

УДК 519.6; 536.2

В.Т. Борухов, Г.М. Заяц, В.А. Цурко

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В НЕЛИНЕЙНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С ВОЗМУЩЕННЫМИ ВХОДНЫМИ ДАННЫМИ

Приводится метод функциональной идентификации коэффициента теплопроводности нелинейного нестационарного параболического уравнения. Представляются результаты численных экспериментов по восстановлению коэффициента теплопроводности для задач с возмущенными данными измерения температуры в некоторой точке объекта.

Введение

При анализе процессов тепло- и массообмена во многих случаях необходимо по данным измерений температуры в заданной точке определить законы изменения параметров уравнений переноса. Задачи такого рода являются обратными задачами (ОЗ) математической физики. Особенность ОЗ состоит в том, что они, в отличие от прямых задач, не всегда обладают свойством корректности в смысле Адамара. В связи с этим А.Н. Тихоновым и его последователями были разработаны методы регуляризации некорректно поставленных задач и предложены устойчивые способы их решения (см., например, [1–7]).

В настоящее время при решении ОЗ математической физики широко применяются различные методы минимизации целевых функционалов. В частности, градиентные методы численного решения ОЗ теплопроводности развивались в работах [8–13]. Одной из проблем, часто возникающих при использовании градиентных методов, является численная реализация значений сопряженных операторов. В связи с этим во многих работах (см., например, [9–13]) рассматривалась конечномерная аппроксимация искомым коэффициентов. Такому подходу присущи определенные достоинства, связанные с регуляризирующими свойствами конечномерных аппроксимаций. Однако конечномерный или, в другой терминологии, параметрический подход к задачам идентификации имеет и недостатки, связанные прежде всего с проблемой выбора подходящей базисной системы.

В работе [14] предложен подход функциональной идентификации коэффициента теплопроводности, в котором используется схема градиентных методов минимизации целевого функционала без предварительной конечномерной аппроксимации искомого коэффициента. Это стало возможным в силу полученных в [14] новых интегродифференциальных представлений оператора, сопряженного к оператору внутренней суперпозиции.

Как известно, при решении прикладных задач идентификации коэффициента теплопроводности данные измерений температуры являются основным источником погрешностей [15]. Это обусловлено особенностями функционирования датчиков температуры. В работе [15] отмечается, что ОЗ, как правило, чрезвычайно чувствительны к погрешностям измерений. В связи с этим представляет интерес задача численного моделирования идентификации коэффициентов теплопроводности с возмущенными входными данными.

В настоящей работе продолжены исследования, начатые в [14, 16–18]. Приводится описание алгоритмической части подхода функциональной идентификации коэффициента теплопроводности нелинейного параболического уравнения. Представлены результаты применения построенных методов для восстановления некоторых модельных коэффициентов. Рассмотрено влияние возмущений входных данных на устойчивость численных алгоритмов, реализующих разработанный подход.

1. Постановка задачи

В области $\Omega = \left\{ (x, t) : 0 < x < b, 0 < t \leq t_f \right\}$ рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1)$$

с начальными

$$T(x, 0) = \bar{T}(x), \quad x \in (0, b), \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$T(0, t) = g_1(t), \quad T(b, t) = g_2(t), \quad \forall t \in [0, t_f]. \quad (3)$$

Начальные и краевые условия согласованы; $c(T)$, $\lambda(T)$, $\bar{T}(x)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ – заданные функции.

Задача (1)–(3) описывает процессы теплопереноса, диффузии, фильтрации в нелинейных средах. В дальнейшем для определенности будем полагать, что условия (1)–(3) описывают процесс теплопереноса. В виде (1)–(3) формулируется прямая задача для нахождения функции $T(x, t)$. Методы решения данной прямой задачи теплопроводности, как аналитические [19], так и численные [20], хорошо развиты.

Рассмотрим обратную задачу, в которой неизвестным, помимо $T(x, t)$, является коэффициент теплопроводности $\lambda(T)$. Решение такой задачи находится из условий (1)–(3) и дополнительного условия

$$T(x_*, t) = \tilde{T}(t), \quad x_* \in (0, b), \quad t \in [0, t_f], \quad (4)$$

где x_* – фиксированная точка, в которой измеряется температура.

Приведенная здесь постановка обратной задачи является классической. Методической основой, обеспечивающей разрешимость этой задачи, служат известные результаты Н.В. Музылева, М.В. Клибанова, О.М. Алифанова и других авторов (см., например, [7, 9]), из которых следуют существование и единственность решения задачи при некоторых ограничениях на входные данные $c(T)$, $\bar{T}(x)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\tilde{T}(t)$.

