappa) = b_n \sum_{m \geq 0}^n a_m \kappa^{n-m} \bar{\kappa}^m, \quad a_0, a_n \neq 0. \quad (17)$$

Такой ряд может быть переписан в виде ряда Лорана.

Аналогично введем матричные дифференциальные операторы в \square^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \kappa} &= \frac{1}{4} \bar{\nabla}(\cdot) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{z}_1} & -\frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{z}_2} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial z_2} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial z_1} \end{pmatrix}; \\ \Delta_{\kappa}(\cdot) &= \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \kappa \partial \bar{\kappa}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} \right) e_1; \\ \Delta_{\kappa}^2(\cdot) &= \frac{1}{16} \left(\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} \right)^2 e_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Отметим, что при вырождении $\square^2 \rightarrow {}^0\square^2 \rightarrow {}^{00}\square^2$ числовые коэффициенты в формулах (15), (18) меняются. Кроме того, из-за некоммутативности умножения матричных операторов и самих функций различаются операции дифференцирования слева и справа:

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} f(\kappa) = \left(\frac{\partial f(\kappa)}{\partial \kappa} \right)^{-}; \quad f(\kappa) \frac{\partial}{\partial \kappa} = \left(\frac{\partial f(\kappa)}{\partial \kappa} \right)^{+}.$$

В дальнейшем будем использовать левые производные. С учетом операции сопряжения возникают восемь производных вида (15), причем при вырождении $x_4 = 0$ сами элементы принадлежат \square^2 . Для получения условия аналитичности матричных функций в \square^2 воспользуемся условиями сопряжения гармонических функций в E_4 (условия Моисила – Теодореско) [7], которые переписываются в виде

$$\frac{\partial f(\kappa)}{\partial \bar{\kappa}} = 0. \quad (19)$$

В качестве примера аналитических функций в \square^2 рассмотрим однородные аналитические полиномы (17) с действительными коэффициентами. При этом множители b_n определяются из стандартной формулы

$$\frac{\partial P_n(\kappa)}{\partial \kappa} = n P_{n-1}(\kappa).$$

Таким образом, в \square^2 однородный аналитический полином имеет вид

$$P_n(\kappa) = b_n \sum_{m \geq 0}^n (n-m+1) \kappa^{n-m} \bar{\kappa}^m. \quad (20)$$

3. Метод рядов по однородным полиномам нескольких комплексных переменных в основных краевых задачах

В работах [8, 9] получены представления общих решений трехмерных упругопластических задач через аналитические функции матричной переменной на каждом этапе метода разложения по параметру нагружения. Так, комплексные комбинации перемещений выражаются посредством функций ${}^0\Phi^{(n)}({}^0\kappa)$, ${}^0\Xi^{(n)}({}^0\kappa)$ и их производных в области $D \subset {}^0\mathbb{C}^2$, а также известных из предыдущих приближений матричных функций ${}^0B_{(j)}^{(n-2)}(\kappa)$. Покомпонентно перемещения представляются через аналитические матричные функции ${}^0\Phi^{(n)}({}^0\kappa_{(i)})$, ${}^0\Xi^{(n)}({}^0\kappa_{(i)})$, ${}^0\Lambda^{(n)}({}^0\kappa_{(i)})$ и их производные, а также известные функции ${}^0B_{(1),(2),(3)j}^{(n-2)}$. Аналогично компоненты тензора напряжений выражаются через матричные функции ${}^0\varphi_{(i)}^{(n)}({}^0\kappa_{(i)})$, ${}^0\chi_{(i)}^{(n)}({}^0\kappa_{(i)})$ и их производные, а также известные функции, определяемые на предыдущих этапах.

Рассмотрим граничные условия для задачи в напряжениях:

$$\sigma_{ij}^{(n)} n_j \Big|_{\Gamma^+} = F_i, \quad i, j = \overline{1,3}. \quad (21)$$

