

УДК 621.382.049.774.2

Л.Д. Черемисинова

**ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ РЕГУЛЯРНЫХ
МОП-СТРУКТУР МЕТОДОМ ДВУДОЛЬНОЙ СВЕРТКИ**

Рассматривается проблема минимизации площади двухмерных матричных МОП-структур управляющей логики заказных СБИС на этапе топологического проектирования. Рассматривается двудольная свертка регулярных МОП-структур, наиболее подходящая для структур такого типа. Определяются ограничения, которые накладываются на вид свертки особенностями топологии матричных структур, состоящих из МОП-транзисторов. Предлагается эффективный метод двудольной свертки, позволяющий находить оптимальное или близкое к нему решение задачи двудольной столбцовой свертки регулярных МОП-структур.

Введение

При проектировании управляющей логики заказных СБИС в качестве базовых широко используются программируемые матричные структуры. Для этих структур возможна автоматическая генерация топологии по их функциональному описанию, облегчается решение задач диагностики и логического проектирования. Базовые структуры ориентируются, как правило, на некоторую технологию изготовления СБИС. Такими структурами, в частности, являются двухмерные регулярные структуры на базе последовательно соединенных МОП-транзисторов (РМОП-структуры) [1, 2]. За основной критерий оптимальности при проектировании СБИС на основе регулярных структур принимается площадь кристалла.

Топологическая реализация регулярной структуры обычно выполняется в два этапа: получение и оптимизация структурного описания, задающего символическое представление топологии; генерация и оптимизация топологического рисунка. Структурное описание, задающее символическое представление топологии, генерируется по функциональному описанию блока управляющей логики, и его оптимизация в случае РМОП-структур сводится в основном к раздельной минимизации булевых функций системы в классе ДНФ.

Существенным недостатком матричных структур на этапе топологического проектирования является то, что они, имея регулярную организацию, проигрывают многоуровневым реализациям на основе произвольной логики по площади, занимаемой на кристалле, за счет неэффективного ее использования. Последнее выражается в сильной разреженности матричных структур. Один из ранее широко использовавшихся на практике способов топологической оптимизации заключался в разбиении символического представления матричной структуры на «густые» аппликации и их сшивании. Этот метод позволял локально оптимизировать матричную структуру. Более глубокую оптимизацию обеспечивает широко применяемый в последние годы метод топологической оптимизации матричных структур, известный как свертка [3]. Свертка основана на разрыве шин матричной структуры и реализации на одной вертикальной (и/или горизонтальной) шине двух или более ее столбцов (и/или строк). Алгоритмы свертки, не изменяя функциональности матричной структуры, основаны на поиске оптимального переупорядочения и совмещения ее столбцов и строк.

Предметом данной работы является частный вид простой свертки, предложенный в [4] для ПЛМ и названный двудольной сверткой. Двудольная свертка характеризуется тем, что разрывы всех вертикальных шин при столбцовой свертке (и горизонтальных шин при строчной свертке) находятся на одном уровне.

Рассматривается задача двудольной свертки регулярных матричных МОП-структур, учитывая особенности этого типа структур заказных СБИС. Предлагается эффективный метод двудольной свертки РМОП-структур, позволяющий найти оптимальную свертку, которая обеспечивает максимальное сокращение площади, занимаемой РМОП-структурой на кристалле. Метод сводит задачу поиска оптимальной двудольной свертки РМОП-структур к задаче нахождения максимальных единичных миноров булевой матрицы.

1. РМОП-структуры и особенности их свертки

РМОП-схема так же, как и ПЛИМ, реализует систему ДНФ или их инверсий. Ее ядром является матрица И, столбцы которой представляют собой линии подвода входных сигналов, а строки реализуют конъюнкции входных переменных, соответствующих МОП-транзисторам. В отличие от ПЛИМ, в которой используется параллельное соединение транзисторов, в РМОП-структурах транзисторы матрицы И соединены последовательно. Отсюда и второе различие: выходы матрицы И РМОП-схемы не могут использоваться для формирования нескольких ДНФ. Строки матрицы И делятся на секции, закрепляемые за настраиваемыми ИЛИ-макроячейками, каждая из которых реализует дизъюнкцию сигналов, снимаемых со строк соответствующей секции.

Таким образом, особенностями электрической реализации матрицы И РМОП-структуры является то, что она разделена на секции, состоящие из последовательно расположенных строк (рис. 1). Точка на пересечении строки и столбца условного изображения РМОП-структуры означает наличие МОП-транзистора на пересечении вертикальной и горизонтальной линий матричной структуры.