Как уже отмечалось, ОЗ теплопроводности чувствительны к погрешностям измерений температуры, которые неизбежны вследствие дискретного характера измерений, точности показаний датчиков и других причин. В связи с этим при разработке метода решения ОЗ важное значение имеет его устойчивость к погрешностям измерений. При численном исследовании устойчивости задачи (1)–(4) по входным данным будем полагать, что основным источником погрешности являются измерения температуры в точке $x = x_*$, а остальные параметры обратной задачи: время, размеры пространственной области, значение точки x_* , объемная теплоемкость, краевые и начальные условия – известны точно. Погрешность измерения температуры рассматриваем как случайную величину и считаем, что она удовлетворяет ряду стандартных предположений [15]: является аддитивной, некоррелированной во времени, имеет нулевое математическое ожидание, постоянную дисперсию, нормальное распределение.

2. Вычислительный алгоритм

Идентификация коэффициента λ , основанная на методе сопряженных градиентов [9, 14], представляет собой итерационный процесс минимизации целевого функционала

$$J(\lambda) = \int_0^{t_f} (T(x_*, t) - \tilde{T}(t))^2 dt. \quad (5)$$

Следуя [14, 16–18], рассмотрим три варианта алгоритма, отмечая их индексом $i, i \in \{1, 2, 3\}$. В первом случае ($i=1$) предполагается, что область определения G функционала J совпадает с некоторой открытой областью в пространстве $L_2[T^{(1)}, T^{(2)}]$ суммируемых с квадратом функций вида $\lambda(T)$. Здесь $T^{(1)} = \min_{(x,t) \in \Omega} T(x,t)$, $T^{(2)} = \max_{(x,t) \in \Omega} T(x,t)$, $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω . Если же $i=2, 3$, то G совпадает с открытой областью в пространстве Соболева $W_2^1[T^{(1)}, T^{(2)}]$ абсолютно непрерывных функций.

Итерации, определяющие минимизирующую последовательность функционала (5), задаются рекурсией

$$\lambda_{n+1}(T) = \lambda_n(T) - \beta_n l_n(T), \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}; \quad (6)$$

$$l_n(T) = J_{\lambda_n}^i(T) + \gamma_{n-1}^i l_{n-1}(T), \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad l_{-1} = 0, \quad (7)$$

где i – номер алгоритма; $\lambda_{n+1}(T)$ – $(n+1)$ -е приближение для $\lambda(T)$; $l_n(T)$ – направление спуска на $(n+1)$ -й итерации; $J_{\lambda_n}^i$ – градиент функционала (5) в точке $\lambda = \lambda_n$. Функции $J_{\lambda_n}^i$ и параметры β_n, γ_{n-1}^i ($i=1, 2, 3$) определяются далее.

Останов итерационного процесса происходит при выполнении неравенства

$$\int_0^{t_f} p_n(t)^2 dt \leq \varepsilon, \quad p_n(t) = T_n(x_*, t) - \tilde{T}(t), \quad (8)$$

где ε – задаваемый эмпирический параметр, $T_n(x, t)$ – решение начально-краевой задачи (1)–(3) при $\lambda(T) = \lambda_n(T)$. Методика выбора параметра ε опирается на критерии, описанные в работах [4, 9].

Функция $J_{\lambda_n}^i$ вычисляется в зависимости от варианта алгоритма $i \in \{1, 2, 3\}$ по одной из следующих формул:

$$J_{\lambda_n}^1 = - \frac{d}{dz} \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \chi(z, T_n(x, t)) \frac{\partial T_n(x, t)}{\partial x} \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial x} dt dx \equiv - \frac{d}{dz} \int_{\Omega} R(z, x, t) \frac{\partial T_n(x, t)}{\partial x} \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial x} dx dt; \quad (9)$$

$$J_{\lambda_n}^2 = - \int_{\Omega} \frac{\partial T_n(x, t)}{\partial x} \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial x} dx dt - \int_{T^{(1)}}^z \int_{\Omega} r(\tau, x, t) \frac{\partial T_n(x, t)}{\partial x} \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial x} dx dt d\tau; \quad (10)$$

$$J_{\lambda_n}^3 = - \int_{\Omega} \frac{\partial T_n(x, t)}{\partial x} \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial x} dx dt - \int_z^{T^{(2)}} \int_{\Omega} R(\tau, x, t) \frac{\partial T_n(x, t)}{\partial x} \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial x} dx dt d\tau, \quad (11)$$

где $\chi(z, s) = \begin{cases} 1 & \text{if } T^{(1)} \leq s \leq z, \\ 0 & \text{if } z \leq s \leq T^{(2)} \end{cases}$ – характеристическая функция множества $\{s \mid T^{(1)} \leq s \leq z\}$;

