

УДК 539.3

О.Л. Швед

ДВОЙСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА

Показывается корректность определения тензора вязких напряжений, который введен допустимым приближением. Находится представление процесса в двух пространствах напряжений, устраняющее влияние упругих поворотов и позволяющее однозначно построить поверхность текучести для упруговязкопластической модели материала.

Введение

Двойственным описанием процесса будем называть описание в терминах отсчетной и актуальной конфигураций [1–4], при этом используются заданные в них тензорные величины. Тензорная величина считается заданной в отсчетной (актуальной) конфигурации, если она инвариантна относительно жестких движений, наложенных на актуальную (отсчетную) конфигурацию. В упругости уравнение состояния (определяющее уравнение) задается в виде упругого закона [3]. В пластичности ситуация значительно усложняется ввиду изменения отсчетной конфигурации в следующем смысле. При обобщении модели упругой среды на модель упруго-пластической среды упругий закон преобразуется в обобщенный упругий закон, в котором общие мера деформации и поворот заменяются на определяемые не в рамках кинематики меру упругой деформации и упругий поворот [5]. Естественная гипотеза о возможной полной разгрузке предполагает существование в некоторых случаях разгрузочной конфигурации, которая является отсчетной для обобщенного упругого закона. Полная разгрузка элемента тела предполагает выполнение следующего условия: мера упругих искажений и упругий поворот совпадают с единичным тензором. Если все тело деформируется как один элемент, то разгрузочная конфигурация всегда существует. Поскольку пластическая деформация сопровождается появлением анизотропии среды, разгрузочная конфигурация в указанном случае определяется однозначно. В условиях изотропии отсчетная конфигурация определена с точностью до жесткого движения.

Уравнение состояния геометрически нелинейной, упругой среды [3] последовательно обобщается на определяющие уравнения упругопластической и упруговязкопластической сред [6–11]. Особенность построения модели заключается в максимальном использовании информации об упругих свойствах материала в упругости при обобщении на пластичность. В неупругих моделях среды используется поверхность текучести, которая определяется в пространстве напряжений Коши. В нелинейной модели упругопластичности поверхность текучести при разгрузке зависит от упругого поворота, причем одному значению тензора напряжений соответствует множество значений меры искажений и поворота. Для однозначного определения поверхности вводится второе пространство напряжений, в котором поверхность текучести фиксируется при разгрузке. Кроме того, перенос экспериментальных данных с базовых нагружений растяжения и сжатия (частных случаев лучевых нагружений, происходящих без упругого поворота) на общий случай нагружения может быть однозначно реализован только при наличии второго пространства, которое порождает тензор, заданный в отсчетной (разгрузочной) конфигурации. Для этого подходит тензор, полученный ортогональным преобразованием тензора напряжений Коши [10].

Цель настоящей работы – показать, что тензор вязких напряжений, введенный в [9, 11], позволяет сохранить это представление в удобном виде для упруговязкопластической среды. Кроме того, требуют обоснования несколько утверждений относительно возможности замены, позволившей выполнить указанное обобщение, критериального девиатора тензором деформации вектора скорости. Последний термин введен в [2, с. 841], в [3, с. 39] появляется выражение

«тензор деформации скорости». В линейной теории тензор деформации только один – линейный, поэтому там в данном случае употребляется термин «тензор скорости деформации», который имеет иной смысл в нелинейной теории, где и скорость тензора понимается неоднозначно.

1. Оценки собственных значений матричного оператора

Будем использовать язык прямого тензорного исчисления [3]. Удобно также ввести следующие обозначения для тензора: например, для тензора деформации вектора скорости \mathbf{D} норма тензора $\|\mathbf{D}\| = \sqrt{\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}$ (две точки означают двойное скалярное произведение), нормированный тензор $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \|\mathbf{D}\|^{-1}$ ($\mathbf{D} \neq 0$). Выполняется $\bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \|\mathbf{D}\|^{-1} \cdot \mathbf{D} \|\mathbf{D}\|^{-1} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \|\mathbf{D}\|^{-2} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D})^{-1} = 1$.