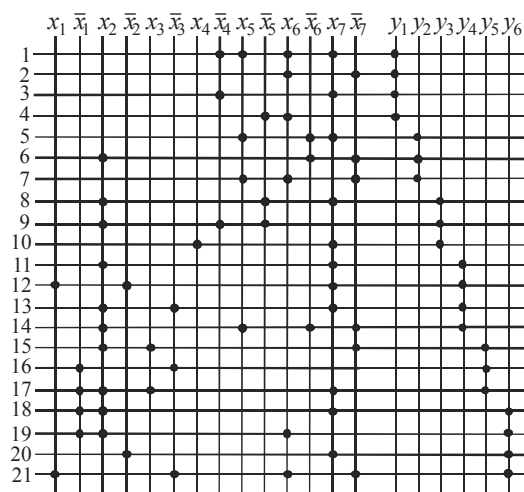


Рис. 1. Условное изображение РМОП-структуры, реализующей шесть булевых функций

Рассматриваемая топологическая реализация РМОП-структуры [2] имеет следующие ограничения:

- допускает свертку только матрицы И;
- не допускает свертку строк матрицы И, возможна свертка только ее столбцов;
- допускает столбцовую свертку ограниченного вида: в свернутой РМОП-структуре так же, как и в исходной, с каждой ИЛИ-макроячейкой должны быть связаны только последовательно расположенные строки, т. е. секции не могут пересекаться;
- в свернутой матрице И линии подвода каждого входного сигнала в прямом и инверсном виде должны располагаться с одной стороны (либо оба сверху, либо оба снизу).

2. Формализация задачи свертки РМОП-структур и основные определения

РМОП-структура может быть описана секционированной булевой матрицей \mathbf{B} , имеющей множества $C(\mathbf{B}) = \{c_1^{\mathbf{B}}, c_2^{\mathbf{B}}, \dots, c_n^{\mathbf{B}}\}$ столбцов, $R(\mathbf{B}) = \{r_1^{\mathbf{B}}, r_2^{\mathbf{B}}, \dots, r_m^{\mathbf{B}}\}$ строк и $S(\mathbf{B}) = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$ секций. Единичный элемент матрицы $b_i^j \in \mathbf{B}$ говорит о наличии транзистора на пересечении строки r_i и столбца c_j матричной структуры.

Секции матрицы являются подмножествами ее строк $S_k \subseteq R(\mathbf{B})$, а само множество $S(\mathbf{B})$ представляет собой разбиение на множестве $R(\mathbf{B})$: $R(\mathbf{B}) = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_p$ и $S_i \cap S_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. РМОП-структура, показанная на рис. 1, описывается следующей парой булевых матриц: секционированной матрицей \mathbf{B} и матрицами \mathbf{B}_S^c и \mathbf{B}_S^r , задающими структуру на уровне секций.

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}		
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	r_1	S_1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	r_2	
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	r_3	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	r_4	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	r_5	S_2
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	r_6	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	r_7	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	r_8	S_3
0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	r_9	
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	r_{10}	S_4
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	r_{11}	
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	r_{12}	
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	r_{13}	
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	r_{14}	
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	r_{15}	S_5
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	r_{16}	
0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	r_{17}	S_6
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	r_{18}	
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	r_{19}	
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	r_{20}	
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	r_{21}	

Каждый столбец порождает:

– множество $R(c_j^B)$ строк, имеющих единицы на пересечении с этим столбцом:

$$r_i^B \in R(c_j^B) \leftrightarrow b_i^j = 1;$$

– множество $S(c_j^B)$ секций, включающих в себя строки из $R(c_j^B)$:

$$S_i \in S(c_j^B) \leftrightarrow b_S^{c_j^i} = 1.$$

Соответственно множество $C_k \subseteq C(B)$ столбцов порождает:

– множество $R(C_k)$ строк, имеющих единицы на пересечении со столбцами $c_j^B \in C_k$;

– множество $S(C_k)$ секций, включающих в себя строки из $R(C_k)$.

Аналогично определяются множества столбцов $C(r_j^B) \subseteq C(B)$ и $C(S_j) \subseteq C(B)$, порождаемых соответственно строкой $r_j^B \in R(B)$ и секцией $S_j \in S(B)$:

$$c_i^B \in C(r_j^B) \leftrightarrow b_j^i = 1; \quad c_i^B \in C(S_j) \leftrightarrow b_S^{c_i^j} = 1;$$

$$c_i^B \in C(S_j) \leftrightarrow b_k^i = 1 \text{ и } r_k^B \in S_j.$$

Два столбца c_k^B и c_l^B матрицы B не пересекаются по строкам, если

$$R(c_k^B) \cap R(c_l^B) = \emptyset.$$

Не пересекающиеся по строкам столбцы не имеют транзисторов на пересечении с одними и теми же строками, назовем их строчно совместимыми.

Если никаких ограничений на тип свертки не накладывается (как в случае свертки ПЛМ), то строчно совместимые столбцы образуют свертываемую пару, т. е. могут быть свернуты и реализованы в одном столбце. В нашем же случае пара столбцов, соответствующих одной и той же входной переменной в прямом и инверсном виде, в любом случае считается несовместимой в силу того, что эти сигналы должны подводиться с одной стороны. Кроме того, наряду с непересечением по строкам необходимо также обеспечить и неперемешивание строк, принадлежащих разным секциям матрицы B . Если первое ограничение учитывается достаточно просто, то второе требует введения следующих определений.