Аналитические матричные функции ${}^0\varphi_{(i)}^{(n)}({}^0\kappa_{(i)})$, ${}^0\chi_{(i)}^{(n)}({}^0\kappa_{(i)})$ разлагаются в ряды по однородным матричным полиномам (20):

$$\begin{aligned} {}^0\varphi_{(i)}^{(n)}({}^0\kappa_{(i)}) &= \sum_{m \geq 0} a_{im}^{(n)} {}^0P_{(i)m}({}^0\kappa_{(i)}), \quad \overline{{}^0\varphi_{(i)}^{(n)}({}^0\kappa_{(i)})} = \sum_{m \geq 0} \overline{a_{im}^{(n)}} \overline{{}^0P_{(i)m}({}^0\kappa_{(i)})}; \\ {}^0\chi_{(i)}^{(n)}({}^0\kappa_{(i)}) &= \sum_{m \geq 0} b_{im}^{(n)} {}^0P_{(i)m}({}^0\kappa_{(i)}), \quad \overline{{}^0\chi_{(i)}^{(n)}({}^0\kappa_{(i)})} = \sum_{m \geq 0} \overline{b_{im}^{(n)}} \overline{{}^0P_{(i)m}({}^0\kappa_{(i)})}, \end{aligned} \quad (22)$$

поэтому, подставляя (22) в общие решения задачи в напряжениях и учитывая (19), (20), а затем в (21), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \left(\operatorname{Re} \left(\sum_{m \geq 1} m \left(a_{1m}^{(n)} {}^0P_{(1)m-1}({}^0t_{(1)}) + a_{2m}^{(n)} {}^0P_{(2)m-1}({}^0t_{(2)}) \right) + \right. \right. \\ & + 2 \sum_{m \geq 2} m(m-1) \left(\overline{{}^0t_{(1)}} a_{1m}^{(n)} {}^0P_{(1)m-2}({}^0t_{(1)}) - \overline{{}^0t_{(2)}} a_{2m}^{(n)} {}^0P_{(2)m-2}({}^0t_{(2)}) \right) + \\ & \left. \left. + 2 \sum_{m \geq 2} m(m-1) \left(b_{1m}^{(n)} {}^0P_{(1)m-2}({}^0t_{(1)}) - b_{2m}^{(n)} {}^0P_{(2)m-2}({}^0t_{(2)}) \right) \right) = \\ & = \sum_{m \geq 0} \left(\tilde{F}_{1m}^{(n)} {}^0P_{(1)m}({}^0t_{(1)}) + \tilde{F}_{2m}^{(n)} {}^0P_{(2)m}({}^0t_{(2)}) \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Для касательных напряжений поверхностные условия представимы в виде

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \left(\operatorname{Im} \sum_{m \geq 2} m(m-1) \left(2 \overline{{}^0t_{(1)}} a_{1m}^{(n)} {}^0P_{(1)m-2}({}^0t_{(1)}) - \overline{{}^0t_{(2)}} a_{2m}^{(n)} {}^0P_{(2)m-2}({}^0t_{(2)}) \right) + \right. \\ & \left. + 2 \operatorname{Re} \sum_{m \geq 2} m(m-1) \left(2 b_{1m}^{(n)} {}^0P_{(1)m-2}({}^0t_{(1)}) - b_{2m}^{(n)} {}^0P_{(2)m-2}({}^0t_{(2)}) \right) \right) = \\ & = \sum_{m \geq 0} \left(\tilde{F}_{1m}^{(n)} {}^0P_{(1)m}({}^0t_{(1)}) + \tilde{F}_{2m}^{(n)} {}^0P_{(2)m}({}^0t_{(2)}) \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где ${}^0\kappa_{(i)} \rightarrow {}^0t_{(i)}$ – значения матричной переменной на поверхности Γ .

В случае краевой задачи в перемещениях граничные условия запишутся как

$$\mathbf{u}|_{\Gamma^+} = \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3). \quad (25)$$

Для аналитических матричных функций, через которые представлены общие решения задачи в перемещениях, используем следующие разложения в ряды по однородным матричным полиномам:

$$\begin{aligned} {}^0\Phi^{(n)}({}^0\kappa) &= \sum_{m \geq 0} c_{1m}^{(n)} {}^0P_m({}^0\kappa), \quad {}^0\Xi^{(n)}({}^0\kappa) = \sum_{m \geq 0} c_{2m}^{(n)} {}^0P_m({}^0\kappa); \\ {}^0\Lambda^{(n)}({}^0\kappa) &= \sum_{m \geq 0} c_{3m}^{(n)} {}^0P_m({}^0\kappa), \quad {}^0M^{(n)}({}^0\kappa) = \sum_{m \geq 0} c_{4m}^{(n)} {}^0P_m({}^0\kappa). \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя (26) в представления общих решений, а затем в (25), получим