Обобщенный упругий закон (определяющее уравнение для тензора упругих напряжений) принимается в виде

$$\mathbf{T}_e = 2L_3^{-1}(\varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{F} + \varphi_2 \mathbf{F}^2) + L_3^{-1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + \sum_{j=1}^{21} \delta_j \mathbf{T}_j. \quad (1)$$

Скаляры $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ есть функции инвариантов упругой меры Фингера \mathbf{F} , L_3 – третий инвариант упругой меры искажений \mathbf{V} ($\mathbf{V}^2 = \mathbf{F}$), \mathbf{E} – единичный тензор. Выражения для тензоров \mathbf{T}_j получаются громоздкими и приведены в [10], поэтому здесь опускаются. Начальные значения параметров анизотропии $\delta_j = 0$ и тензора остаточных напряжений $\mathbf{B} = 0$. В условиях изотропии (1) переходит в изотропный пятиконстантный упругий закон Мурнагана

$$\mathbf{T}_e = 2L_3^{-1}(\varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{F} + \varphi_2 \mathbf{F}^2), \quad (2)$$

где тензор \mathbf{F} совпадает с общей мерой Фингера, а L_3 – с третьим инвариантом общей меры искажений. С использованием теоремы Гамильтона – Кэли соотношение (2) можно записать в форме квадратичной зависимости \mathbf{T}_e от \mathbf{V} . Фундаментальная зависимость (2) обладает значительной общностью представления для изотропной среды [3], а соотношение (1) является достаточно общим ее обобщением на анизотропную среду. Второе и третье слагаемые в (1) порождают анизотропные структуры первого и второго порядков.

В работе [8] установлено, что в пространстве девiators симметричных тензоров второго ранга существует специальный ортонормированный тензорный базис \mathbf{N}_i , $i = \overline{1, 5}$ ($\bar{\mathbf{N}}_i = \mathbf{N}_i$).

Пусть $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – исходный ортонормированный триэдр; $\mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3)$, $\mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(-\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2)$, $\mathbf{W}_3 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1)$, $\mathbf{W}_4 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_1)$, $\mathbf{W}_5 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_2)$ ($\mathbf{W}_k \cdot \mathbf{W}_j = 0 (k \neq j)$, $\mathbf{W}_k \cdot \mathbf{W}_k = 1$). Любой девiator, например $\mathbf{N} = \mathbf{N}_i$, симметричного тензора можно записать в обычном компонентном и в «векторном» представлениях:

$$\mathbf{N} = n_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + n_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 - (n_1 + n_2) \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 + n_3 (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1) + n_4 (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_1) + n_5 (\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_2);$$

$$\mathbf{N} = w_1 \mathbf{W}_1 + w_2 \mathbf{W}_2 + w_3 \mathbf{W}_3 + w_4 \mathbf{W}_4 + w_5 \mathbf{W}_5.$$

Девiators \mathbf{N}_i при указанной векторной интерпретации тензора являются собственными векторами симметричного матричного оператора с собственными значениями λ_i . При этом выполняется $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{N}_i) = \lambda_i \mathbf{N}_i$, где \mathbf{M} – заданный девiator, который представляется анало-

гично \mathbf{N} при заменах n_i на m_i и w_i на v_i . Матричные формы записи $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{N})$ выглядят следующим образом:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + 2k_2 & \sqrt{3}k_2 & k_3 & k_6 & k_8 \\ \sqrt{3}k_2 & -k_1 + 2k_2 & k_4 & k_7 & k_9 \\ k_3 & k_4 & k_5 & k_{12} & k_{13} \\ k_6 & k_7 & k_{12} & k_{10} & k_{14} \\ k_8 & k_9 & k_{13} & k_{14} & k_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}.$$

При нахождении оценок, показывающих, что два больших собственных значения не равны, с диагонали первой матрицы при получении второй была удалена величина a_{11} . Теперь для нахождения оценок собственных значений ее следует учитывать.

