ИНФОРМАТИКА

2008 **июль-сентябрь** **№ 3**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.8

Н.Г. Егорова, Ю.Н. Сотсков

МИНИМИЗАЦИЯ СУММЫ ВЗВЕШЕННЫХ МОМЕНТОВ ЗАВЕРШЕНИЯ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ

Исследуется задача построения расписания с минимальной суммой взвешенных моментов завершения обслуживания n требований одним прибором при условии, что известны нижние и верхние границы возможных значений длительностей операций по обслуживанию требований. Доказывается необходимое и достаточное условие, при выполнении которого требование J_u доминирует требование J_v (иными словами, для каждого множества возможных длительностей операций существует оптимальная перестановка n требований, в которой J_u предшествует J_v). Приводится критерий существования единственной перестановки n требований, которая является оптимальной при любых возможных длительностях операций. Доказывается необходимое и достаточное условие, при котором любая перестановка n требований является единственной оптимальной перестановкой при некотором множестве возможных длительностей операций. Полученные условия проверяются за полиномиальное от n время.

Введение

При решении практических задач оперативно-календарного планирования к моменту построения расписания обслуживания заданного множества требований, как правило, не удается определить точные значения длительностей всех операций, которые необходимо выполнить. Однако в большинстве практических ситуаций имеется возможность заранее получить достоверные нижние и верхние границы возможных длительностей операций, т. е. при построении оптимального расписания можно считать известными интервалы допустимых значений длительностей планируемых к выполнению операций. Это свойство многих задач оперативно-календарного планирования определяет практическую важность алгоритмов построения оптимальных расписаний для обслуживающих систем с неопределенными (интервальными) длительностями.

В данной статье исследуется задача построения расписания с минимальной суммой взвешенных моментов завершения обслуживания *n* требований одним прибором, если для каждой длительности обслуживания требования на момент построения расписания известны только нижняя и верхняя границы допустимых значений. Из-за неопределенности длительностей операций по обслуживанию требований, как правило, не удается найти перестановку требований, которая оставалась бы оптимальной при любых допустимых длительностях операций. По этой причине в качестве решения задачи с интервальными длительностями операций рассматривается минимальное по включению подмножество доминирующих перестановок *n* требований, которое для каждого множества допустимых длительностей операций содержит хотя бы одну оптимальную перестановку.

1. Постановка задачи и определения

В обслуживающую систему, состоящую из единственного прибора, в момент времени $t=0$ поступает множество требований $J=\{J_1, J_2, ..., J_n\}$. Каждое требование $J_i \in J$ должно быть обслужено прибором без прерываний в течение времени $p_i \in [a_i, b_i]$. Здесь p_i обозначает случайную величину, которая в процессе реализации расписания может оказаться равной любому вещественному числу, заключенному между заданной нижней границей $a_i \geq 0$ и верхней границей b_i, $b_i \geq a_i$. Закон распределения случайной величины p_i на отрезке $[a_i, b_i]$ не задан. Каждому требованию $J_i \in J$ приписан вес $w_i > 0$, определяющий относительную значимость этого требования. В исследуемой задаче требуется построить такое расписание (перестановку) обслуживания n требований J, при котором взвешенная сумма $\sum_{i=1}^{n} w_i C_i$ моментов завершения обслуживания требований принимает наименьшее значение (здесь и далее C_i обозначает момент завершения обслуживания требования $J_i \in J$). В соответствии с принятой в теории расписаний трехпозиционной формой классификации [1] сформулированная задача обозначается $1 | a_i \leq p_i \leq b_i | \sum w_i C_i$.

Пусть S – множество всех n! перестановок $\pi_i = (J_{i_1}, J_{i_2}, ..., J_{i_n})$ требований множества J : $S = \{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n!}\}$. Множество допустимых n-мерных векторов $p = (p_1, p_2, ..., p_n) \in R_+^n$ длительностей операций по обслуживанию требований обозначим

$$T = \{p \ : \ p \in R_+^n, a_i \leq p_i \leq b_i, J_i \in J\} .$$

Задачу $1 | a_i \leq p_i \leq b_i | \Phi$ с критерием оптимальности Φ будем называть неопределенной задачей (с интервальными длительностями операций) в отличие от ее частного случая задачи $1 || \Phi$ (с фиксированными длительностями операций), которую будем называть детерминированной. Для задачи $1 | a_i \leq p_i \leq b_i | \Phi$, как правило, не существует единственной перестановки $\pi_i \in S$, которая была бы оптимальной для всех детерминированных задач $1 || \Phi$, порождаемых неопределенной задачей $1 | a_i \leq p_i \leq b_i | \Phi$ в результате фиксации того или иного допустимого вектора $p \in T$ длительностей операций. Поэтому в качестве решения неопределенной задачи $1 | a_i \leq p_i \leq b_i | \Phi$ будем рассматривать минимальное по включению подмножество перестановок множества S, которые в совокупности доминируют все перестановки множества S согласно следующим определениям [2].

Определение 1. *Решением* неопределенной задачи $1 | a_i \leq p_i \leq b_i | \Phi$ будем называть минимальное по включению множество перестановок $S(T) \subseteq S$, такое, что для любого допустимого вектора $p \in T$ длительностей операций существует перестановка $\pi_i \in S(T)$, которая является оптимальной для детерминированной задачи $1 || \Phi$ с вектором p длительностей операций.