$R(z, x, t)$ и $r(\tau, x, t)$ – характеристические функции множеств $\omega(z) = \{(x, t) \in \Omega \mid T_n(x, t) \leq z \leq T^{(2)}\}$ и $\bar{\omega}(z) = \Omega \setminus \omega(z) = \{(x, t) \in \Omega \mid T^{(1)} \leq z \leq T_n(x, t)\}$ соответственно; $w = w_n(x, t)$ – решение неоднородной начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} c(T_n) \frac{\partial w}{\partial t} + \lambda_n(T_n) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \delta(x - x_*) p_n(t) &= 0, \quad (x, t) \in \Omega, \\ w(x, t_f) &= 0, \quad w(0, t) = w(b, t) = 0, \quad t \in [0, t_f], \end{aligned} \quad (12)$$

сопряженной к начально-краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (c(T_n) v) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\lambda_n(T_n) v) + \frac{\partial}{\partial x} \left(l(T_n) \frac{\partial T_n}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in \Omega, \\ v(0, t) &= v(b, t) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad t \in [0, t_f]. \end{aligned} \quad (13)$$

Для завершения описания алгоритма укажем, что параметры γ_{n-1}^i и β_n задаются формулами

$$\gamma_{n-1}^i = - \frac{\|J_{\lambda_n}^{i1}\|^2}{\|J_{\lambda_{n-1}}^{ii}\|^2}, \quad \beta_n = \frac{\int_0^{t_f} p_n(s) v(x_*, s) ds}{\int_0^{t_f} v^2(x_*, s) ds}, \quad (14)$$

где $\|J_{\lambda_n}^{i1}\|_{L_2}^2 = \int_{T^{(1)}}^{T^{(2)}} (J_{\lambda_n}^{i1})^2 dz$, $\|J_{\lambda_n}^{ii}\|_{W_2^1}^2 = \left(\int_{\Omega} \frac{\partial T_n(x, t)}{\partial x} \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial x} dx dt \right)^2 + \int_{T^{(1)}}^{T^{(2)}} l_{n_i}^2 dz$, $i = 2, 3$, (15)

$$l_{n_2} = \int_{\Omega} r(\tau, x, t) \frac{\partial T_n(x, t)}{\partial x} \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial x} dx dt, \quad l_{n_3} = \int_{\Omega} R(z, x, t) \frac{\partial T_n(x, t)}{\partial x} \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial x} dx dt.$$

На основании (6)–(15) опишем последовательность приближенного решения ОЗ (1)–(4). Выберем начальное приближение $\lambda(T) = \lambda_0(T)$ для итерационного нахождения коэффициента $\lambda(T)$. Итерационный цикл для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Решаем прямую задачу (1)–(3) с $\lambda(T) = \lambda_n(T)$ и вычисляем значения температуры $T_n(x, t)$ в области Ω .

Шаг 2. Проверяем выполнение критерия останова (8). В случае выполнения критерия выбираем $\lambda(T) = \lambda_n(T)$ в качестве решения ОЗ (1)–(4). Если критерий (8) не выполняется, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Используя найденные на шаге 1 значения $T_n(x, t)$, решаем начально-краевую задачу (12).

Шаг 4. Вычисляем значения градиента $J_{\lambda_n}^{ii}$ по одному из соотношений (9)–(11).

Шаг 5. Если $n > 0$, то из соотношения (14) находим параметр γ_{n-1}^i и переходим к шагу 6. При $n = 0$ переходим к шагу 6.

Шаг 6. Из соотношения (7) определяем величину $l_n(T)$.

Шаг 7. Находим решение начально-краевой задачи (13) и из (14) определяем параметр β_n .

Шаг 8. По соотношению (6) вычисляем значение $\lambda_{n+1}(T_n)$ и возвращаемся к шагу 1.

Численная реализация данного алгоритма основана на разностном методе [20]. Для нахождения численных решений вводим сетки узлов по времени $\omega_\tau = \{t_j = j \cdot \tau, j = 0, 1, \dots, J_0, J_0 \cdot \tau = t_f\}$, по пространству $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, x_N = Nh = b\}$ и температуре $\omega_{\tau_T} = \{T_k = T^{(1)} + k\tau_T, k = 0, 1, 2, \dots, K, \tau_T K = T^{(2)} - T^{(1)}\}$, где τ, h, τ_T – счетные параметры (шаги сеток по времени, пространству и температуре соответственно).

Решения задач (1)–(3), (12), (13) находятся на сетке $\omega = \omega_h \times \omega_\tau$ с помощью разностных схем типа Кранка – Никольсон [20]. Вычисление интегралов в (9)–(11), (14) основано на методе трапеций [21].