Используем соотношения работы [8], полученные с помощью символьных вычислений системы Mathcad. Имеем $k_i = O_i$, $O_i = o(\|dev\mathbf{F}\|)$ ($i = 1, 2$); $k_5 = 4\varphi_2 L_3^{-1} + O_3$, $k_{10} = 4\varphi_2 L_3^{-1} + O_4$, $k_{11} = 4\varphi_2 L_3^{-1} + O_5$, $a_{11} = 4\varphi_2 L_3^{-1} + O_6$; $O_j = o(\|dev\mathbf{F}\|, |I_1 - 3|)$ ($j = 3, 4, 5, 6$), где $dev\mathbf{F}$ – девиатор упругой меры Фингера, I_1 – первый инвариант, L_3 – третий инвариант меры \mathbf{V} ($\mathbf{V}^2 = \mathbf{F}$).

Следует отметить важную роль квадратичного члена $2L_3^{-1}\varphi_2\mathbf{F}^2$ в правой части (2). Квазилинейный (линейный по тензору) закон оказывается недостаточно общим и непригодным для обобщения модели нелинейной упругой среды на необратимые деформации. Подобные упрощения, тем не менее, являются распространенным приемом [5]. Приближенное соотношение для коэффициента φ_2 имеет вид

$$\varphi_2 = 2^{-1}(\mu + \nu_3) + 4^{-1}3(\nu_2 + 2\nu_3)(I_1 - 3), \tag{3}$$

где μ – параметр Ляме второго порядка, а ν_2, ν_3 – третьего. Величины $\|dev\mathbf{F}\|, I_1 - 3, L_3 - 1$ являются пренебрежимо малыми числами по сравнению с параметрами Ляме. Собственные значения в первом приближении будут $\lambda_i = k_i - a_{11}$, $\lambda_3 = k_5 - a_{11}$, $\lambda_4 = k_{10} - a_{11}$, $\lambda_5 = k_{11} - a_{11}$, поэтому получаем

$$\lambda_i = -4\varphi_2 L_3^{-1} + o(\|dev\mathbf{F}\|, |I_1 - 3|)(i = 1, 2). \tag{4}$$

Согласно данным о параметрах Ляме [3] для сталей, сплавов и металлов значение $-(\mu + \nu_3)\mu^{-1}$ находится соответственно в интервалах $(0, 4; 1, 5)$, $(0, 2; 2, 1)$ и $(0, 7; 7, 5)$ за одним исключением. Значение $-(\mu + \nu_3)\mu^{-1}$ для молибдена неожиданно оказывается $-0,15 < 0$, если в [3] не допущена возможная опечатка. Следовательно, дальнейшие рассуждения будут относиться только к материалам, для которых выполняется условие

$$-(\mu + \nu_3)\mu^{-1} > \delta > 0, \tag{5}$$

где выбор постоянной δ определится при вычислительных экспериментах. Приближенные оценки (3), (4) показывают, что для сталей, сплавов и металлов [3] два больших собственных значения являются положительными действительными числами при условии (5).

2. Замена критериального девиатора на тензор деформации вектора скорости

В модели упругопластической среды введен критериальный девиатор (скорость изменения девиатора упругих напряжений, вычисленная по соотношениям нелинейной упругости [3]) $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$ [7, 8, 10]. В силу линейной зависимости \mathbf{Q} от компонент тензора \mathbf{D} имеет место равенство $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_i = \mathbf{D} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{N}_i)$, откуда следует $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_i = \lambda_i \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_i$. Предполагаем, что точка процесса в пространстве напряжений (т. е. значение тензора \mathbf{T}) находится на поверхности текучести. Критерий активного нагружения записывается в регулярной точке $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_1 > 0$, а в сингулярной точке $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_1 > 0$ и $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_2 > 0$, где $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ – девиаторы нормалей к регулярным участкам поверхности текучести. Выше было показано, что два больших собственных значения λ_i положительные. Значит, в формулировке критерия сложно вычисляемый девиатор \mathbf{Q} [10] можно для любых нагружений заменить на просто вычисляемый (в общем случае несоосный ему) тензор \mathbf{D} в регулярной и сингулярной точках соответственно:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_1 > 0; \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_1 > 0, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_2 > 0. \quad (6)$$

Перейдем к менее тривиальному вопросу о возможной замене при лучевом нагружении (которое будет рассматриваться дальше) девиатора \mathbf{Q} на тензор деформации вектора скорости в активном процессе в случае течения. В силу условия несжимаемости среды при течении тензор \mathbf{D} также будет девиатором.