Два столбца c_k^B и c_l^B матрицы B не пересекаются по секциям, если $S(c_k^B) \cap S(c_l^B) = \emptyset$. Назовем не пересекающиеся по секциям столбцы секционно совместимыми. Требование совместимости по секциям является более сильным, чем требование совместимости по строкам: сек-

ционно совместимые столбцы всегда являются строчно совместимыми, обратное имеет место далеко не всегда. К примеру, для приведенной выше матрицы \mathbf{B} пара c_2^B, c_4^B столбцов является строчно совместимой, так как $R(c_2^B) \cap R(c_4^B) = \{r_{16}^B, r_{17}^B, r_{18}^B, r_{19}^B\} \cap \{r_{12}^B, r_{20}^B\} = \emptyset$, но не является секционно совместимой, так как $S(c_1^B) \cap S(c_6^B) = \{S_5^B, S_6^B\} \cap \{S_4^B, S_6^B\} = S_6^B \neq \emptyset$. Пара c_1^B, c_5^B является строчно и секционно совместимой, так как $R(c_1^B) \cap R(c_5^B) = S(c_1^B) \cap S(c_5^B) = \emptyset$.

Отсюда очевидно следующее утверждение.

Утверждение 1. Секционно совместимые столбцы секционированной булевой матрицы \mathbf{B} образуют свертываемую пару.

Условие совместимости столбцов по секциям является достаточным, но не необходимым условием их свертываемости.

Назовем столбцы c_k^B и c_l^B матрицы \mathbf{B} секционно квазисовместимыми, если $|S(c_k^B) \cap S(c_l^B)| = 1$, т. е. они пересекаются только по одной секции. К примеру, для приведенной выше матрицы \mathbf{B} столбцы c_1^B, c_{11}^B являются секционно квазисовместимыми, так как $|S(c_1^B) \cap S(c_{11}^B)| = |\{S_4, S_6\} \cap \{S_1, S_2, S_6\}| = |S_6| = 1$, но не являются строчно совместимыми, так как $R(c_1^B) \cap R(c_{11}^B) = \{r_{12}^B, r_{21}^B\} \cap \{r_1^B, r_2^B, r_4^B, r_7^B, r_{19}^B, r_{21}^B\} \neq \emptyset$. Пара c_2^B, c_4^B является строчно совместимой и секционно квазисовместимой, так как $R(c_2^B) \cap R(c_4^B) = \emptyset$ и $|S(c_2^B) \cap S(c_4^B)| = |S_6^B| = 1$.

Утверждение 2. Секционно квазисовместимые столбцы секционированной булевой матрицы \mathbf{B} образуют свертываемую пару, если они строчно совместимы.

Далее будем называть столбцы, образующие свертываемую пару, совместимыми. Если столбцы c_k^B и c_l^B секционно квазисовместимы, пересекаясь по q -й секции, т. е. если $S(c_k^B) \cap S(c_l^B) = S_q$, то эти столбцы будем называть секционно q -квазисовместимыми и соответственно q -совместимыми (если они образуют еще и свертываемую пару). В таких обозначениях секционно совместимые пары столбцов будем считать безусловно совместимыми, обозначая этот факт с помощью символа «*»: секционно *-квазисовместимые и соответственно *-совместимые столбцы. Например, упомянутые выше столбцы c_2^B, c_4^B матрицы \mathbf{B} являются секционно 6-квазисовместимыми и соответственно 6-совместимыми, так как они строчно совместимы. Столбцы c_1^B и c_{11}^B секционно 6-квазисовместимы, но несовместимы, так как они строчно несовместимы.

Из утверждений вытекает очевидный метод нахождения отношения совместимости T на множестве столбцов матрицы \mathbf{B} , основанный на поиске двух вспомогательных отношений: совместимости T_r по строкам и квазисовместимости T_s по секциям (включая совместимость по секциям). Эти отношения задаются булевыми матрицами T_r, T_s и T , строкам и столбцам которых соответствуют столбцы матрицы \mathbf{B} . Наличие 1 на пересечении i -й строки и j -го столбца матриц говорит о том, что столбцы c_i^B и c_j^B находятся в соответствующем отношении. Отношения T_s, T_r и T на множестве столбцов матрицы \mathbf{B} обладают свойствами симметричности и иррефлексивности, следовательно, соответствующие им матрицы симметричны относительно главной диагонали и все элементы, расположенные на главной диагонали, имеют значение 0. Для нашего примера отношения совместимости по строкам и по секциям задаются следующими булевыми матрицами:

$$\begin{matrix}
 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\
 T_r = & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\
 T_s = & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{matrix}$$

Матрица T порождается матрицами T_s и T_r – ее компоненты получаются путем покомпонентной конъюнкции соответствующих компонент этих матриц.