$$\begin{aligned} a \operatorname{Re} \left(b \sum_{m \geq 0} c_{1m}^{(n)} {}^0P_m({}^0t) - \sum_{m \geq 1} m c_{1m}^{(n)} \overline{{}^0P_{m-1}({}^0t)} {}^0t - \sum_{m \geq 1} m c_{2m}^{(n)} {}^0P_{m-1}({}^0t) \right) &= \sum_{m \geq 0} \tilde{f}_{1m}^{(n)} {}^0P_m({}^0t); \\ a \operatorname{Im} \left(b \sum_{m \geq 0} c_{1m}^{(n)} {}^0P_m({}^0t) - \sum_{m \geq 1} m c_{1m}^{(n)} \overline{{}^0P_{m-1}({}^0t)} {}^0t - \sum_{m \geq 1} m c_{2m}^{(n)} {}^0P_{m-1}({}^0t) \right) &= \sum_{m \geq 0} \tilde{f}_{2m}^{(n)} {}^0P_m({}^0t); \\ a \operatorname{Re} \left(b \sum_{m \geq 0} c_{3m}^{(n)} {}^0P_m({}^0t) - \sum_{m \geq 1} m c_{3m}^{(n)} \overline{{}^0P_{m-1}({}^0t)} {}^0t - \sum_{m \geq 1} m c_{4m}^{(n)} {}^0P_{m-1}({}^0t) \right) &= \sum_{m \geq 0} \tilde{f}_{3m}^{(n)} {}^0P_m({}^0t), \end{aligned} \quad (27)$$

где a, b – комбинации материальных постоянных.

Считая известной структуру однородных матричных полиномов, решение соответствующей краевой задачи сводится к нахождению коэффициентов $a_{im}^{(n)}, b_{im}^{(n)}, c_{im}^{(n)}$ из уравнений (23), (24), (27) с известными коэффициентами $\tilde{F}_{im}^{(n)}, \overline{F}_{im}^{(n)}, \tilde{f}_{im}^{(n)}$. Идентификацию коэффициентов действительных степенных рядов в E_3 произведем по следующему алгоритму.

На основании теоремы Гамильтона – Кэли характеристическое уравнение матрицы $\kappa \in \square^2$ $\nu^2 - I_1\nu + I_2 = 0$, определяющее собственные значения $\nu_{1,2}$, позволяет построить рекуррентные формулы для целых степеней $\kappa^k, \bar{\kappa}^k$:

$$\kappa^k = I_1\kappa^{k-1} - I_2\kappa^{k-2}, \quad \bar{\kappa}^k = I_1\bar{\kappa}^{k-1} + I_2\bar{\kappa}^{k-2}, \quad \text{где } k > 1, k \in N.$$

В последних формулах $I_1(\kappa) = I_1(\bar{\kappa}) = 2x_1; I_2(\kappa) = I_2(\bar{\kappa}) = \sum_{i=1}^4 x_i^2$ – инварианты комплексной матрицы κ .

Тогда действительные (скалярные) однородные полиномы k -й степени с аргументами в виде инвариантов I_1, I_2 можно представить в виде

$$p_n(I_1, I_2) = \sum_{m \geq 0}^{\lfloor k/2 \rfloor} b_m^{(k)} I_1^{k-2m} I_2^m, \quad b_m^{(k)} = \operatorname{Re} b_m^{(k)}, \quad (28)$$

где коэффициенты $b_m^{(\ell)}$ находятся из системы уравнений

$$b_m^{(\ell)} = b_0^{(1)} b_m^{(\ell-1)} - b_{m-1}^{(\ell-2)}, \quad \ell = \overline{2, k}; \quad m = 0, 1, \dots, \lfloor k/2 \rfloor.$$

При этом в \square^2 однородные полиномы приводятся к полным однородным действительным полиномам

$$p_k(x_m) = \sum_{m \geq 0}^k c_m^{(k)} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma, \quad \alpha + \beta + \gamma = k. \quad (29)$$

Для вычисления действительных полиномов (28) справедливы рекуррентные формулы

$$p_k = p_{k-1} p_1 - r^2 p_{k-2}, \quad k > 1, \quad p_0 = 1, \quad p_1 = I_1, \quad (30)$$

которые позволяют разрешить систему для нахождения коэффициентов

$$b_m^{(\ell)} = (-1)^m C_{\ell-m}^m, \quad (31)$$

где $C_{\ell-m}^m$ – биномиальные коэффициенты.