Дадим определение лучевому нагружению. Введем неподвижную декартову систему координат a^1, a^2, a^3 в базисе $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Обозначим вектор-радиус места частицы в отсчетной конфигурации $\mathbf{r} = a^k \mathbf{i}_k$ (a^k – лагранжевы координаты частицы, размерность длины). Нагружение назовем лучевым, если, во-первых, вектор-радиус места частицы в актуальной конфигурации имеет вид $\mathbf{R} = xa^1 \mathbf{i}_1 + ya^2 \mathbf{i}_2 + za^3 \mathbf{i}_3$ и, во-вторых, имеет место $\mathbf{T} = \lambda \mathbf{T}_0$, где \mathbf{T} – тензор напряжений Коши, \mathbf{T}_0 – некоторый постоянный тензор. Изменение по времени t величин $x(t), y(t), z(t)$ должно удовлетворять второму условию в определении лучевого нагружения, и их начальные условия будут, естественно, $x(0) = y(0) = z(0) = 1$. Смысл безразмерных параметров x, y, z состоит в том, что они являются компонентами тензоров – общих мер искажений в векторном базисе $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ (относительные растяжения-сжатия по этим осям). Для лучевых нагружений (важного случая произвольного нагружения) существуют экспериментальные данные [12], которые надо учитывать.

Рассмотрим кинематические соотношения, которые имеют место при лучевом нагружении. Основной и взаимный векторные базисы будут следующими: $\mathbf{R}_1 = x \mathbf{i}_1, \mathbf{R}_2 = y \mathbf{i}_2, \mathbf{R}_3 = z \mathbf{i}_3$; $\mathbf{R}^1 = x^{-1} \mathbf{i}_1, \mathbf{R}^2 = y^{-1} \mathbf{i}_2, \mathbf{R}^3 = z^{-1} \mathbf{i}_3$. Согласно определению градиента общей деформации [3] $\overset{0}{\nabla} \mathbf{R} = \mathbf{r}^k \mathbf{R}_k = x \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + y \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3$, откуда согласно полярному разложению следует, что он совпадает с общими мерами искажений и общий поворот – единичный тензор (деформация происходит без поворота). Находим вектор скорости $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \dot{x} a^1 \mathbf{i}_1 + \dot{y} a^2 \mathbf{i}_2 + \dot{z} a^3 \mathbf{i}_3$ и градиент вектора скорости $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{R}^s \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial a^s} = \dot{x} x^{-1} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \dot{y} y^{-1} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \dot{z} z^{-1} \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3$. Последний совпадает с транспонированным градиентом вектора скорости $\nabla \mathbf{v}^T$ и, значит, с тензором деформации вектора скорости $\mathbf{D} = 2^{-1}(\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v})$. Тензор вихря $\mathbf{W} = 2^{-1}(\nabla \mathbf{v}^T - \nabla \mathbf{v})$ равен нулю.

Предполагаем, что среда является упругопластической. Следовательно, тензор напряжений Коши совпадает с тензором упругих напряжений Коши: $\mathbf{T} = \mathbf{T}_e$. Рассмотрим начало активного процесса. Девиаторы $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ будут соосны \mathbf{T}_e [8]. Имеет место соотношение (2). Упругая и общая меры Фингера совпадают. Из (2) следует, что векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ являются ортонормированными собственными векторами тензора \mathbf{T}_e . Тензоры деформации вектора скорости \mathbf{D} и упругих напряжений Коши \mathbf{T}_e будут соосными. При течении тензор \mathbf{D} является девиатором. Из представления упругого спина [10]

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} + (L_1 L_2 - L_3)^{-1} (ad_4(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1) + bd_5(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_1) + cd_6(\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_2)), \quad (7)$$