Для дальнейшего изложения интересно знать не только то, что некоторые столбцы матрицы \mathbf{B} находятся в отношении совместимости, но и конкретные значения q , сопровождающие данные отношения. Эти значения будем задавать с помощью матриц \mathbf{T}_s^* и \mathbf{T}^* отношений q -квазисовместимости по секциям и q -совместимости. Матрицы \mathbf{T}_s^* и \mathbf{T}^* отличаются от матриц \mathbf{T}_s и \mathbf{T} тем, что значения 1 компонент $t_{si}^j \in \mathbf{T}_s$ и $t_i^j \in \mathbf{T}$ заменены значениями u , если столбцы c_j^B и c_i^B секционно u -квазисовместимы и соответственно u -совместимы. Матрица \mathbf{T}^* q -совместимости столбцов матрицы \mathbf{B} является производной от матриц \mathbf{T}_s^* и \mathbf{T} или, в конечном счете, от матриц \mathbf{T}_s^* и \mathbf{T}_r .

Для нашего случая матрицы \mathbf{T}_s^* и \mathbf{T}^* имеют следующий вид:

$$\begin{matrix}
 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \\
 \mathbf{T}_s^* = & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & * & * & 4 & * & 6 & 4 & 0 & 0 & c_1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 0 & * & * & * & * & 6 & * & 0 & 0 & c_2 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \\
 & 0 & 6 & 0 & 0 & * & 0 & * & * & 4 & * & 6 & 4 & 0 & 0 & c_4 \\
 & 5 & 5 & 5 & * & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & 5 & 5 & c_5 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 4 & * & 6 & 4 & 0 & 0 & c_6 \\
 & * & * & 3 & * & * & * & 0 & 0 & * & 3 & * & * & 3 & * & c_7 ; \\
 & * & * & 3 & * & * & * & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & * & 0 & 1 & c_8 \\
 & 4 & * & 0 & 4 & * & 4 & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_9 \\
 & * & * & 3 & * & * & * & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & 1 & c_{10} \\
 & 6 & 6 & 0 & 6 & * & 6 & * & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & c_{11} \\
 & 4 & * & 0 & 4 & * & 4 & * & * & 0 & * & 2 & 0 & 0 & 0 & c_{12} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{13} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & * & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14}
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \\
 \mathbf{T}^* = & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & * & * & 4 & * & 0 & 4 & 0 & 0 & c_1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 & * & 0 & 0 & c_2 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \\
 & 0 & 6 & 0 & 0 & * & 0 & * & * & 4 & * & 6 & 4 & 0 & 0 & c_4 \\
 & 5 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & c_5 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 4 & * & 0 & 4 & 0 & 0 & c_6 \\
 & * & * & 3 & * & * & * & 0 & 0 & * & 3 & * & * & 0 & * & c_7 . \\
 & * & * & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 1 & c_8 \\
 & 4 & * & 0 & 4 & * & 4 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_9 \\
 & * & * & 0 & * & * & * & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 1 & c_{10} \\
 & 0 & 0 & 0 & 6 & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} \\
 & 4 & * & 0 & 4 & * & 4 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{12} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{13} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c_{14}
 \end{matrix}$$

Следует заметить, что, вообще говоря, при проверке на совместимость пары секционно q -квазисовместимых столбцов достаточно проверить их совместимость по строкам не на всем множестве $R(\mathbf{B})$ строк, а только на его подмножестве, входящем в S_q .

3. Двудольная свертка матричных структур

Двудольная свертка является частным случаем простой свертки, в которой разрывы всех вертикальных шин при столбцовой свертке находятся на одном уровне (рис. 2). Это позволяет при столбцовой свертке говорить о верхней и нижней областях матрицы \mathbf{B} , которые содержат сегменты свернутых столбцов, находящиеся выше и ниже линии разрывов.

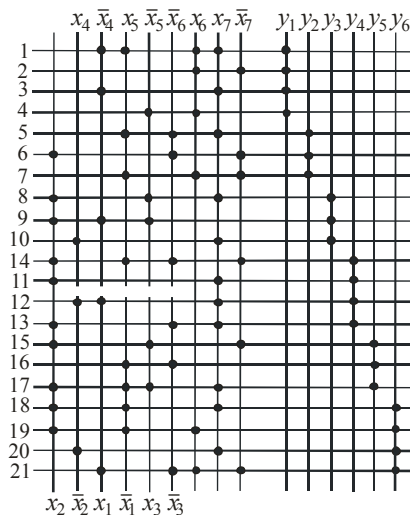


Рис. 2. Свернутая РМОП-структура

Обозначим через C^u множество столбцов матричной структуры, принадлежащих верхней области свернутой матрицы, и через C^l множество столбцов, принадлежащих нижней области. Любые два столбца, взятые по одному из верхней и нижней областей свернутой двудольно матрицы, не пересекаются, так как все разрывы расположены между одними и теми же двумя строками. Отсюда вытекает необходимое и достаточное условие, чтобы пара равномоощных множеств C^u, C^l столбцов порождала двудольную свертку: любой столбец из C^u должен быть построчно совместим с любым столбцом из C^l (и наоборот) [5, 6]. Пара равномоощных множеств столбцов $C^u, C^l \subseteq C(\mathbf{B})$, удовлетворяющая этому условию, называется *двудольно свертываемой парой множеств столбцов матричной структуры*. Мощность t этих множеств определяет размер двудольно свертываемой пары множеств и соответственно размер свернутой матричной структуры.