3. Примеры численного моделирования

В зависимости от выбора градиента $J_{\lambda_n}^i, i = 1, 2, 3$ (см. (9)–(11)), рекуррентные соотношения (6), (7) назовем соответственно алгоритмами I, II и III.

Проиллюстрируем работу численных алгоритмов метода функциональной идентификации на модельных примерах. Приведем характерные результаты вычислительных экспериментов.

Для моделирования возмущений функции $y(t) = \tilde{T}(t)$ был использован дискретный белый гауссовский шум. Этот вид шума характеризуется равномерной спектральной плотностью, нормально распределенным значением амплитуды, аддитивностью, некоррелированностью по времени, нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Таким образом, возмущенные входные данные $\varphi(t)$ рассматривались в виде

$$\varphi(t_j) = y(t_j) + \varepsilon_j, \quad (16)$$

где $\varepsilon_j = \varepsilon_0 \theta_j$, $\varepsilon_0 = \alpha \cdot \max_{0 \leq j \leq j_0} \tilde{T}(t_j)$, α – некоторая константа, θ_j – дискретный белый гауссовский шум.

Пример 1. В качестве входных данных $c(T) = c_{\text{mod}}(T)$, $g_1(t)$ и $g_2(t)$ в задаче (1)–(4) выберем функции, графики которых приведены на рис. 1. Пусть модельная функция $\lambda(T) = \lambda_{\text{mod}}(T)$ (рис. 2–4) имеет вид

$$\lambda_{\text{mod}}(T) = \begin{cases} 25,0 e^{(T/450,0)} & \text{и } \delta \text{e } T < 450,0; \\ 6,073 \times 10^{-4} (T - 700,0)^2 + 30,0 & \text{и } \delta \text{e } 450,0 \leq T < 900,0; \\ 9,025 \times 10^{-3} T + 46,17 & \text{и } \delta \text{e } T \geq 900,0. \end{cases} \quad (17)$$

Отметим, что производные по температуре для данной функции имеют разрывы первого рода. Полагаем $b = 3,0$, $t_f = 7200,0$, $\bar{T}(x) = 30,0$, $x_* = 2,0$. В качестве функции $\tilde{T}(t)$ берем численное решение задачи (1)–(3) в точке $x = x_*$ при $c(T) = c_{\text{mod}}(T)$, $\lambda(T) = \lambda_{\text{mod}}(T)$, полученное по разностной схеме Кранка – Никольсон [20] с достаточно мелкими шагами сеток по пространству и времени.

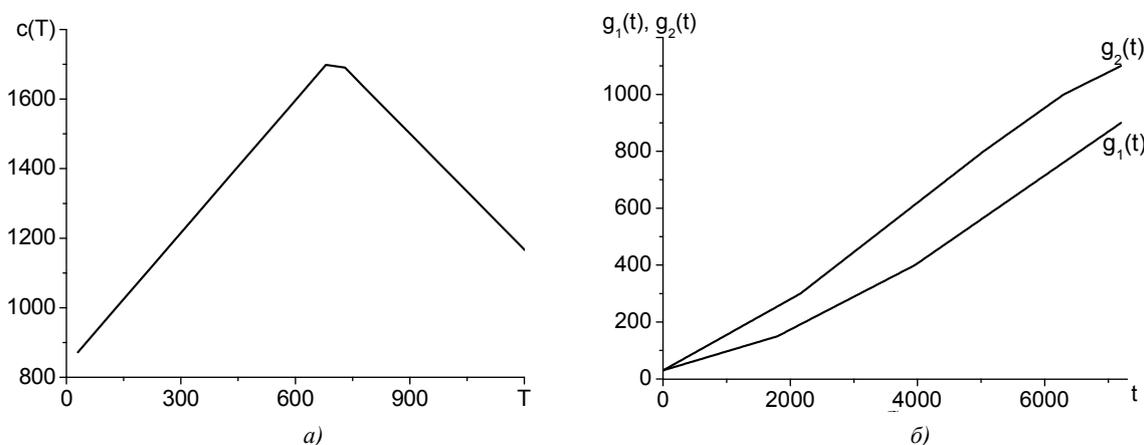


Рис. 1. Входные данные для задачи (1)–(4): а) вид функции $\tilde{\lambda}_{\text{mod}}(T)$; б) вид функций $g_1(t)$, $g_2(t)$

На рис. 2 показаны результаты моделирования коэффициента теплопроводности (17) с помощью алгоритмов I, II и III метода функциональной идентификации в предположении, что погрешность в измерениях температуры отсутствует: $\varepsilon_j \equiv 0$, $0 \leq j \leq j_0$. Из рис. 2 видно, что алгоритм I точнее передает изломы графика функции $\lambda_{\text{mod}}(T)$, а алгоритмы II и III обладают сглаживающими свойствами. Отметим при этом, что расчеты по алгоритму II дают возможность на правом конце интервала $[T^{(1)}, T^{(2)}]$ заметно приблизить численное решение $\lambda_n(T)$ к точному решению, а использование соотношения (11) позволяет находить решение $\lambda_{\text{mod}}(T)$ с левого края достаточно точно.