Определение 2. Требование J_u доминирует требование J_v относительно T (будем представлять доминирование в виде $J_u \prec J_v$), если существует решение $S(T)$ неопределенной задачи $1 | a_i \leq p_i \leq b_i | \Phi$, каждая перестановка которого имеет вид $(..., J_u, ..., J_v, ...)$ или $(..., J_u, J_v, ...)$, т. е. во всех перестановках $\pi_i \in S(T)$ требование J_u предшествует требованию J_v.

Здесь и далее *решение* $S(T)$ выделено курсивом, чтобы отличать его от решения детерминированной задачи теории расписаний в традиционном понимании. Согласно определению 1 *решением* $S(T)$ детерминированной задачи $1 || \Phi$, которая является частным случаем неопределенной задачи $1 | a_i \leq p_i \leq b_i | \Phi$ (при условии, что равенство $a_i = b_i$ выполняется для каждого требования $J_i \in J$), является одноэлементное множество $S(T) = \{\pi_i\}$, где $\pi_i = (J_{i_1}, J_{i_2}, ..., J_{i_n})$ – оптимальная перестановка требований J для задачи $1 || \Phi$. Согласно определению 2 для задачи $1 || \Phi$ выполняются следующие отношения доминирования: $J_{i_1} \prec J_{i_2} \prec J_{i_3} \prec ... \prec J_{i_{n-2}} \prec J_{i_{n-1}} \prec J_{i_n}$.

В разд. 2 приводится ряд известных результатов о детерминированной задаче $1 || \sum w_i C_i$.

2. Фиксированные длительности обслуживания требований

Известно, что детерминированная задача $1 || \sum w_i C_i$ полиномиально разрешима [3], причем алгоритм сложности $O(n \log_2 n)$ построения оптимальной перестановки для задачи

$1||\sum w_iC_i$ основан на следующем достаточном условии оптимальности перестановки $\pi_i = (J_{i_1}, J_{i_2}, ..., J_{i_n}) \in S$:

$$\frac{w_{i_1}}{p_{i_1}} \geq \frac{w_{i_2}}{p_{i_2}} \geq ... \geq \frac{w_{i_n}}{p_{i_n}}. \tag{1}$$

Неравенства (1) являются и необходимыми условиями оптимальности перестановки π_i. Это следует из теоремы 1, доказательство которой можно найти в [4].

Теорема 1 [4]. *Для того чтобы перестановка* $\pi_i = (J_{i_1}, J_{i_2}, ..., J_{i_n})$ *была оптимальной для задачи* $1||\sum w_iC_i$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства (1).*

Для доказательства приведенных в разд. 3–5 утверждений для неопределенной задачи $1|a_i \leq p_i \leq b_i|\sum w_iC_i$ нам потребуются следствия 1 и 2 из теоремы 1 (доказательство этих следствий содержится в [4, с. 23]).

Следствие 1 [4]. *Если выполняется неравенство* $\frac{w_u}{p_u} > \frac{w_v}{p_v}$, *то во всех оптимальных перестановках задачи* $1||\sum w_iC_i$ *требование* J_u *должно предшествовать требованию* J_v.

Следствие 2 [4]. *Если выполняется равенство* $\frac{w_v}{p_v} = \frac{w_u}{p_u}$, *то для задачи* $1||\sum w_iC_i$ *существует оптимальная перестановка* n *требований вида*

$$(..., J_u, ..., J_v, ...) \text{ или } (..., J_u, J_v, ...) \tag{2}$$

и одновременно существует оптимальная перестановка n *требований вида*

$$(..., J_v, ..., J_u, ...) \text{ или } (..., J_v, J_u, ...). \tag{3}$$

Приведенные для детерминированной задачи $1||\sum w_iC_i$ результаты будут использованы для поиска *решения* $S(T)$ неопределенной задачи $1|a_i \leq p_i \leq b_i|\sum w_iC_i$ в общем случае (разд. 3) и в предельных случаях, когда $|S(T)|=1$ (разд. 4) и когда $|S(T)|=n!$ (разд. 5).

3. Интервальные длительности обслуживания требований

Поиск *решения* $S(T)$ неопределенной задачи $1|a_i \leq p_i \leq b_i|\sum w_iC_i$ будет основан на проверке выполнимости следующего критерия доминирования для пары требований $J_u \in J$ и $J_v \in J$.

Теорема 2. *Требование* J_u *доминирует требование* J_v *относительно* T *для задачи* $1|a_i \leq p_i \leq b_i|\sum w_iC_i$ *тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\frac{w_u}{b_u} \geq \frac{w_v}{a_v}. \tag{4}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть неравенство (4) выполняется. Необходимо доказать, что требование J_u доминирует требование J_v относительно T (т. е. существует *решение* $S(T)$ неопределенной задачи $1|a_i \leq p_i \leq b_i|\sum w_iC_i$, такое, что во всех перестановках $\pi_k \in S(T)$ требование J_u предшествует требованию J_v).