Двудольно свертываемая пара множеств столбцов C^u, C^l задает трехблочное разбиение на множестве $R(\mathbf{B})$ строк матрицы \mathbf{B} : строки из $R(C^u)$, строки из $R(C^l)$ и остальные строки из $R(\mathbf{B}) \setminus (R(C^u) \cup R(C^l))$. Строки из $R(C^u)$ будут расположены выше строк из $R(C^l)$ в свернутой матрице \mathbf{B} . Отсюда ясно, что пара множеств столбцов C^u, C^l однозначно определяет вид свернутой матричной структуры.

Таким образом, двудольная свертка двухмерной матричной структуры без ограничений на порядок следования строк сводится к поиску двудольно свертываемой пары множеств ее столбцов наибольшей мощности.

4. Двудольная свертка матричных РМОП-структур

Понятие двудольно свертываемой пары множеств столбцов C^u, C^l в некотором смысле является расширением понятия совместимой (свертываемой) пары столбцов c_k^B и c_l^B . Обе эти пары задают трехблочные разбиения на множестве $R(\mathbf{B})$ строк матрицы \mathbf{B} : в случае c_k^B, c_l^B – строки из $R(c_k^B)$, $R(c_l^B)$ и $R(\mathbf{B}) \setminus (R(c_k^B) \cup R(c_l^B))$, в случае C^u, C^l – строки из $R(C^u)$, $R(C^l)$ и $R(\mathbf{B}) \setminus (R(C^u) \cup R(C^l))$.

Введенные выше отношения на множестве столбцов матрицы \mathbf{B} (совместимости по строкам и q -квазисовместимости по секциям) могут быть обобщены для случая подмножеств C_i столбцов матрицы \mathbf{B} . В этом случае естественно считать, что $R(C_i)$ (и $S(C_i)$) включает в себя все те строки из $R(\mathbf{B})$, которые входят хотя бы в одно из множеств $R(c_k^B)$ ($S(c_k^B)$), $c_k^B \in C_i$. Например, подмножества $C^u = \{c_1^B, c_2^B, c_4^B, c_5^B, c_6^B\}$ и $C^l = \{c_7^B, c_8^B, c_9^B, c_{10}^B, c_{12}^B\}$ столбцов порождают $R(C^u) = \{r_{12}^B, r_{13}^B, r_{15}^B, r_{16}^B, r_{17}^B, r_{18}^B, r_{19}^B, r_{20}^B, r_{21}^B\}$, $S(C^u) = \{S_4, S_5, S_6\}$, $R(C^l) = \{r_1^B, r_3^B, r_4^B, r_5^B, r_6^B, r_7^B, r_8^B, r_9^B, r_{10}^B, r_{14}^B\}$ и $S(C^l) = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Пара C^u, C^l является совместимой по строкам (так как $R(C^u) \cap R(C^l) = \emptyset$), 4-квазисовместимой по секциям (так как $S(C^u) \cap S(C^l) = \{S_4\}$) и соответственно 4-совместимой.

Утверждения 1 и 2, касающиеся установления совместимости пары столбцов, могут быть обобщены на случай подмножеств столбцов. Справедливо следующее утверждение, дающее необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять пара подмножеств столбцов, порождающая двудольную свертку матричной РМОП-структуры.

Утверждение 3. *Пара равномоощных множеств столбцов $C^u, C^l \subseteq C(\mathbf{B})$ является двудольно свертываемой парой множеств столбцов РМОП-структуры, если и только если существует такое q ($q = *$ или $1 \leq q \leq p$, где p – число секций матрицы \mathbf{B}), что эта пара является q -совместимой.*

К примеру, упомянутая 4-совместимая пара $C^u = \{c_1^B, c_2^B, c_4^B, c_5^B, c_6^B\}$ и $C^l = \{c_7^B, c_8^B, c_9^B, c_{10}^B, c_{12}^B\}$ является двудольно свертываемой парой множеств, порождающей приведенную на рис. 2 свернутую РМОП-структуру.

5. Сведение задачи двудольной свертки к задаче поиска пар единичных миноров булевых матриц

Необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять два подмножества столбцов секционированной булевой матрицы \mathbf{B} , если они порождают двудольную свертку матричной РМОП-структуры, можно переформулировать (аналогично тому, как это сделано для матричных структур без ограничений [4]) в терминах отношений между столбцами, входящими в эти подмножества.