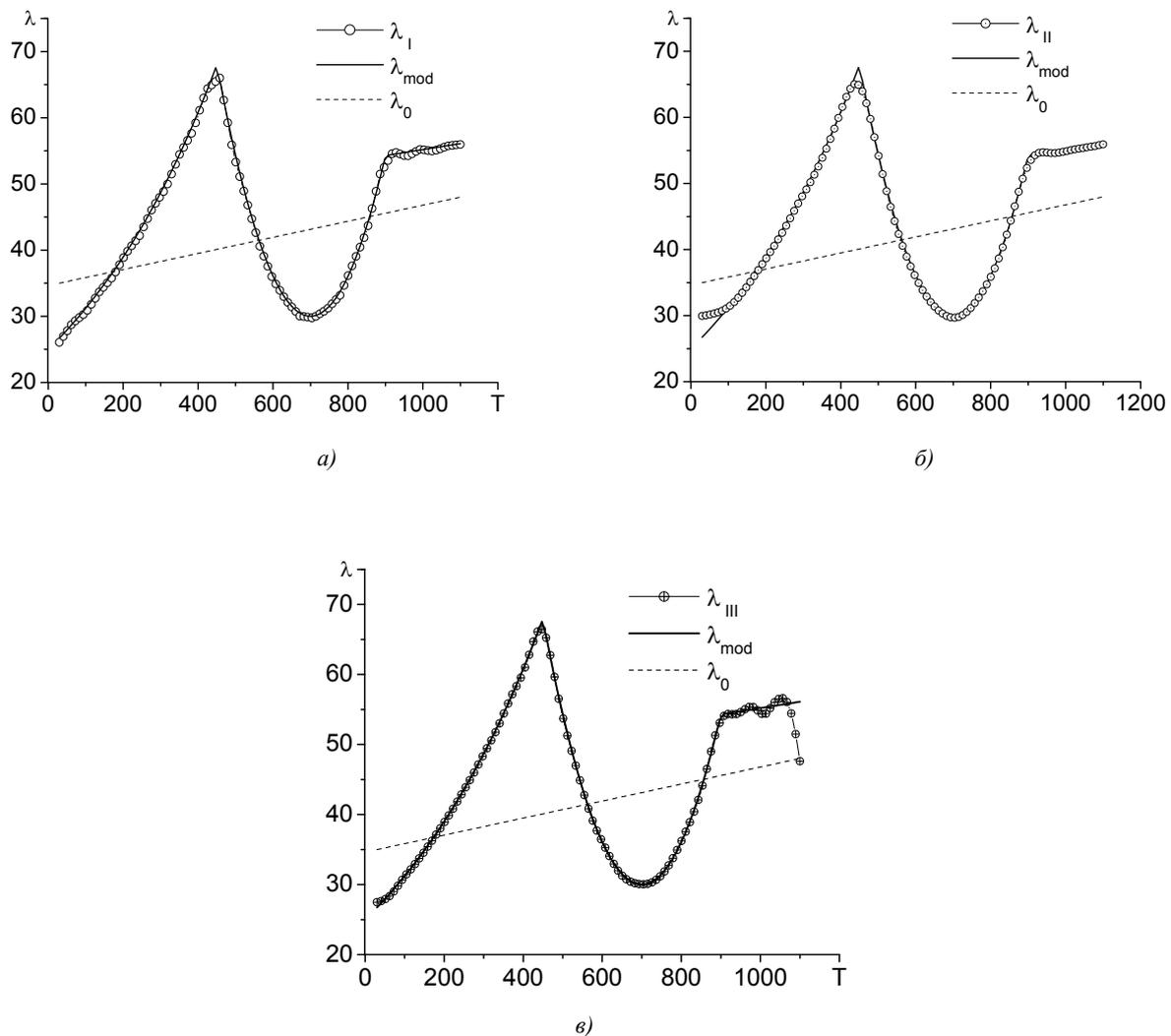


Рис. 2. Результаты расчета коэффициента $\lambda_{\text{mod}}(T)$: а) по алгоритму I; б) алгоритму II; в) алгоритму III

Приведем для данного примера результаты численного решения ОЗ (1)–(4) с возмущенной по закону (16) функцией $\tilde{T}(t)$. Положим в соотношении (16) величину $\alpha = 0,01$. Графики восстановленного с помощью алгоритмов I и III коэффициента $\lambda_{\text{mod}}(T)$ и график возмущений $\varepsilon(t_j)$ приведены на рис. 3. Вычисления проводились с количеством сеточных узлов $j_0 = 25$, $N = 500$, $K = 10$. Полученные данные идентификации в условиях слабого шума вполне удовле-

творительны. Приближенные значения $\lambda_n(T)$ с достаточной точностью передают характерные особенности коэффициента теплопроводности $\lambda_{\text{mod}}(T)$.