В силу конечности множества перестановок S всегда можно построить некоторое *решение* $S'(T) \in S$ неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$ в результате последовательного удаления из множества S всех «лишних» перестановок. Возьмем произвольный допустимый вектор $p \in T$ длительностей обслуживания требований. Поскольку $a_u \le p_u \le b_u$, то выполняются соотношения

$$\frac{w_u}{a_u} \ge \frac{w_u}{p_u} \ge \frac{w_u}{b_u}. \tag{5}$$

Поскольку $a_v \le p_v \le b_v$, то выполняются соотношения

$$\frac{w_v}{a_v} \ge \frac{w_v}{p_v} \ge \frac{w_v}{b_v}. \tag{6}$$

Из неравенств (4)–(6) получаем неравенства $\frac{w_u}{p_u} \ge \frac{w_u}{b_u} \ge \frac{w_v}{a_v} \ge \frac{w_v}{p_v}$. Следовательно, для любых допустимых длительностей обслуживания требований $p_u \in [a_u, b_u]$ и $p_v \in [a_v, b_v]$ справедливо соотношение

$$\frac{w_u}{p_u} \ge \frac{w_v}{p_v}. \tag{7}$$

Очевидно, если выполняется хотя бы одно из неравенств $p_u < b_u$, $a_v < p_v$ или $\frac{w_u}{b_u} > \frac{w_v}{a_v}$, то соотношение (7) превращается в строгое неравенство. Тогда согласно следствию 1 требование J_u должно предшествовать требованию J_v в любой оптимальной перестановке π_i детерминированной задачи $1||\sum w_i C_i$ с вектором $p \in T$ длительностей операций. Следовательно, множество $S'(T)$ заведомо содержит перестановку n требований множества J вида $(..., J_u, ..., J_v, ...)$ или $(..., J_u, J_v, ...)$, которая является оптимальной для детерминированной задачи $1||\sum w_i C_i$ с вектором $p \in T$ длительностей операций. Если же для вектора $p' = (p'_1, p'_2, ..., p'_n) \in T$ одновременно выполняются три равенства $p'_u = b_u$, $a_v = p'_v$ и $\frac{w_u}{p'_u} = \frac{w_v}{p'_v}$, то согласно следствию 2 существует оптимальная перестановка n требований множества J вида $(..., J_u, ..., J_v, ...)$ или $(..., J_u, J_v, ...)$ и одновременно существует оптимальная перестановка n требований вида $(..., J_v, ..., J_u, ...)$ или $(..., J_v, J_u, ...)$ для детерминированной задачи $1||\sum w_i C_i$ с вектором $p' \in T$ длительностей операций.

Если для каждого такого вектора $p' \in T$ множество $S'(T)$ содержит перестановку n требований множества J вида (2) $\pi_i = (..., J_u, ..., J_v, ...)$ или $\pi_i = (..., J_u, J_v, ...)$, то $S'(T)$ является искомым *решением*: $S(T) = S'(T)$. В противном случае, если для некоторого вектора $p' \in T$ множество $S'(T)$ содержит перестановку вида (3) $\pi_k = (..., J_v, ..., J_u, ...)$ или $\pi_k = (..., J_v, J_u, ...)$, то заменим в $S'(T)$ перестановку вида (3) на перестановку вида (2), которая отличается от перестановки вида (3) транспозицией требований J_u и J_v. Из следствия 2 получаем, что новая перестановка вида (3) также будет оптимальной для детерминированной задачи $1||\sum w_i C_i$ с вектором p' длительностей операций. Если проделать такую замену перестановок π_k на перестановки π_i для всех указанных равенств $p_u = b_u$, $a_v = p_v$ и $\frac{w_u}{p_u} = \frac{w_v}{p_v}$, то из *решения* $S'(T)$ будет получено искомое *решение* $S(T)$ неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$, в каждой перестановке которого требование J_u предшествует требованию J_v. Следовательно, требование J_u доминирует требование J_v относительно T. Достаточность условия (4) доказана.

Необходимость докажем методом от противного. Пусть требование J_u доминирует требование J_v относительно T (иными словами, существует *решение* $S(T)$ неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$, в котором все перестановки имеют вид $(..., J_u, ..., J_v, ...)$ или $(..., J_u, J_v, ...)$). Однако предположим, что условие (4) нарушено, т. е. выполняется противоположное неравенство: $\frac{w_u}{b_u} < \frac{w_v}{a_v}$. Покажем, что в этом случае найдутся такие допустимые длительности обслуживания требований p'_u ($a_u \le p'_u \le b_u$) и p'_v ($a_v \le p'_v \le b_v$), для которых выполняется неравенство $\frac{w_u}{p'_u} < \frac{w_v}{p'_v}$. Действительно, пусть $p'_u = b_u$ и $p'_v = a_v$, тогда получим $\frac{w_u}{p'_u} = \frac{w_u}{b_u} < \frac{w_v}{a_v} = \frac{w_v}{p'_v}$. Итак, для допустимых длительностей p'_u и p'_v справедливо неравенство $\frac{w_u}{p'_u} < \frac{w_v}{p'_v}$. Следовательно, согласно следствию 1 не существует оптимальной перестановки $\pi_i \in S$ для детерминированной задачи $1||\sum w_i C_i$, в которой требование J_u предшествует требованию J_v. Таким образом, множество $S(T)$ не является *решением* неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$ (поскольку множество $S(T)$ не содержит оптимальной перестановки ни для одного допустимого вектора $p' = (p'_1, p'_2, ..., p'_n) \in T$ с компонентами $p'_u = b_u$ и $p'_v = a_v$). Из полученного противоречия следует необходимость условия (4) для того, чтобы требование J_u доминировало требование J_v относительно T. ■

Теорема 2 как критерий доминирования требований относительно T позволяет получить компактное представление *решения* $S(T)$ неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$. Для этого в результате проверки условия (4) для каждой пары требований множества J за $O(n^2)$ элементарных действий можно построить орграф $G = (J, A)$, определяющий отношение доминирования на множестве J. Дуга (J_u, J_v) принадлежит множеству A тогда и только тогда, когда имеет место доминирование $J_u \prec J_v$. Множество дуг $A \subseteq J \times J$ орграфа $G = (J, A)$ определяет транзитивное бинарное отношение на множестве требований J.