С учетом представлений (28)–(31) коэффициенты разложений $a_{im}^{(n)}, b_{im}^{(n)}$ для напряжений (23) отыскиваются из следующих уравнений в случае поверхностных нормальных напряжений:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \left(\sum_{m \geq 1} m a_{1m}^{(n)} \left(2(m+1) \sum_{\substack{i \geq 0 \\ i=2q}}^{m-1} \left(I_{(1)1} P_{(1)2(m-i)-1} \left(I_{(1)1}, I_{(1)2} \right) - 2r_{(1)}^2 P_{(1)2(m-i)} \left(I_{(1)1}, I_{(1)2} \right) \right) r_{(1)}^{2i} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (2m+1) \sum_{\substack{i \geq 0 \\ i=2q-1}}^{m-1} \left(I_{(1)1} P_{(1)2(m-i)-2} \left(I_{(1)1}, I_{(1)2} \right) - 2r_{(1)}^2 P_{(1)2(m-i)+1} \left(I_{(1)1}, I_{(1)2} \right) \right) r_{(1)}^{2i} \right) + \\ & \quad \left. + \sum_{m \geq 1} m a_{2m}^{(n)} \left(2(m+1) \sum_{\substack{i \geq 0 \\ i=2q}}^{m-1} \left(I_{(2)1} P_{(2)2(m-i)-1} \left(I_{(2)1}, I_{(2)2} \right) - 2r_{(2)}^2 P_{(2)2(m-i)} \left(I_{(2)1}, I_{(2)2} \right) \right) r_{(2)}^{2i} + \right. \\ & \quad \left. + (2m+1) \sum_{\substack{i \geq 0 \\ i=2q-1}}^{m-1} \left(I_{(2)1} P_{(2)2(m-i)-2} \left(I_{(2)1}, I_{(2)2} \right) - 2r_{(2)}^2 P_{(2)2(m-i)+1} \left(I_{(2)1}, I_{(2)2} \right) \right) r_{(2)}^{2i} \right) + \\ & \quad \left. + 2 \sum_{m \geq 2} m(m-1) a_{1m}^{(n)} I_{(1)1} \left(2(m+1) \sum_{\substack{i \geq 0 \\ i=2q}}^{m-2} \left(I_{(1)1} P_{(1)2(m-i)-1} \left(I_{(1)1}, I_{(1)2} \right) - 2r_{(1)}^2 P_{(1)2(m-i)} \left(I_{(1)1}, I_{(1)2} \right) \right) r_{(1)}^{2i} + \right. \\ & \quad \left. + (2m+1) \sum_{\substack{i \geq 0 \\ i=2q-1}}^{m-2} \left(I_{(1)1} P_{(1)2(m-i)-2} \left(I_{(1)1}, I_{(1)2} \right) - 2r_{(1)}^2 P_{(1)2(m-i)-3} \left(I_{(1)1}, I_{(1)2} \right) \right) r_{(1)}^{2i} - \right. \quad (32) \\ & \quad \left. - 2 \sum_{m \geq 2} m(m-1) a_{2m}^{(n)} I_{(2)1} \left(2(m+1) \sum_{\substack{i \geq 0 \\ i=2q}}^{m-2} \left(I_{(2)1} P_{(2)2(m-i)-1} \left(I_{(2)1}, I_{(2)2} \right) - 2r_{(2)}^2 P_{(2)2(m-i)} \left(I_{(2)1}, I_{(2)2} \right) \right) r_{(2)}^{2i} + \right. \\ & \quad \left. + (2m+1) \sum_{\substack{i \geq 0 \\ i=2q-1}}^{m-2} \left(I_{(2)1} P_{(2)2(m-i)-1} \left(I_{(2)1}, I_{(2)2} \right) - 2r_{(2)}^2 P_{(2)2(m-i)} \left(I_{(2)1}, I_{(2)2} \right) \right) r_{(2)}^{2i} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{m \geq 2} m(m-1) b_{1m}^{(n)} \left(2(m+1) \sum_{\substack{i \geq 0 \\ i=2q}}^{m-2} \left(I_{(1)1} P_{(1)2(m-i)-1} (I_{(1)1}, I_{(1)2}) - 2r_{(1)}^2 P_{(1)2(m-i)-1} (I_{(1)1}, I_{(1)2}) \right) r_{(1)}^{2i} + \right. \\
& \quad \left. + (2m+1) \sum_{\substack{i \geq 0 \\ i=2q-1}}^{m-2} \left(I_{(1)1} P_{(1)2(m-i)-1} (I_{(1)1}, I_{(1)2}) - 2r_{(1)}^2 P_{(1)2(m-i)-3} (I_{(1)1}, I_{(1)2}) \right) r_{(1)}^{2i} - \right. \\
& - \sum_{m \geq 2} m(m-1) b_{2m}^{(n)} \left(2(m+1) \sum_{\substack{i \geq 0 \\ i=2q}}^{m-2} \left(I_{(2)1} P_{(2)2(m-i)-1} (I_{(2)1}, I_{(2)2}) - 2r_{(2)}^2 P_{(2)2(m-i)-1} (I_{(2)1}, I_{(2)2}) \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times r_{(2)}^{2i} + (2m+1) \sum_{\substack{i \geq 0 \\ i=2q-1}}^{m-2} \left(I_{(2)1} P_{(2)2(m-i)-1} (I_{(2)1}, I_{(2)2}) - 2r_{(2)}^2 P_{(2)2(m-i)-3} (I_{(2)1}, I_{(2)2}) \right) r_{(2)}^{2i} \right) = \\
& = \sum_{m \geq 0} \sigma_{11m}^{(n)} x_1^a x_2^b x_3^c, \quad a + b + c = m.
\end{aligned}$$