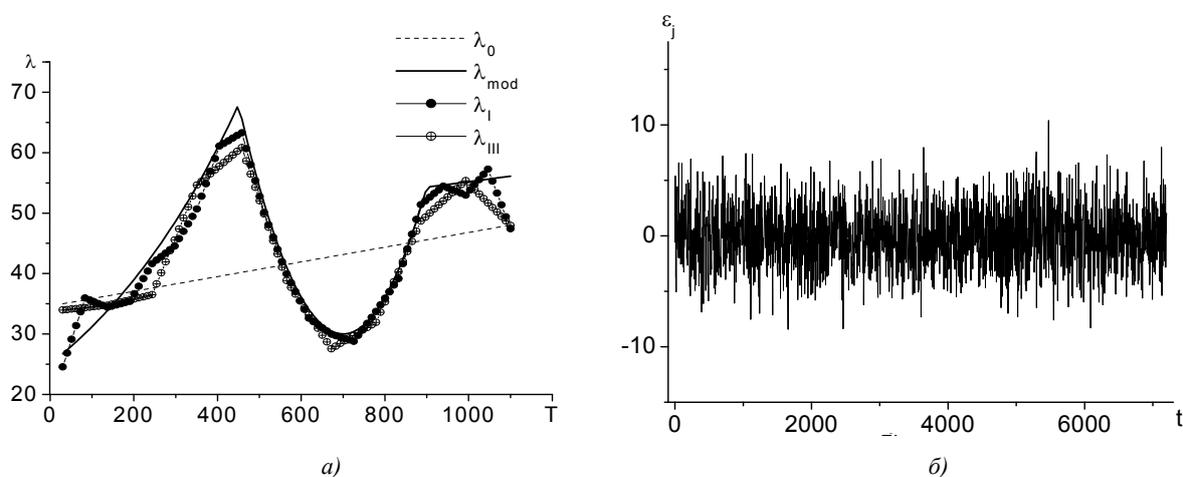


Рис. 3. Результаты идентификации коэффициента $\lambda_{\text{mod}}(T)$ в условиях зашумленных входных данных ($\alpha = 0,01$):
 а) расчеты по алгоритму I (кривая λ_I) и по алгоритму III (кривая λ_{III}); б) реализация случайных возмущений, распределенных по нормальному закону

Увеличим амплитуду возмущений, полагая в (16) значение $\alpha = 0,15$. На рис. 4, а показаны результаты восстановления $\lambda_{\text{mod}}(T)$ по алгоритму III с количеством узлов сетки ω_{τ_T} , равным $K = 10$ и $K = 20$, на рис. 4, б – графики точных $\tilde{T}(t)$ и зашумленных данных $\varphi(t)$. Полученные результаты качественно и количественно хуже представленных на рис. 3, а, однако численное решение $\lambda_n(T)$ в определенной мере передает особенности модельного $\lambda_{\text{mod}}(T)$. При этом расчеты по алгоритму I с более мелким шагом τ_T приводят к появлению осцилляций, что указывает на регуляризующий характер параметра τ_T .