Утверждение 4. Пара равноможных множеств столбцов $C^u, C^l \subseteq C(\mathbf{B})$ является двудольно свертываемой парой множеств столбцов РМОП-структуры, если и только если найдется такое $0 \leq q \leq p$, что любые два столбца, взятые по одному из множеств C^u и C^l , либо $*$ -совместимы, либо q -совместимы.

Будем обозначать минор булевой матрицы \mathbf{B} парой (C_k, R_k) подмножеств $C_k \subseteq C(\mathbf{B})$ и $R_k \subseteq R(\mathbf{B})$ его столбцов и строк. Если все элементы минора равны 1, будем называть его единичным. Для случая матричных структур без ограничений двудольно свертываемая пара C^u, C^l столбцов согласно утверждению 4 задается единичным минором (C^u, R^l) матрицы совместимости столбцов исходной булевой матрицы \mathbf{B} . Столбцы матричной структуры, соответствующие столбцам единичного минора (C^u, R^l) , принадлежат при ее свертке верхней области, а столбцы, соответствующие строкам единичного минора, – нижней. В работах [5, 6] показано, что задача двудольной свертки матричной структуры сводится таким образом к поиску наибольшего (с наибольшим числом столбцов и строк) квадратного единичного минора матрицы совместимости столбцов матрицы \mathbf{B} .

В случае двудольной свертки РМОП-структуры равноможные множества $C^u, C^l \subseteq C(\mathbf{B})$ столбцов образуют двудольно свертываемую пару, если найдется такое $0 \leq q \leq p$, что любые два столбца, взятые по одному из множеств C^u и C^l , либо $*$ -совместимы, либо q -совместимы. Следовательно, размер наибольшего квадратного единичного минора матрицы \mathbf{T}_r совместимости столбцов матрицы \mathbf{B} представляет лишь верхнюю оценку числа свертываемых двудольно столбцов.

Утверждение 5. Пара равноможных множеств столбцов $C^u, C^l \subseteq C(\mathbf{B})$ является двудольно свертываемой парой множеств столбцов РМОП-структуры, если и только если найдется такое $0 \leq q \leq p$, что все элементы порождаемого этой парой минора C^u, R^l матрицы \mathbf{T}^* q -совместимости имеют значение «*» или q .

Например, анализ матрицы \mathbf{T}^* q -совместимости показывает, что единичный минор $\{c_9^{T_r}, c_{10}^{T_r}, c_{12}^{T_r}\}, \{r_4^{T_r}, r_5^{T_r}, r_6^{T_r}\}$ матрицы \mathbf{T}_r порождает двудольно свертываемую пару $\{c_9^B, c_{10}^B, c_{12}^B\}, \{c_4^B, c_5^B, c_6^B\}$ множеств столбцов, а единичный минор $\{c_9^{T_r}, c_{11}^{T_r}, c_{12}^{T_r}\}, \{r_4^{T_r}, r_5^{T_r}, r_7^{T_r}\}$ – нет.

Задача двудольной свертки состоит в поиске двудольно свертываемой пары множеств наибольшей мощности. Эта задача может быть сведена к хорошо изученной задаче поиска наибольшего единичного минора булевой матрицы [7]. Построим для заданного $0 < v \leq p$ булеву матрицу \mathbf{T}_v v -совместимости на множестве столбцов матрицы \mathbf{B} следующим образом: компонента $t_{vi}^j \in \mathbf{T}_v$ равна 1 в том случае, когда соответствующая компонента $t_i^j \in \mathbf{T}^*$ имеет значение v или «*».

Утверждение 6. Любой квадратный единичный минор матрицы \mathbf{T}_v задает двудольно свертываемую пару множеств столбцов секционированной матрицы \mathbf{B} , порождающую двудольно свернутую РМОП-структуру, разрывы в которой располагаются между некоторой парой строк v -й секции.

6. Метод оптимальной двудольной свертки РМОП-структуры

За основной критерий оптимальности при свертке РМОП-структуры принимается минимум площади кристалла, измеряемой произведением числа столбцов на число строк. При столбцовой двудольной свертке оптимальное решение согласно этому критерию обеспечивается нахождением двудольно свертываемой пары множеств столбцов наибольшей мощности. Показано, что такая пара множеств порождается квадратным единичным минором одной из матриц \mathbf{T}_q ($0 \leq q \leq p$). Таким образом, для нахождения оптимальной двудольной свертки необходимо найти наибольшие единичные миноры для всех матриц \mathbf{T}_q ($0 \leq q \leq p$) и выбрать среди них наибольший. Отсюда метод поиска двудольной свертки матричной РМОП-структуры наибольшего размера состоит из следующих шагов:

1) построение матриц совместимости \mathbf{T}_r по строкам и q -квазисовместимости \mathbf{T}_s^* по секциям на основе матриц \mathbf{B} и \mathbf{B}_s , задающих РМОП-структуру;

2) построение по матрицам \mathbf{T}_r и \mathbf{T}_s^* матрицы \mathbf{T}^* q -совместимости столбцов матрицы \mathbf{B} .