Аналогичные уравнения получаются для коэффициентов касательных напряжений и перемещений.

Заметим, что правая часть этих уравнений строится разложением в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки $r_0 \in D$, включая известные добавочные члены из предыдущих приближений. В общем случае для отыскания коэффициентов возникают бесконечные системы уравнений, допускающие процедуру регуляризации [10].

4. Пространственная упругопластическая задача о симметрично нагруженном цилиндре

В качестве примера применения разработанного аппарата приведем приближенное аналитическое решение задачи о напряженном состоянии упрочняющегося упругопластического цилиндра [9]. Пусть цилиндр с полостью радиуса r_1 , отнесенный к цилиндрическим координатам (r, θ, z) , где $r_1 \leq r \leq r_2$ с внешней поверхностью $S_2 (r = r_2)$ и внутренней поверхностью $S_1 (r = r_1)$, находится под действием внешних усилий интенсивности $q > 0$ (внешнее сжатие при условии равновесия тела).

Перейдем к безразмерным компонентам деформаций и перемещений:

$$\sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{q}; \quad \varepsilon_{ij}^* = \frac{G}{q} \varepsilon_{ij}; \quad e_{ij}^* = \frac{G}{q} e_{ij}; \quad \varepsilon_0^* = \frac{G}{q} \varepsilon_0; \quad u_j^* = \frac{G}{q} \frac{u_j}{r_1}. \quad (33)$$

Тогда определяющие соотношения (2) теории течения в приращениях после перехода к цилиндрическим координатам с координатным соответствием $i, j = 1, 2, 3; r, \theta, z$ переписутся как

$$\begin{aligned}
\delta \sigma_{ii}^* &= 2 \left(\delta \varepsilon_{ii}^* + a \varepsilon_0^* - \left(\frac{q}{G} \right)^2 A_2 \delta \Psi_0^{*2} e_{ii}^* \right); \\
\delta \sigma_{ij}^* &= \left(1 - \left(\frac{q}{G} \right)^2 A_2 \delta \Psi_0^{*2} \right) \varepsilon_{ij}^*, \quad i \neq j,
\end{aligned} \quad (34)$$

где $\Psi_0^{*2} = \left(\frac{q}{G}\right)^2 \Psi_0^2$ – отнесенная интенсивность деформаций; a, A_2 – материальные постоянные.

После подстановки (34) в уравнения равновесия (1) в осесимметричном случае получим уравнения в перемещениях:

$$\begin{aligned} b \delta \varepsilon_{,1}^* + \delta \varepsilon_{2,3}^* + \frac{1}{2} \delta V_1^* &= \left(\frac{q}{G}\right)^2 \delta F_1; \\ b \delta \varepsilon_{,3}^* - \frac{1}{r} \delta (r \varepsilon_{2,1}^*) + \frac{1}{2} \delta V_3^* &= \left(\frac{q}{G}\right)^2 \delta F_3, \end{aligned} \quad (35)$$

где V_1^*, V_3^* – отнесенные компоненты массовых сил;
 b – материальная постоянная;