Нетрудно видеть, что если для всех требований $J_i \in J$ выполняется строгое неравенство $b_i > a_i$, то орграф $G = (J, A)$ определяет отношение строгого порядка на множестве требований J. Если же существует два требования J_i и J_j (или более двух требований), для которых интервал допустимых для них значений длительностей обслуживания вырождается в точку (причем отношение $\frac{w_i}{b_i} = \frac{w_i}{a_i}$ для таких требований одно и то же: $\frac{w_i}{b_i} = \frac{w_i}{a_i} = \frac{w_j}{b_j} = \frac{w_j}{a_j}$), то в орграфе $G = (J, A)$ возникают контуры. Очевидно, что порядок требований J_i и J_j, для которых выполняются равенства $\frac{w_i}{b_i} = \frac{w_i}{a_i} = \frac{w_j}{b_j} = \frac{w_j}{a_j}$, не оказывает влияния на значение целевого функционала $y = \sum_{i=1}^{n} w_i C_i$, поэтому порядок таких требований можно зафиксировать; например, если

$i < j$, то будем рассматривать только такие перестановки множества S, в которых требование J_i предшествует требованию J_j. Соответственно, для того чтобы исключить контуры из орграфа $G = (J, A)$, примем следующее соглашение: если одновременно выполняются равенства $\frac{w_i}{b_i} = \frac{w_i}{a_i} = \frac{w_j}{b_j} = \frac{w_j}{a_j}$ и неравенство $i < j$, то исключим дугу (J_j, J_i) из множества A. Проделав исключение таких дуг для всех указанных равенств $\frac{w_i}{b_i} = \frac{w_i}{a_i} = \frac{w_j}{b_j} = \frac{w_j}{a_j}$, получим отношение строгого порядка на множестве требований J, заданное орграфом $G^* = (J, A^*)$, $A^* \subset A$.

Проиллюстрируем применение теоремы 2 на следующем примере.

Пример 1. Пусть исходные данные задачи $1 | a_i \le p_i \le b_i | \sum w_i C_i$ определены в табл. 1. Для каждой пары требований $J_u \in J$ и $J_v \in J$ проверяем выполнение условий (4) теоремы 2. Получаем следующие соотношения:

$$\frac{w_1}{b_1} = 6 \ge 6 = \frac{w_2}{a_2};\ \frac{w_2}{b_2} = 5 \ge 5 = \frac{w_3}{a_3};\ \frac{w_2}{b_2} = 5 \ge 4 = \frac{w_4}{a_4};\ \frac{w_3}{b_3} = 2 \ge 2 = \frac{w_5}{a_5};\ \frac{w_4}{b_4} = 3 \ge 2 = \frac{w_5}{a_5}.$$

Таблица 1

Исходные данные для примера 1

i	a_i	b_i	w_i	w_i / a_i	w_i / b_i
1	1	3	18	18	6
2	5	6	30	6	5
3	4	10	20	5	2
4	3	4	12	4	3
5	4	8	8	2	1

Итак, для примера 1 неопределенной задачи $1 | a_i \le p_i \le b_i | \sum w_i C_i$ для пар требований J_1 и J_2, J_2 и J_3, J_2 и J_4, J_3 и J_5, J_4 и J_5 выполняется условие (4). Согласно теореме 2 приходим к заключению, что требование J_1 доминирует требование J_2, требование J_2 – требование J_3, требование J_2 – требование J_4, требование J_3 – требование J_5, требование J_4 – требование J_5. Ни одно из требований пары $\{J_3, J_4\}$ не доминирует другое. Таким образом, *решение* $S(T)$ примера 1 содержит в точности две перестановки, а именно $\pi_1 = (J_1, J_2, J_3, J_4, J_5)$ и $\pi_2 = (J_1, J_2, J_4, J_3, J_5)$. На рис. 1 представлена диаграмма орграфа $G = (J, A)$ без транзитивных дуг, который определяет *решение* $S(T) = \{\pi_1, \pi_2\}$ задачи $1 | a_i \le p_i \le b_i | \sum w_i C_i$.