где $d_4 = \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{i}_2, d_5 = \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{i}_3, d_6 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{i}_3$, а скаляры a, b, c выражаются через компоненты тензора \mathbf{V} в базисе $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, следует, что он равен нулю, так как $d_4 = d_5 = d_6 = 0, \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Следовательно, деформация происходит без упругого поворота: $\mathbf{O} = \mathbf{E}$ – единичный тензор. Поэтому меры упругих искажений и меры упругих деформаций совпадают: $\mathbf{U} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{V}$, мера деформации Коши – Грина $\mathbf{G} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}$. Разгрузочная конфигурация (отсчетная для обобщенного упругого закона) всегда определена, так как все тело деформируется как один элемент. Как показано в [6], однозначно определяются скаляр β и материальная производная $\dot{\mathbf{V}}$ тензора \mathbf{V} , совпадающая с О-производной \mathbf{V} ($\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{V}} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Omega}$). В данном случае она будет соосна тензору упругих искажений. Следовательно, новое значение \mathbf{V} в конце шага по времени запишется как

$$\mathbf{V} = V_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + V_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + V_3 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \quad (8)$$

т. е. векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ являются собственными векторами меры упругих искажений.

Из определяющего уравнения для тензора остаточных напряжений $\overset{\Omega}{\mathbf{B}} = \beta \mathbf{N}_1$ [7], который с точностью до поворота перемещается по направлению действия пластической деформации в пространстве упругих напряжений \mathbf{N}_1 со скоростью $\beta = \left\| \overset{\Omega}{\mathbf{B}} \right\|$, следует, что он будет соосен девиатору \mathbf{N}_1 и, значит, \mathbf{B} представляется аналогично (8).

Из соотношений для \mathbf{T}_j [10] следует, что для значений $j = 7, 11, 15, 19, 20, 21$ выполняется $\mathbf{T}_j = \mathbf{0}$, так как $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{i}_m = 0$ при $n \neq m$. Далее, для $j = 4, 5, 6, 12, 13, 14, 16, 17, 18$ имеет место определяющее уравнение для параметров анизотропии $\dot{\delta}_j = K \operatorname{div} \overset{\Omega}{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{T}_j = K \beta \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{T}_j = 0$ (K – определяемая экспериментально постоянная) в силу структуры тензоров $\mathbf{T}_j \neq \mathbf{0}$, которые содержат слагаемые типа $\mathbf{i}_n \mathbf{i}_m + \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n$, ортогональные диадам $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_k$, образующим девиатор \mathbf{N}_1 . Соответствующие параметры анизотропии δ_j оказываются нулевыми в конце шага по времени. Следовательно, в выражении $\sum_{j=1}^{21} \delta_j \mathbf{T}_j$ возникают только шесть ненулевых слагаемых при значениях $j = 1, 2, 3, 8, 9, 10$, соответствующие δ_j будут ненулевыми, и им отвечают тензоры

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i &= L_3^{-1}(\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{i}_i - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{V} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \mathbf{T}_8 = L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V} \cdot ((\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{i}_2 - 1)\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{i}_1 - 1)\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2) \cdot \mathbf{V}, \\ \mathbf{T}_9 &= L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V} \cdot ((\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{i}_2 - 1)\mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 + (\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{i}_3 - 1)\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2) \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{T}_{10} = L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V} \cdot ((\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{i}_3 - 1)\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{i}_1 - 1)\mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3) \cdot \mathbf{V}, \end{aligned}$$

представление которых аналогично (8). Таким образом, третье слагаемое в (1) будет тензором, соосным \mathbf{V} . Следовательно, главные оси тензора \mathbf{T}_e не изменяются, и, как и ожидалось, он остается соосным тензору \mathbf{D} при лучевом нагружении.

Структура матричного оператора в работе [8], который определяет девиаторы $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$, сохраняется на следующем шаге, и, следовательно, они остаются соосны \mathbf{T}_e . Из определения девиатора \mathbf{Q} [10] также следует его соосность тензору \mathbf{T}_e . Все тензоры, участвующие в рассмотрении, могут быть представлены в тензорном базисе $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$, $\mathbf{E} = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3$ и, следовательно, в тензорном базисе $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{E}$. Поэтому для девиаторов можно записать: $\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2$, $\mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2$ ($\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = 0$). Поскольку выполняется $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_2 = \lambda_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_2$ ($\lambda_2 \neq 0$), то условие лучевого нагружения в регулярной точке $\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1$ равносильно равенству $\mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1$ и имеет место $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{N}_1$. Таким образом, выполняется $\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 = 1$, и это соотношение было использовано в качестве условия лучевого нагружения в [9].