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{A_2}{r} (r \Psi_0^{*2} e_{rr}^*)_{,r} + \frac{A_2}{2} (\Psi_0^{*2} e_{rz}^*)_{,z} - \frac{A_2}{r} \Psi_0^{*2} e_{\theta\theta}^*; \\ F_3 &= \frac{A_2}{2r} (r \Psi_0^{*2} e_{rz}^*)_{,r} + A_2 (\Psi_0^{*2} e_{zz}^*)_{,z}. \end{aligned}$$

Применим к (34), (35) метод разложения по параметру нагружения (4)–(11), причем сам параметр введем отношением

$$\lambda = \frac{q}{G} < 1. \quad (36)$$

Считаем, что внешнее давление интенсивности q изменяется по линейному закону. Граничные условия на цилиндрических поверхностях в безразмерных координатах r^*, θ^*, z^* (отнесенных к радиусу r_1) будут для первого приближения

$$\sigma_{r^*r^*}^{*(0)} \Big|_{r^*=1} = \sigma_{r^*z^*}^{*(0)} \Big|_{r^*=1} = \sigma_{r^*z^*}^{*(0)} \Big|_{r^*=2} = 0; \quad \sigma_{r^*r^*}^{*(0)} \Big|_{r^*=2} = -z^* \quad (37)$$

и для второго

$$\sigma_{r^*z^*}^{*(2)} \Big|_{r^*=1} = \sigma_{r^*z^*}^{*(2)} \Big|_{r^*=2} = 0; \quad \sigma_{r^*r^*}^{*(2)} \Big|_{r^*=1} = \sigma_{r^*r^*}^{*(2)} \Big|_{r^*=2} = 0. \quad (38)$$

С учетом (32), (37), (38) окончательные действительные представления для перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} u_{r^*}^{*(0)} &= -\frac{2}{3} \left(a_1 r^* + \frac{1}{r^*} \right) z; \\ u_{z^*}^{*(0)} &= \frac{2}{3} \left(\left(a_2 z^{*2} + \frac{a_1}{2} r^{*2} \right) + \ln r^* \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{r^*}^{*(2)} = & -\frac{4A_2}{27^2} \left(\frac{9}{a_1} \frac{z^*}{r^*} \ln r^* + \frac{9}{4} a_3 \frac{z^*}{r^{*3}} - \frac{3}{2} a_4 \left(\frac{z^{*3}}{r^{*3}} - \frac{z^{*3}}{r^{*5}} \right) \right) + \left(\frac{1}{2} z^{*3} r^* - \frac{3}{2} z^* r^{*3} \right) c_{11}^{(2)} + \\
& + \left(z^* (2r^* \ln r^* + r^*) - \frac{2}{3} z^* r^* \right) c_{12}^{(2)} + z^* r^* c_{13}^{(2)} - \frac{z^*}{r^*} c_{14}^{(2)} + \left(10z^{*3} r^* - \frac{15}{2} z^* r^{*3} \right) c_{21}^{(2)} - \\
& - \left(\frac{z^{*4}}{r^*} - 3z^{*2} (2r^* \ln r^* + r^*) + 3(4r^{*3} \ln r^* + r^{*3}) \right) c_{22}^{(2)} + 3z^* r^* c_{23}^{(2)} - \frac{z^*}{r^*} c_{24}^{(2)} ; \\
u_z^{*(2)} = & -\frac{4A_2}{27^2} \left(b_1 \ln^2 r^* - \frac{9}{8} a_3 \frac{1}{r^{*2}} - \frac{9}{4} b_2 \frac{z^{*2}}{r^{*2}} + \frac{9}{8} b_3 \frac{z^{*2}}{r^{*4}} - \frac{1}{2} a_4 z^{*4} \right) + \\
& + b_4 c_{11}^{(2)} \frac{1}{8} (8z^{*4} - 2z^{*2} r^{*2} + 3r^{*4}) + c_{12}^{(2)} \left(\frac{1}{2} (2z^{*2} - r^{*2}) \ln r^* + \frac{1}{3} (r^{*2} + z^{*2}) \right) + \\
& + c_{13}^{(2)} \frac{1}{2} (2z^{*2} - r^{*2}) + c_{14}^{(2)} \ln r^* - \left(5z^{*4} - \frac{3}{4} z^{*2} r^{*2} + \frac{3}{8} r^{*4} \right) c_{11}^{(2)} - \\
& - \left(\frac{1}{2} (6z^{*2} - r^{*2}) \ln r^* + \frac{1}{3} (r^{*2} + 3z^{*2}) \right) c_{12}^{(2)} - \\
& - \frac{1}{2} (6z^{*2} - r^{*2}) c_{13}^{(2)} - c_{14}^{(2)} \ln r^* - \left(5z^{*4} - 15z^{*2} r^{*2} + \frac{15}{8} r^{*4} \right) c_{21}^{(2)} - \\
& - \frac{1}{8} \left((32z^{*3} - 48z^* r^{*2}) \ln r^* + \frac{114}{35} z^{*3} + \frac{39}{35} z^* r^{*2} \right) c_{22}^{(2)} - \frac{1}{2} (6z^{*2} - 3r^{*2}) c_{23}^{(2)} - c_{24}^{(2)} \ln r^* ,
\end{aligned}$$