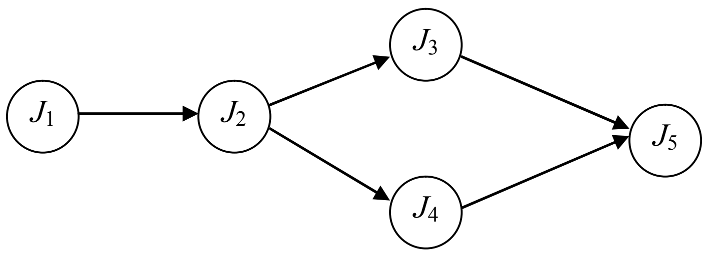

Рис 1. Диаграмма орграфа $G = (J, A)$ без транзитивных дуг

Здесь уместно следующее замечание относительно новизны представленного теоремой 2 критерия доминирования пары требований относительно T. В работе [5] также рассматривалась неопределенная задача $1 | a_i \le p_i \le b_i | \Phi$ с приоритето-порождающим [6] целевым функционалом $y = \Phi(\pi_i, p)$, $\pi_i \in S$, $p \in T$. В частности, было введено следующее отношение *S*-доминирования на множестве *S* перестановок *n* требований множества *J*.

Определение 3. Бинарное отношение $\Rightarrow_p$, заданное на множестве перестановок *S* относительно вектора $p \in T$ длительностей операций, называется отношением *S*-доминирования, если оно транзитивно и для пары перестановок $\pi_i \in S$ и $\pi_k \in S$ из отношения $\pi_i \Rightarrow_p \pi_k$ следует неравенство $\Phi(\pi_i, p) \le \Phi(\pi_k, p)$.

Множества отношений $\Rightarrow_p$, построенных для всех допустимых векторов $p \in T$ длительностей операций, использовались для определения *решения* $S(T)$ задачи $1 \mid a_i \le p_i \le b_i \mid \Phi$ (в [5] аналог множества $S(T)$ был назван *S*-эффективным множеством). На множестве требований *J* было определено бинарное отношение $\rhd$ следующим образом: отношение $J_u \rhd J_v$ выполняется, если справедливо соотношение $\min\{\omega(J_u, p_u) : p \in T\} \ge \max\{\omega(J_v, p_v) : p \in T\}$, где $y = \omega(J_u, p_u)$ – функция приоритета [6]. Пусть |*T*| обозначает мощность множества *T* *n*-мерных вещественных векторов. В [5] доказано следующее утверждение о достаточных условиях для определения множества всех отношений *S*-доминирования в случае минимизации произвольного приоритето-порождающего функционала на подмножестве перестановок множества *S*, допустимых относительно заранее заданного строгого порядка *D* обслуживания требований.

Теорема 3 [5]. *Если функционал* $y = \Phi(\pi_i, p)$ *является приоритето-порождающим на подмножестве S(D) перестановок множества S, допустимых относительно заданного строгого порядка D, то отношение* $\rhd$*, заданное на множестве J, определяет множество всех |T| отношений S-доминирования на множестве S(D).*

Доказательство теоремы 3 было основано в [5] на двух известных теоремах о приоритето-порождающих функционалах (доказательство этих теорем можно найти, например, в монографии [6]). Вопрос об условиях, необходимых для определения всех |*T*| отношений *S*-доминирования, в работе [5] не рассматривался. Поскольку целевой функционал $y = \sum_{i=1}^{n} w_i C_i$ рассматриваемой нами задачи $1 \mid a_i \le p_i \le b_i \mid \sum w_i C_i$ является приоритето-порождающим, причем в задаче $1 \mid a_i \le p_i \le b_i \mid \sum w_i C_i$ предполагается, что на множестве *J* заранее не задано какое-либо отношение порядка (т. е. *S*(*D*)=*S*), то можно показать, что доказательство достаточности условия (4) для доминирования требований относительно *T* следует из доказанной в [5] теоремы 3. Поэтому, действительно, новым результатом теоремы 2 можно считать лишь доказательство необходимости условия (4) для доминирования требований относительно *T*.

4. Критерий существования одноэлементного решения неопределенной задачи

Простейший случай неопределенной задачи $1 \mid a_i \le p_i \le b_i \mid \sum w_i C_i$ (в смысле определения 1) возникает, когда выполняется равенство $|S(T)| = 1$. В этом случае *решение* $S(T)$ задачи $1 \mid a_i \le p_i \le b_i \mid \sum w_i C_i$ определяется единственной перестановкой $\pi_i \in S$ требований множества *J*: $\{\pi_i\} = S(T)$, как и решение (в традиционном понимании) детерминированной задачи $1 \| \sum w_i C_i$.

Теорема 4. *Для существования одноэлементного решения* $S(T) = \{\pi_i\} = \{(J_{i_1}, J_{i_2}, \ldots, J_{i_n})\}$ *задачи* $1 \mid a_i \le p_i \le b_i \mid \sum w_i C_i$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\frac{w_{i_1}}{b_{i_1}} \ge \frac{w_{i_2}}{a_{i_2}},\ \frac{w_{i_2}}{b_{i_2}} \ge \frac{w_{i_3}}{a_{i_3}}, \ldots,\ \frac{w_{i_{n-2}}}{b_{i_{n-2}}} \ge \frac{w_{i_{n-1}}}{a_{i_{n-1}}},\ \frac{w_{i_{n-1}}}{b_{i_{n-1}}} \ge \frac{w_{i_n}}{a_{i_n}}. \qquad (8)$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть условие (8) выполняется. Тогда по теореме 2 из достаточности соответствующих условий (4) получаем линейно упорядоченное множество n требований: $J_{i_1} \prec J_{i_2} \prec J_{i_3} \prec ... \prec J_{i_{n-2}} \prec J_{i_{n-1}} \prec J_{i_n}$. Таким образом, согласно определению 2 существует *решение* $S(T)$ задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$, в котором все перестановки имеют вид $(J_{i_1}, J_{i_2}, J_{i_3}, ..., J_{i_{n-2}}, J_{i_{n-1}}, J_{i_n})$. Следовательно, $S(T) = \{\pi_i\}$.