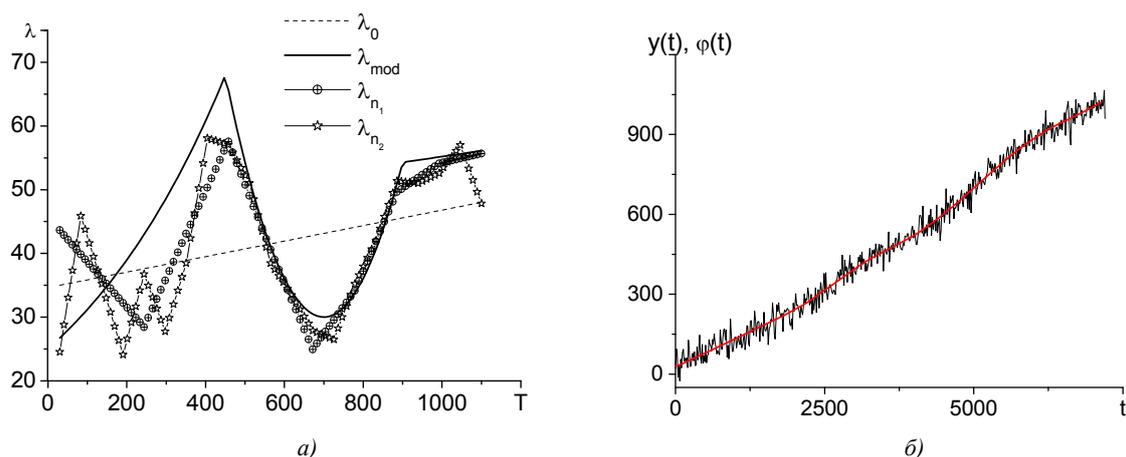


Рис. 4. Результаты влияния возмущений с $\alpha = 0,15$ на восстановление $\lambda_{\text{mod}}(T)$ по алгоритму I:
 а) кривая λ_{n_1} получена при количестве узлов сетки ω_{τ_T} $K = 10$, кривая λ_{n_2} соответствует $K = 20$;
 б) точные $y(t) = \tilde{T}(t)$ и зашумленные $\varphi(t)$ значения входных данных

Пример 2. Пусть по измеренной в точке объекта температуре требуется восстановить параметр a (коэффициент теплопроводности) для уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Краевые и начальные условия выбираем те же, что и в примере 1, функцию $\tilde{T}(t)$ определяем посредством численного решения данного выше уравнения. Параметры задачи следующие: $a = 38,0$, $b = 3,0$, $t_f = 7200,0$, $\bar{T}(x) = 30,0$, $x_* = 1,5$.

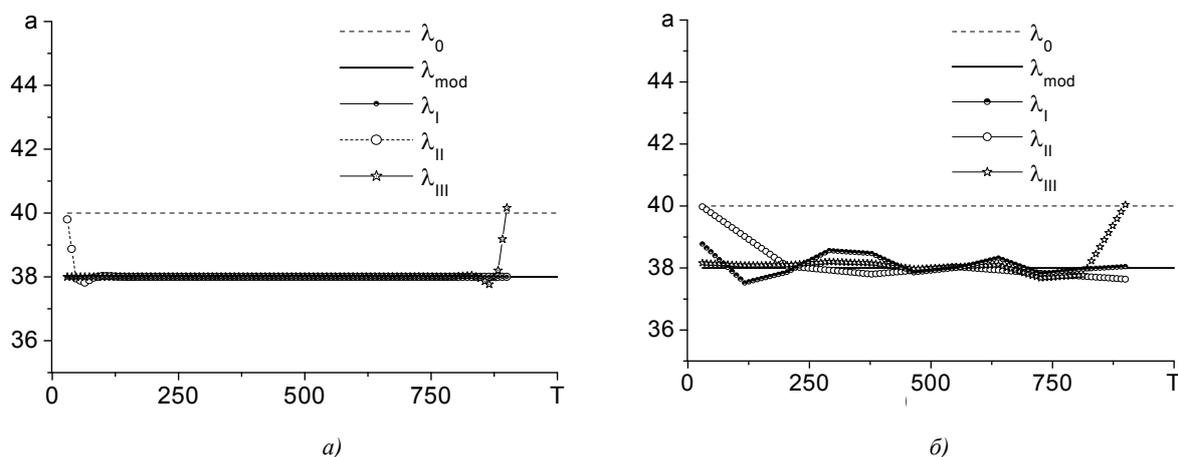


Рис. 5. Результаты восстановления коэффициента температуропроводности a по алгоритмам I, II и III: а) при расчете с точными входными данными; б) с возмущенными данными

Приведем результаты расчетов коэффициента a с точной функцией $\tilde{T}(t)$ (в предположении, что погрешность при решении прямой задачи незначительна), а также с возмущенной функцией по закону (16).

На рис. 5, а показаны результаты восстановления коэффициента a по алгоритмам I, II и III в случае $\varepsilon_j \equiv 0$, $j = 0, 1, \dots, j_0$, при вычислениях с количеством сеточных узлов $j_0 = 400$, $N = 50$, $K = 15$ для алгоритма I и $j_0 = 400$, $N = 50$, $K = 50$ для алгоритмов II и III. При выбранных параметрах найденный с помощью алгоритма I коэффициент a практически совпадает с точным значением $a = 38,0$, а рассчитанные по алгоритмам II и III коэффициенты дают заметную погрешность идентификации лишь в некоторой окрестности концов интервала $[T^{(1)}, T^{(2)}]$. На рис. 5, б показаны результаты восстановления коэффициента a при возмущении функции $\tilde{T}(t)$ на тех же расчетных сетках ω_τ , ω_h , ω_{τ_r} . Графики коэффициентов, полученные по алгоритмам I, II и III, приведены для $\alpha = 0,15$. Как и следовало ожидать, рассчитанные значения $a_n(T)$ заметно отличаются от восстанавливаемого значения $a = 38,0$.