где a_i, b_j – комбинации материальных постоянных.

Численные расчеты проводились для следующих материалов:

1. Медь: модуль объемного сжатия $K = 1,317483E11$ (Н/м²); сдвиговый модуль $G = 0,442431E11$ (Н/м²); постоянная, характеризующая нелинейность диаграммы деформирования $A_2 = 1,3270501E - 05$.

2. Сплав алюминиевой бронзы: $K = 1,298844E11$ (Н/м²); $G = 0,459108E11$ (Н/м²); $A_2 = 2,8272009E - 06$.

3. Мартеновская сталь: $K = 1,752066E11$ (Н/м²); $G = 0,836793E11$ (Н/м²); $A_2 = 3,2124114E - 06$.

На рис. 1 показаны графики зависимости отнесенного напряжения (33) от величины внешней нагрузки (36) на срединной поверхности цилиндра в сечении $z^* = 1$ для указанных сред. Отклонение значений $\sigma_{\theta\theta}^*$ от нелинейной упругости составляет 6 %. Кроме того, толщина цилиндра меньше влияет на величину напряжений. Так, для сплава алюминиевой бронзы при $r_2^* = 2$, $q = 196E06$ Па напряжения $\sigma_{\theta\theta}^*$ уменьшаются на 8–10 %, а при $r_2^* = 1,2$ – на 4 % по сравнению с упругим материалом (рис. 2).

Поверхности распределения напряжений $\sigma_{rr}^*, \sigma_{\theta\theta}^*$ в интервалах изменения переменных $r^* \in [1, 2]$, $z^* \in [0, 1]$ при нагрузках от 0 до 196E06 Па свидетельствуют о более равномерном распределении напряжений при удалении от граничных поверхностей (рис. 3 и 4).