Необходимость. Пусть одноэлементное множество $\{\pi_i\}, \pi_i \in S,$ является *решением* $S(T)$ неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$, т. е. согласно определению 1 для любого допустимого вектора $p \in T$ перестановка π_i оптимальна для детерминированной задачи $1||\sum w_i C_i$ с вектором p длительностей операций. Покажем, что тогда должны выполняться неравенства (8).

Вначале покажем, что должно выполняться первое неравенство из (8). Для этого в качестве вектора $p \in T$ возьмем допустимый вектор с компонентами $p_1 = b_{i_1}$ и $p_2 = a_{i_2}$ (остальные компоненты p_k, $3 \le k \le n$, вектора p могут быть любыми допустимыми, т. е. $a_k \le p_k \le b_k$). В силу оптимальности перестановки π_i для детерминированной задачи $1||\sum w_i C_i$ при таком векторе p длительностей операций из необходимости условия (1) теоремы 1 получаем первое неравенство из (8), а именно $\frac{w_{i_1}}{b_{i_1}} \ge \frac{w_{i_2}}{a_{i_2}}$. Аналогично фиксируя две последовательные компоненты $p_k = b_{i_k}$ и $p_{k+1} = a_{i_{k+1}}$ допустимого вектора $p \in T$ для различных индексов $k \in \{2, 3, ..., n-1\}$, за $(n-2)$ итераций получаем остальные неравенства из системы неравенств (8): $\frac{w_{i_k}}{b_{i_k}} \ge \frac{w_{i_{k+1}}}{a_{i_{k+1}}}$. ■

Очевидно, что одноэлементное *решение* $S(T)$ неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$, если оно существует, может быть получено и с помощью теоремы 2 за $O(n^2)$ элементарных действий. Покажем, что применение для этого теоремы 4 позволяет за меньшее число элементарных действий получить одноэлементное *решение* $S(T)$ (если оно существует) или доказать, что одноэлементного *решения* $S(T)$ задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$ не существует.

Перед проверкой условия (8) теоремы 4 за $O(n \log_2 n)$ элементарных действий упорядочим требования множества J по невозрастанию дробей $\frac{w_{i_k}}{p^0_{i_k}}$, где $p^0_{i_k}$ обозначает вещественное число, определяющее середину отрезка $[a_{i_k}, b_{i_k}]$. В результате получим некоторую перестановку $\pi_i = (J_{i_1}, J_{i_2}, ..., J_{i_n}) \in S$. Согласно достаточности условия теоремы 4, если неравенства (8) выполняются для перестановки π_i, то она определяет одноэлементное *решение* $S(T)$ неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$.

Нетрудно убедиться в том, что если условия (8) не выполняются для пар требований, упорядоченных согласно перестановке π_i, то одноэлементного *решения* $S(T)$ неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$ не существует. Очевидно, что для проверки условий (8) для фиксированной перестановки $\pi_i \in S$ достаточно выполнить $O(n)$ элементарных действий. Таким образом, асимптотическая сложность проверки условия теоремы 4 оценивается величиной $O(n \log_2 n)$.

Покажем, что для следующего примера неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$ условия (8) теоремы 4 выполняются и, следовательно, $|S(T)| = 1$.

Пример 2. Пусть исходные данные задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$ определены в табл. 2.

Таблица 2

Исходные данные для примера 2

i	a_i	b_i	w_i	w_i/a_i	w_i/b_i
1	5	6	30	6	5
2	4	8	8	2	1
3	1	3	18	18	6
4	3	4	12	4	3
5	4	5	20	5	4

Для примера 2 получаем

$$\frac{w_3}{b_3}=6\ge 6=\frac{w_1}{a_1};\ \frac{w_1}{b_1}=5\ge 5=\frac{w_5}{a_5};\ \frac{w_5}{b_5}=4\ge 4=\frac{w_4}{a_4};\ \frac{w_4}{b_4}=3\ge 2=\frac{w_2}{a_2}.$$

Таким образом, условие (8) действительно выполняется для примера 2. Следовательно, согласно теореме 4 *решение* $S(T)$ задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_iC_i$ является одноэлементным множеством: $S(T)=\{\pi_i\}$, где $\pi_i=(J_3,J_1,J_5,J_4,J_2)$.

5. Решение $S(T)$ задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_iC_i$ мощности $n!$

Наиболее сложный случай задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_iC_i$ возникает, когда $|S(T)|=n!$.