Затем для каждого $1 \leq v \leq p$ последовательно выполняются шаги:

3) построение по матрице \mathbf{T}^* булевой матрицы \mathbf{T}_v v -совместимости;

4) поиск наибольшего единичного минора булевой матрицы \mathbf{T}_v , и сохранение его, если он имеет больший размер, чем найденные ранее.

При выполнении шагов 3–4 метода целесообразно использовать предложенные в работе [6] методы сокращения перебора при поиске наибольшего единичного минора. В их основе лежит следующее утверждение [5, 6], дающее необходимое условие существования двудольной свертки размера m : в булевой матрице может существовать квадратный единичный минор размера m , если она имеет не менее $2m$ столбцов с весом, большим или равным m . Здесь под весом столбца понимается число его единичных компонентов.

При рассмотрении первой булевой матрицы T_1 нижняя граница размера единичного минора еще не известна. Соответственно при поиске единичного минора наибольшего размера из булевой матрицы T_1 можно исключить только столбцы (и строки), имеющие вес 0, которые не войдут ни в один единичный минор, а также столбцы (и строки), имеющие вес 1, так как они могут войти только в минор размера 1, поиск которого тривиален. В нашем случае веса столбцов матрицы T_1 образуют вектор 3 5 0 4 7 3 9 7 3 7 2 5 0 3 (получаемый подсчетом сумм чисел компонентов, имеющих значения «*» и 1, для каждого столбца матрицы T^*). Матрица T_1 после исключения столбцов c_3 и c_{13} принимает вид

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 c_1 & c_2 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{14} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & c_2 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c_4 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & c_5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c_6 \\
 \mathbf{T_1} = & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & c_7 \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & c_8 \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_9 \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & c_{10} \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c_{12} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c_{14} \\
 & 3 & 5 & 4 & 7 & 3 & 9 & 7 & 3 & 7 & 2 & 5 & 3 & \text{вес}
 \end{array}$$

Видно, что матрица T_1 включает в себя семь столбцов веса не менее 4, соответственно верхняя граница размера возможной двудольной свертки равна 3. Отсюда значение оценки сверху размеров наибольших единичных миноров матрицы T_1 равно 3. Один из миноров (на матрице он выделен жирным шрифтом) задается парой $\{c_1^{T_1}, c_2^{T_1}, c_5^{T_1}\}, \{r_7^{T_1}, r_8^{T_1}, r_{10}^{T_1}\}$.

Очевидно, что рассмотрение матрицы T_2 можно опустить, так как ее компоненты будут не больше соответствующих компонентов матрицы T_1 . Можно опустить также и рассмотрение матрицы T_3 , так как она имеет всего семь столбцов веса не менее 4 (вектор весов столбцов 3 5 2 4 8 3 11 7 3 7 2 5 0 2), а значит, в ней нет минора размера 4. Матрица T_4 включает в себя 10 столбцов веса не менее 5 (вектор весов столбцов 5 5 0 6 7 5 9 6 6 6 2 8 0 2), соответственно ее рассмотрение целесообразно, так как это может улучшить найденное решение.

Ниже приведена матрица T_4 , из которой исключены столбцы и строки, имеющие вес не более 3 (двудольная свертка размера 3 уже найдена), которые заведомо не войдут в искомый единичный минор:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 c_1 & c_2 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{12} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & c_2 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & c_4 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & c_5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & c_6 \\
 \mathbf{T_4} = & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{c}_7 \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{c}_8 \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c}_9 \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{c}_{10} \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{c}_{12} \\
 & 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 9 & 6 & 6 & 6 & 8 & \text{вес}
 \end{array}$$

Матрица T_4 имеет квадратный единичный минор размера 5: $\{c_1^{T_4}, c_2^{T_4}, c_4^{T_4}, c_5^{T_4}, c_6^{T_4}\}$, $\{r_7^{T_4}, r_8^{T_4}, r_9^{T_4}, r_{10}^{T_4}, r_{12}^{T_4}\}$, выделенный жирным шрифтом.

Рассмотрение матриц T_5 и T_6 (векторы весов их столбцов 4 5 0 4 8 3 9 6 3 6 2 5 0 1 и 3 6 0 6 7 3 9 6 3 6 3 5 0 1) улучшить найденное решение не могут. Таким образом, наибольшей двудольно свертываемой парой столбцов является $\{c_1^B, c_2^B, c_4^B, c_5^B, c_6^B\}$, $\{c_7^B, c_8^B, c_9^B, c_{10}^B, c_{12}^B\}$. Соответствующая ей свернутая матричная РМОП-структура приведена на рис. 2.