Аналогично можно показать, что в сингулярной точке при течении лучевое нагружение реализуется только при условии $(\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1)^2 + (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2)^2 = 1$, использованном в [9].

Отметим, что в активном процессе при «скачке» выполняется соотношение (1) и параметры анизотропии не изменяются. Главные оси тензора \mathbf{T}_e сохраняются согласно второму условию в определении лучевого нагружения. Тензор меры упругих деформаций Фингера удовлетворяет уравнению в скоростях [3] $\overset{w}{\mathbf{F}} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, где $\overset{w}{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{W}$ – яуманнская производная \mathbf{F} , которая равна его материальной производной $\dot{\mathbf{F}}$. Следовательно, главные оси \mathbf{F} не изменяются и, значит, тензор упругих искажений по-прежнему удовлетворяет (8).

В случае отсутствия течения для упругого спина существует полезное соотношение, которое приведем здесь без доказательства:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} - (L_1 L_2 - L_3)^{-1}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} + L_1 L_3(\mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{D})). \quad (9)$$

Строгий вывод соотношений (7), (9) для упругого спина в нелинейной теории пластичности требует отдельного рассмотрения и будет представлен в следующей работе автора. Так как тензоры $\mathbf{F}, \mathbf{D}, \mathbf{V}$ коммутируют и $\mathbf{W} = 0$, то из соотношения (9) следует, что $\mathbf{\Omega} = 0$ при скачке. Следовательно, выполняется $\mathbf{O} = \mathbf{E}$, поскольку по определению спина $\dot{\mathbf{O}} = -\mathbf{O} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$. Значит, не изменяются главные оси тензоров \mathbf{U}, \mathbf{G} , которые связаны с \mathbf{V}, \mathbf{F} ортогональным преобразованием. Из выражения (1) следует, что главные оси тензора остаточных напряжений также не изменяются.

Таким образом, возможна замена критериального девиатора \mathbf{Q} на тензор \mathbf{D} для произвольного нагружения в критерии активного процесса (6), а также в условиях реализации при течении лучевого нагружения $\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2$ в регулярной и сингулярной точках поверхности текучести соответственно на

$$\mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2. \quad (10)$$

Тензор вязких напряжений введен в [9, 11] корректно, т. е. в соответствии с предъявленными к нему требованиями. Обратимся теперь к вопросу двойственного представления процесса.

3. Два пространства напряжений

Уточняя соотношение для тензора вязких напряжений Коши \mathbf{T}_f [9] в сингулярной точке [11], положим

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_f &= (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 \bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_1 + \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2 \bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_2) \rho(\|\mathbf{D}\|) \bar{\mathbf{N}}_f, \\ \mathbf{N}_f &= ((\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1)^2 + (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2)^2) \bar{\mathbf{T}}_e + C(1 - \sqrt{(\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1)^2 + (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2)^2}) (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1 + \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2). \end{aligned} \quad (11)$$

Выражения для скаляров $C, \rho \geq 0$ приведены в [11]. Вспомогательный тензор \mathbf{N}_f можно записывать с точностью до ненулевого множителя, так как в выражение для \mathbf{T}_f входит нормированный тензор $\bar{\mathbf{N}}_f$. Соотношение (11) в этом случае непрерывным образом при $\mathbf{N}_2 = 0$ (переходя на регулярный участок) переходит в соотношение

$$\mathbf{T}_f = \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 \bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_1 \rho(\|\mathbf{D}\|) \bar{\mathbf{N}}_f, \quad \mathbf{N}_f = \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 \bar{\mathbf{T}}_e + C(1 - \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1) \mathbf{N}_1. \quad (12)$$

Неотрицательность удельной мощности вязких напряжений установлена за счет привлечения девиаторов $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ и выбора минимального значения C (независимого от \mathbf{D}), так как удельная мощность упругих напряжений может оказаться отрицательной. При лучевом нагружении согласно (10)–(12) тензор \mathbf{T}_f отличается от тензора \mathbf{T}_e , как и требуется, скалярным множителем: $\mathbf{T}_f = (\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 \bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_1 + \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_2 \bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_2) \rho(\|\mathbf{D}\|) \bar{\mathbf{T}}_e$ в сингулярной точке и $\mathbf{T}_f = \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N}_1 \bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{N}_1 \rho(\|\mathbf{D}\|) \bar{\mathbf{T}}_e$ в регулярной точке поверхности текучести. Тензор упругих напряжений при течении остается постоянным, а при скачке изменяется, перемещаясь по лучевому пути.