Теорема 5. *Для того чтобы решение* $S(T)$ *задачи* $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_iC_i$ *имело мощность* $n!$*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\max\left\{\frac{w_i}{b_i}:J_i\in J\right\}<\min\left\{\frac{w_i}{a_i}:J_i\in J\right\}. \tag{9}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть неравенство (9) выполняется. Выберем произвольную перестановку n требований $\pi_i=(J_{i_1},J_{i_2},...,J_{i_n})\in S$ и докажем, что она должна входить в любое *решение* $S(T)$ неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_iC_i$. Для этого покажем, что существует вектор $p\in T$, такой, что одновременно выполняются следующие неравенства:

$$\frac{w_{i_1}}{p_{i_1}}>\frac{w_{i_2}}{p_{i_2}}>...>\frac{w_{i_n}}{p_{i_n}}. \tag{10}$$

Введем обозначения: $a=\max\left\{\frac{w_i}{b_i}:J_i\in J\right\}$ и $b=\min\left\{\frac{w_i}{a_i}:J_i\in J\right\}$. Поскольку неравенство (9) строгое, то длина отрезка $[a,b]$ строго положительна. Нетрудно видеть, что отрезок $[a,b]$ представляет собой пересечение n отрезков: $[a,b]=\bigcap_{i=1}^{n}[\frac{w_i}{b_i},\frac{w_i}{a_i}]$. Поскольку множество вещественных чисел, представленных отрезком $[a,b]\subset R_+^1$, всюду плотно, то, учитывая (9), всегда можно найти n вещественных чисел p_{i_k}, $J_{i_k}\in J$, которые удовлетворяют всем неравенствам (10). Следовательно, согласно следствию 1 во всех оптимальных перестановках задачи $1||\sum w_iC_i$ с полученным вектором p длительностей операций требование J_{i_1} должно предшествовать требованию J_{i_2}, требование J_{i_2} – требованию J_{i_3} и т. д., требование $J_{i_{n-1}}$ – требованию J_{i_n}. Иными словами, π_i – единственная оптимальная перестановка для детерминированной задачи $1||\sum w_iC_i$ с вектором p длительностей операций, удовлетворяющим условию (10). Таким образом, согласно определению 1 любое *решение* $S(T)$ неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_iC_i$ должно содержать перестановку π_i. Поскольку перестановка π_i была выбрана из множества S произвольно, то любое *решение* $S(T)$ задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_iC_i$ должно содержать все перестановки множества S, т. е. множество $S(T)$ должно совпадать с множеством S. Получаем $|S(T)|=|S|=n!$.

Необходимость. Пусть $|S(T)|=n!$. Следовательно, $S(T)=S$. Покажем, что в этом случае должно выполняться неравенство (9). От противного предположим, что неравенство (9) не выполняется. Следовательно, множество J содержит хотя бы два требования J_u и J_v, таких, что выполняется соотношение $\frac{w_u}{b_u} \ge \frac{w_v}{a_v}$. Тогда из достаточности условия (4) теоремы 2 следует, что требование J_u доминирует требование J_v относительно T, т. е. согласно определению 2 существует *решение* $S'(T)$ задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_iC_i$, в котором все перестановки имеют вид $(...,J_u,...,J_v,...)$ или $(...,J_u,J_v,...)$. Получено противоречие: множество S не является *решением* неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_iC_i$, поскольку оно не является минимальным по включению (из него можно удалить непустое множество перестановок $S(T)\setminus S'(T)\ne\varnothing$, сохранив при этом в полученном множестве хотя бы по одной оптимальной перестановке для каждого фиксированного вектора $p\in T$ длительностей операций). ■

Из приведенного доказательства теоремы 5 можно получить следующее утверждение.

Следствие 3. *Для произвольной перестановки $\pi_i \in S$ найдется вектор $p\in T$, такой, что эта перестановка является единственной оптимальной перестановкой задачи $1||\sum w_iC_i$ с вектором p длительностей операций, тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (9).*

Доказательство. Доказательство *достаточности* условия (9) следствия 3 целиком содержится в доказательстве достаточности условия (9) теоремы 5.

Для доказательства *необходимости* условия (9) заметим, что если для любой перестановки $\pi_i \in S$ существует вектор $p\in T$, такой, что перестановка π_i является единственной оптимальной перестановкой задачи $1||\sum w_iC_i$ с вектором p длительностей операций, то согласно определению 1 должно выполняться равенство $S(T)=S$ для любого *решения* $S(T)$ задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_iC_i$. Получаем равенство $|S(T)|=n!$, и поэтому необходимость условия (9) следует из необходимости условия (9) теоремы 5. ■

Проверка условия (9) требует $O(n)$ элементарных действий, поскольку такова трудоемкость поиска максимума (минимума) из множества вещественных чисел $\left\{\frac{w_i}{b_i}: J_i \in J\right\}$ $\left(\left\{\frac{w_i}{a_i}: J_i \in J\right\}\right)$. Проиллюстрируем применение теоремы 5 на следующем примере.

Пример 3. Пусть исходные данные задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_iC_i$ определены в табл. 3.

Таблица 3

Исходные данные для примера 3

i	a_i	b_i	w_i	w_i/a_i	w_i/b_i
1	5	6	30	6	5
2	4	6	24	6	4
3	6	14	42	7	3
4	2	7	14	7	2
5	10	14	70	7	5

Проверяем выполнение условия (9): $\max\left\{\frac{w_i}{b_i} : i \in J\right\} = 5 < 6 = \min\left\{\frac{w_i}{a_i} : i \in J\right\}$. Итак, для примера 3 неопределенной задачи $1 | a_i \le p_i \le b_i | \sum w_i C_i$ условие (9) выполняется. Следовательно, согласно теореме 5 *решение* $S(T)$ задачи $1 | a_i \le p_i \le b_i | \sum w_i C_i$ имеет мощность $n!$, т. е. множество $S(T)$ должно совпадать с множеством S всех перестановок требований множества J : $S(T) = S$.