Заключение

Результаты проведенных исследований показывают, что метод функциональной идентификации коэффициента теплопроводности достаточно эффективен как в условиях точных, так и зашумленных входных данных. Численные алгоритмы, реализующие метод функциональной идентификации коэффициента теплопроводности, устойчивы относительно действия на входные данные ОЗ аддитивного белого гауссовского шума достаточно широкого диапазона. Для получения удовлетворительных результатов восстановления $\lambda(T)$ на всем отрезке $[T^{(1)}, T^{(2)}]$ в силу особенностей алгоритмов I, II и III вблизи границ

исследуемого отрезка целесообразно компилировать результаты вычислений по алгоритмам I, II и III. Расчеты необходимо проводить при различных шагах сеток по температуре, времени и пространству. Предлагаемые алгоритмы позволяют восстанавливать коэффициент теплопроводности с разрывной производной по температуре в произвольных заранее неизвестных точках разрывов, что представляется особо важным при определении коэффициентов для задач с фазовыми переходами.

Список литературы

1. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
2. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
3. Бухгейм, А.Л. Введение в теорию обратных задач / А.Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1988. – 181 с.
4. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов [и др.]. – М.: Наука, 1990. – 229 с.
5. Иванов, В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельников, А.И. Филинков. – М.: Наука, 1995. – 176 с.
6. Федотов, А.М. Некорректные задачи со случайными ошибками в данных / А.М. Федотов. – Новосибирск: Наука, 1992. – 279 с.
7. Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики / Борухов [и др.] // ИФЖ. – 2005. – Т. 78, № 2. – С. 3–15.
8. Алифанов, О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов / О.М. Алифанов. – М.: Машиностроение, 1979. – 216 с.
9. Алифанов, О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
10. Артюхин, Е.А. Восстановление коэффициента теплопроводности из решения нелинейной обратной задачи / Е.А. Артюхин // ИФЖ. – 1981. – Т. 41, № 4. – С. 587–592.
11. Румянцев, С.В. Способы учета априорной информации в регуляризирующих градиентных алгоритмах / С.В. Румянцев // ИФЖ. – 1985. – Т. 49, № 6. – С. 932–936.
12. Ozisik, M.N. Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications / M.N. Ozisik, V.H.R. Orlande. – N.-Y.: Taylor and Francis, 2000. – 330 p.
13. Function estimation with Alifanov's iterative regularization method in linear and nonlinear heat conduction / J. Wang [et al.] // Applied Mathematical Modelling. – 2002. – Vol. 26, iss. 11. – P. 1093–1111.
14. Борухов, В.Т. Функциональная идентификация градиентными методами нелинейного коэффициента теплопроводности. I. Сопряженные операторы / В.Т. Борухов, В.И. Тимошпольский // ИФЖ. – 2005. – Т. 78, № 4. – С. 68–74.
15. Бек, Дж. Некорректные обратные задачи теплопроводности / Дж. Бек, Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клэр мл. – М.: Мир, 1989. – 310 с.
16. Функциональная идентификация градиентными методами нелинейного коэффициента теплопроводности. II. Численное моделирование / В.Т. Борухов [и др.] // ИФЖ. – 2005. – Т. 78, № 4. – С. 703–709.
17. Определение нелинейного коэффициента теплопроводности для изделий трубчатой формы методом функциональной идентификации / В.Т. Борухов [и др.] // ИФЖ. – 2006. – Т. 79, № 6. – С. 23–30.
18. Борухов, В.Т. Инвариантная форма функциональной идентификации коэффициентов теплопроводности / В.Т. Борухов, И.В. Гайшун, В.И. Тимошпольский // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 6. – С. 30–33.
19. Полянин, А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.

20. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 635 с.
21. Крылов, В.И. Приближенное вычисление интегралов / В.И. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 407 с.

Поступила 27.02.08

*Институт математики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 11
e-mail: borukhovo@im.bas-net.by,
zayats@im.bas-net.by,
vtsurko@im.bas-net.by*

V.T. Borukhov, G.M. Zayats, V.A. Tsurko

**IDENTIFICATION OF A THERMAL CONDUCTIVITY COEFFICIENT
OF NONLINEAR PARABOLIC EQUATION
WITH DISTURBED INPUT DATA**

A functional identification approach for estimating a thermal conductivity coefficient of non-linear time-dependent parabolic equation is formulated. The results of numerical reconstruction of the thermal conductivity coefficient for the problem with disturbed measurements of temperature in some point of the object are presented.