В работе [10] получено двойственное представление процесса в пространстве упругих напряжений Коши \mathbf{T}_e и пространстве упругих напряжений \mathbf{t}_e , где $\mathbf{t}_e = \mathbf{O} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{O}^T$, \mathbf{O} – собственно ортогональный тензор упругого поворота, \mathbf{O}^T – транспонированный тензор \mathbf{O} . Тензор \mathbf{t}_e отличен от тензора \mathbf{T}_e , если $\mathbf{O} \neq \mathbf{E}$, и определяет второе пространство напряжений. Девиаторы нормалей во втором пространстве выражаются также с помощью поворота $\mathbf{n}_i = \mathbf{O} \cdot \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{O}^T$. В данном случае получаем

$$\|\mathbf{t}_e\| = \sqrt{\mathbf{O} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{O}^T} = \sqrt{\mathbf{T}_e \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}} = \sqrt{\mathbf{T}_e \cdot \mathbf{T}_e} = \|\mathbf{T}_e\|$$

$$(\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} = \mathbf{E}), \quad \bar{\mathbf{t}}_e = \mathbf{t}_e \|\mathbf{t}_e\|^{-1} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{O}^T \|\mathbf{T}_e\|^{-1} = \mathbf{O} \cdot \bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{O}^T.$$

Тензоры \mathbf{D} и \mathbf{d} для напряжений \mathbf{T}_e и \mathbf{t}_e связаны равенством $\mathbf{D} = L_3 \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{O}$ [9]. Вычисляем

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \|\mathbf{D}\|^{-1} = L_3 \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{O} \|\mathbf{L}_3 \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{O}\|^{-1} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{d} \|\mathbf{d}\|^{-1} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}^T \cdot \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{O}.$$

Из (12) находим

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_f &= \mathbf{O}^T \cdot \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{O} \mathbf{O}^T \cdot \bar{\mathbf{t}}_e \cdot \mathbf{O} + \\
&+ C(1 - \mathbf{O}^T \cdot \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{O}) \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{O} = \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_1 \mathbf{O}^T \cdot \bar{\mathbf{t}}_e \cdot \mathbf{O} + C(1 - \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{O} = \\
&= \mathbf{O}^T \cdot (\bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_1 + C(1 - \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_1)) \cdot \mathbf{O}, \quad \mathbf{N}_f = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{O}, \quad \bar{\mathbf{N}}_f = \mathbf{O}^T \cdot \bar{\mathbf{n}}_f \cdot \mathbf{O}.
\end{aligned}$$

Поскольку имеет место $\|\mathbf{D}\| = L_3 \|\mathbf{d}\|$ и $L_3 \approx 1$, то согласно определению скаляра ρ существует скаляр $c \approx 1$, такой, что выполняется

$$\mathbf{T}_f = \mathbf{O}^T \cdot c \mathbf{t}_f \cdot \mathbf{O} \quad (\rho(\|\mathbf{D}\|) = c\rho(\|\mathbf{d}\|)); \quad (13)$$

$$\mathbf{t}_f = \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_1 \bar{\mathbf{t}}_e \cdot \mathbf{n}_1 \rho(\|\mathbf{d}\|) \bar{\mathbf{n}}_f, \quad \mathbf{n}_f = \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_1 \bar{\mathbf{t}}_e + C(1 - \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{n}_1. \quad (14)$$