Заключение

Условия доказанных теорем 2, 4 и 5 проверяются за полиномиальное от n число элементарных действий. Однако очевидное практическое применение имеет лишь теорема 4, поскольку при выполнении условия (8) можно за $O(n \log_2 n)$ элементарных действий построить перестановку π_i для неопределенной задачи $1 | a_i \le p_i \le b_i | \sum w_i C_i$, которая остается оптимальной при любой допустимой реализации длительностей операций. В общем случае задачи $1 | a_i \le p_i \le b_i | \sum w_i C_i$ мощность $|S(T)|$ *решения* $S(T)$ можно использовать в качестве меры неопределенности задачи $1 | a_i \le p_i \le b_i | \sum w_i C_i$. В случае большой мощности множества $S(T)$ (например, при выполнении условия (9) теоремы 5) требуется ввести некоторый дополнительный критерий (такие критерии были рассмотрены в [5]) для выбора приемлемой для практической реализации перестановки $\pi_i \in S(T)$. Орграф $G^* = (J, A^*)$, определяющий *решение* $S(T)$ задачи $1 | a_i \le p_i \le b_i | \sum w_i C_i$, можно использовать в процессе реализации оптимального расписания на основе тех или иных достаточных условий для оптимального выбора очередного требования из множества возможных претендентов (в [7, 8] такие условия были доказаны для неопределенной задачи $F2 | a_i \le p_i \le b_i | C_{\max}$ поточного типа с двумя приборами и критерием $C_{\max}$ минимизации длины расписания).

Полученные в разд. 3–5 результаты используются в комплексе программ «Расписание», предназначенном для планирования рабочего времени руководящего работника [9, 10]. При этом задача минимизации целевого функционала $\sum_{i=1}^{n} w_i C_i$ интерпретируется как следующая задача максимизации суммарной прибыли. Пусть выполнение работы $J_i \in J$ приносит работнику прибыль, оцениваемую величиной $W - C_i$ (т. е. чем раньше закончена работа, тем больше прибыль). Тогда задача минимизации величины $\sum_{i=1}^{n} w_i C_i$ равносильна задаче максимизации суммарной прибыли $\sum_{i=1}^{n} (W - w_i C_i) = nW - \sum_{i=1}^{n} w_i C_i$, поскольку произведение nW не зависит от порядка обслуживания требований множества J.

Данная работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект М08МС-027). Авторы выражают благодарность рецензенту статьи за полезные конструктивные замечания и уточнения новизны полученных результатов.

Список литературы

1. Sequencing and scheduling: Algorithms and complexity / E.L. Lawler [et al.] // Handbooks in Operations Research and Management Science. Logistics of Production and Inventory. – North-Holland, USA, N.-Y., 1993. – P. 445–522.

2. Сотсков, Ю.Н. Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами / Ю.Н. Сотсков, Н.Ю. Сотскова. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2004. – 290 с.

3. Smith, W.E. Various optimizers for single-stage production / W.E. Smith // Naval Research and Logistics Quarterly. – 1956. – Vol. 3, № 1. – P. 59–66.

4. Теория расписаний и вычислительные машины / Под ред. Э.Г. Коффмана. – М.: Наука, 1984. – 336 с.

5. Шафранский, Я.М. Задачи теорий расписаний с неопределенными числовыми параметрами: направления исследований и некоторые результаты / Я.М. Шафранский // Информатика. – 2005. – № 3. – С. 5–15.

6. Танаев, В.С. Теория расписаний. Одностадийные системы / В.С. Танаев, В.С. Гордон, Я.М. Шафранский. – М.: Наука, 1984. – 384 с.

7. Лещенко, Н.М. Оптимальное по быстродействию обслуживание конфликтных требований с нефиксированными длительностями / Н.М. Лещенко, Ю.Н. Сотсков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 4. – С. 103–110.

8. Егорова, Н.Г. Выбор оптимального порядка обслуживания требований двумя приборами в процессе реализации расписания / Н.Г. Егорова, Н.М. Матвейчук, Ю.Н. Сотсков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 5. – С. 20–24.

9. Егорова, Н.Г. Планирование рабочего времени с учетом интервальных длительностей операций / Н.Г. Егорова, Н.М. Матвейчук, Ю.Н. Сотсков // Третья научная конференция «Танаевские чтения». – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2007. – С. 60–64.

10. Модели и комплекс программ для планирования рабочего времени / Ю.Н. Сотсков [и др.] // Информатика. – 2007. – № 4. – С. 5–15.

Поступила 05.06.07

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: sotskov@newman.bas-net.by

N.G. Egorova, Yu.N. Sotskov

MINIMIZING WEIGHTED SUM OF JOB COMPLETION TIMES WITH INTERVAL DURATIONS

A single machine scheduling problem with interval durations is investigated (for each job only a lower bound and upper bound of the job processing times are known before scheduling). The objective function is a weighted sum of job completion times. The necessary and sufficient conditions for job domination and for existence of a single dominant permutation have been proven. The necessary and sufficient conditions are also proven for the case when for any job permutation there exists a feasible vector of job processing times such that this permutation is unique optimal one for the deterministic problem with this vector of job processing times. All the proven conditions can be tested in polynomial time on the job number.