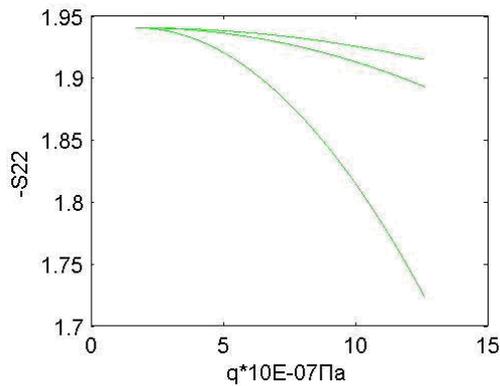


Рис. 1

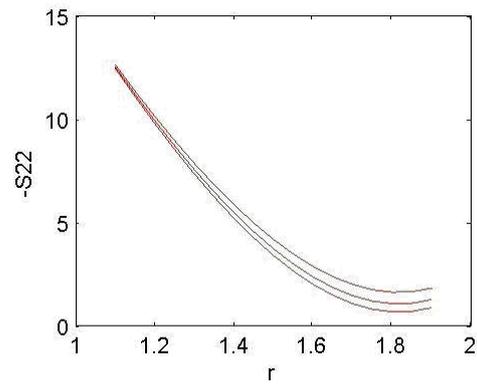


Рис. 2

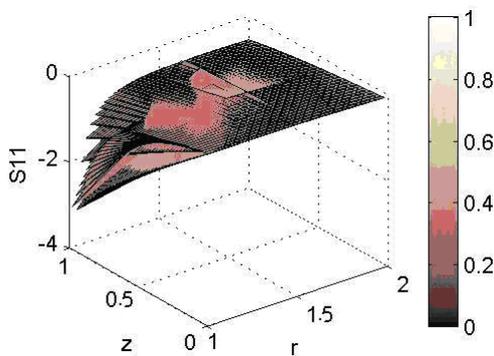


Рис. 3

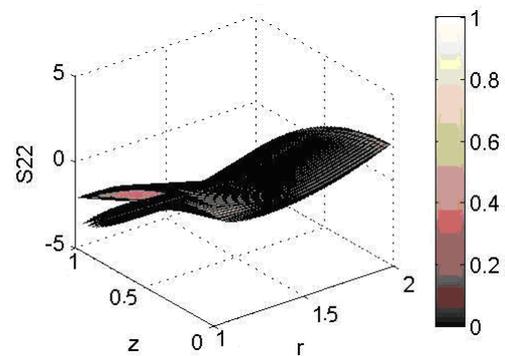


Рис. 4

Заключение

Разработанный подход применим к задачам о концентраторах напряжений в упругопластических средах и допускает обобщение на пространственные области, отображаемые на канонические. Кроме того, он может быть использован в случае редукции линейных краевых задач к граничной задаче Римана – Гильберта на каждом этапе.

Список литературы

1. Ключников, В.Д. Сходимость метода разложения по параметру нагружения в теории течения твердого деформируемого тела / В.Д. Ключников, В.А. Шачнев // Изв. АН СССР. МТТ. – 1990. – № 3. – С. 84–90.
2. Ключников, В.Д. Метод упругих решений в теории пластического течения / В.Д. Ключников // ПМТФ. – 1965. – № 1. – С. 133–135.
3. Ибрагимов, В.А. Сходимость метода разложения по параметру нагружения в задачах упругопластического деформирования стержней / В.А. Ибрагимов, В.А. Нифагин // Теоретическая и прикладная механика : сб. науч. тр. – Минск, 1988. – С. 50–58.
4. Мельниченко, И.П. Кватернионные переменные и гиперкомплексные потенциалы в механике сплошной среды / И.П. Мельниченко, Е.М. Пик // Прикладная механика. – 1979. – Т. 9, вып. 4. – С. 45–50.
5. Богашов, Ф.А. О представлении пространственных задач теории упругости в функциях комплексных переменных / Ф.А. Богашов // Прикл. проб. прочн. и пластичн. – Горький : ГГУ, 1989. – Вып. 41. – С. 110–118.
6. Нифагин, В.А. Напряженное состояние упрочняющегося упругопластического пространства, ослабленного шаровой полостью / В.А. Нифагин // Доклады НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 3. – С. 27–32.

7. Ганнинг, Р.Х. Аналитические функции многих комплексных переменных / Р.Х. Ганнинг, Х. Росси. – М. : Мир, 1969. – 275 с.
8. Нифагин, В.А. Общие приближенные решения основных задач пространственной нелинейной теории упругости в аналитических многомерных функциях матричной переменной / В.А. Нифагин, А.Б. Севрук // Вестник БНТУ. – 2007. – № 1. – С. 54–59.
9. Нифагин, В.А. Методы функций многих комплексных переменных в пространственных задачах математической теории пластичности / В.А. Нифагин. – Минск : БНТУ, 2008. – 191 с.
10. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – СПб. : Невский диалект. БХВ-Петербург, 2004. – 536 с.
11. Немиш, Ю.Н. К решению пространственных физически нелинейных задач для симметрично нагруженных упругих цилиндров / Ю.Н. Немиш, О.И. Левчук // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, № 5. – С. 69–76.

Поступила 27.05.08

*Белорусский национальный
технический университет,
Минск, пр. Независимости, 65
e-mail: vladnifagin@gmail.com*

V.A. Nifagin

**SOLUTIONS OF BOUNDARY SPATIAL PROBLEMS
FOR HARDENING ELASTIC-PLASTIC BODIES USING SERIES
OF UNIFORM POLYNOMIALS OF SEVERAL COMPLEX VARIABLES**

A method for solving spatial boundary problems for plasticity law with nonlinear hardening is suggested. On the basis of special representations of functions of several complex variables a common solution of major problems is reached. The method of decomposition on power parameter and series on uniform polynomials of matrix variables are used for reduction of the problem to the sequence of connected linear tasks. For illustration of the method a boundary problem of the intense-deformed condition of the thick-walled cylinder is considered. The suitable analytical solution is constructed. The influence of the plastic properties on the stress-strain condition is also studied.