Очевидно, что предложенный метод допускает дальнейшее уменьшение вычислительной сложности при поиске оптимального решения за счет сокращения числа процедур поиска наибольших единичных миноров булевых матриц. Этого можно достичь, если рассматривать булевы матрицы T_v ($1 \leq v \leq p$) в порядке убывания оценок сверху размеров наибольших единичных миноров: строить по матрице T^* ту булеву матрицу T_v ($1 \leq v \leq p$), которая дает большее значение m этой оценки, а при равенстве этих величин – ту, которая содержит наибольшее число столбцов веса, не меньшего чем m .

Найдем (по матрице T^*) для нашего примера векторы весов столбцов матриц T_v ($1 \leq v \leq 6$), сопровождаемые оценкой m сверху размеров наибольших единичных миноров и числом l столбцов веса, не меньшего чем m :

$$\begin{aligned} T_1: & 3\ 5\ 0\ 4\ 7\ 3\ 9\ 7\ 3\ 7\ 2\ 5\ 0\ 3, \quad m=3, l=11; \\ T_2: & 3\ 5\ 0\ 4\ 7\ 3\ 9\ 6\ 3\ 6\ 2\ 5\ 0\ 1, \quad m=3, l=10; \\ T_3: & 3\ 5\ 2\ 4\ 8\ 3\ 11\ 7\ 3\ 7\ 2\ 5\ 0\ 2, \quad m=3, l=10; \\ T_4: & 5\ 5\ 0\ 6\ 7\ 5\ 9\ 6\ 6\ 6\ 2\ 8\ 0\ 2, \quad m=5, l=10; \\ T_5: & 4\ 5\ 0\ 4\ 8\ 3\ 9\ 6\ 3\ 6\ 2\ 5\ 0\ 1, \quad m=4, l=8; \\ T_6: & 3\ 6\ 0\ 6\ 7\ 3\ 9\ 6\ 3\ 6\ 3\ 5\ 0\ 1, \quad m=3, l=11. \end{aligned}$$

На первом шаге выбирается $v=4$, строится матрица T_4 , для которой верхняя оценка m размера наибольшего единичного минора имеет максимальное значение. Наибольший квадратный единичный минор этой матрицы имеет размер 5, совпадающий с верхней оценкой. Соответственно этот минор порождает наибольшую двудольно свертываемую пару столбцов. Остальные матрицы T_v для этого примера рассматривать не имеет смысла: ни одна из них оценку $m=5$ улучшить не может.

Заключение

Приведена формальная постановка задачи двудольной свертки РМОП-структур, удовлетворяющей условиям ее физической реализации на кристалле СБИС. Сформулированы условия, которым удовлетворяют топологически реализуемые на РМОП-структуре свертываемая пара столбцов и свертываемая пара множеств столбцов. Задача поиска двудольно свертываемой пары множеств столбцов наибольшей мощности сведена к задаче поиска наибольшего единичного минора булевой матрицы совместимости на множестве столбцов РМОП-структуры.

Список литературы

1. Ульман, Дж. Вычислительные аспекты СБИС / Дж. Ульман. – М.: Радио и связь, 1990. – 480 с.
2. Бибило, П.Н. Кремниевая компиляция заказных СБИС / П.Н. Бибило. – Минск: Ин-т техн. кибернетики АН Беларуси, 1996. – 268 с.
3. DeMicheli, G. Multiple constrained folding of Programmable Logic Arrays: theory and applications / G. DeMicheli, A. Sangiovanni-Vincentelli // IEEE Trans. on Computer-Aided Design. – 1983. – Vol. CAD-2. – № 3. – P. 151–167.
4. Egan, J.R. Bipartite folding and partitioning of a PLA / J.R. Egan, C.Y. Liu // IEEE Trans. on Computer-Aided Design. – 1984. – Vol. CAD-3. – № 3. – P. 191–199.
5. Liu, Chun-Yeh. An efficient algorithm for bipartite PLA folding / Chun-Yeh Liu, K. Saluja Kewal // IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – 1993. – Vol. 12. – № 12. – P. 1839–1847.

6. Cheremisinova, L.D. An algorithm for optimal bipartite PLA folding / L.D. Cheremisinova // Information Theories & Applications. – 2003. – Vol. 10. – № 1. – P. 106–112.

7. Синтез асинхронных автоматов на ЭВМ / под общ. ред. А.Д. Закревского. – Минск: Наука и техника, 1975. – 184 с.

Поступила 29.11.07

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
email: cld@newman.bas-net.by*

L.D. Cheremisinova

**TOPOLOGICAL OPTIMIZATION OF REGULAR MOS-STRUCTURES
BY MEANS OF BIPARTITE FOLDING**

The problem under consideration is to reduce the area of the layout of two-dimensional matrix RMOS-structures of control logic of custom VLSI during the topological design. The bipartite folding of regular RMOS-structures is used as the most suitable for structures of this type. Some restrictions imposed on the folding mode are formulated taking into account the peculiarities of structures consisting of MOS-transistors. An efficient method is presented to find an optimal or near optimal solution of the task of bipartite column folding of regular RMOS-structures.