Аналогичным образом для сингулярной точки из (11) с учетом (13) получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_f &= (\bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_1 \bar{\mathbf{t}}_e \cdot \mathbf{n}_1 + \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_2 \bar{\mathbf{t}}_e \cdot \mathbf{n}_2) \rho(\|\mathbf{d}\|) \bar{\mathbf{n}}_f, \\
\mathbf{n}_f &= ((\bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_1)^2 + (\bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_2)^2) \bar{\mathbf{t}}_e + C(1 - \sqrt{(\bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_1)^2 + (\bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_2)^2}) (\bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_1 + \bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2).
\end{aligned} \quad (15)$$

Следовательно, имеет место представление процесса в двух пространствах напряжений \mathbf{T} и \mathbf{t} :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_f = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{t}_e \cdot \mathbf{O} + \mathbf{O}^T \cdot c \mathbf{t}_f \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}_e + c \mathbf{t}_f, \quad (16)$$

где тензор \mathbf{t}_f определяется по (14), (15). Тензор напряжений Коши \mathbf{T} задан в актуальной конфигурации, а тензор \mathbf{t} задан в отсчетной (разгрузочной) конфигурации, с чем и связано такое определение тензора \mathbf{d} .

Для металлических тел поверхность текучести определяется своим девиаторным сечением S . Для двухмерного напряженно-деформируемого состояния возможно наглядное изображение поверхности в тензорном базисе $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3$ (рис. 1).

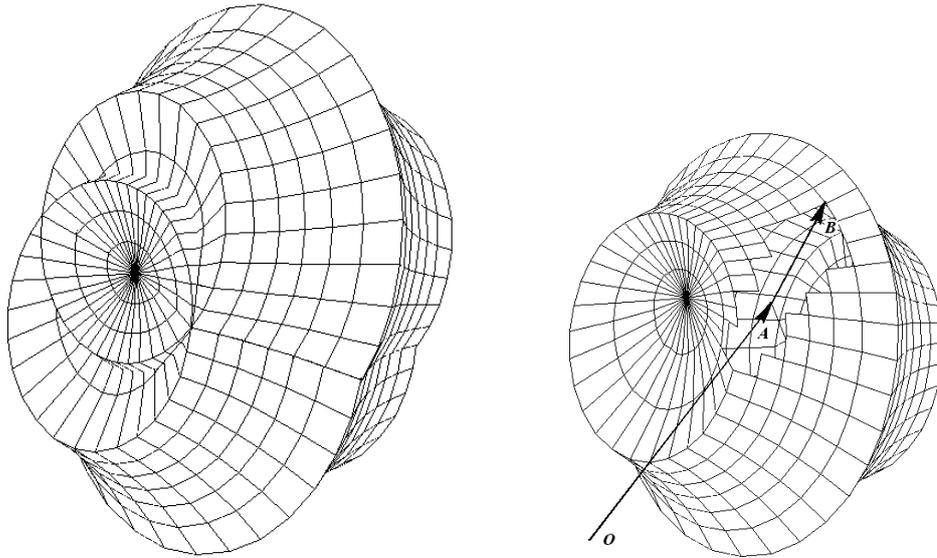


Рис. 1. Влияние на девиаторное сечение поверхности текучести в пространстве напряжений Коши поворота (слева) при разгрузке и тензора вязких напряжений (справа) при нагрузке

Построение S происходит при помощи расчетной точки, движущейся ортогонально девиатору нормали, который зависит в пространстве напряжений Коши от тензора поворота \mathbf{O} . Начальное положение расчетной точки определяется последним местом расположения точки процесса на поверхности S , которое также зависит при разгрузке от тензора \mathbf{O} . В пространстве, порожденном тензором \mathbf{t}_e , указанные зависимости отсутствуют, что позволяет однозначно восстановить поверхность S при разгрузке, когда $\mathbf{T}_f = 0$ и \mathbf{T}_e находятся внутри S согласно отображению $\mathbf{T}_e = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{t}_e \cdot \mathbf{O}$.

Влияние тензора \mathbf{T}_f на поверхность S обусловлено лишь ее трансляцией (перемещением). Тензор \mathbf{T}_f изображен вектором \overline{OA} , тензор \mathbf{T}_e – вектором \overline{AB} .

Заключение

В работе получены оценки (3)–(5), позволяющие установить соотношения (5), (10). Следовательно, можно утверждать, что тензор вязких напряжений (11), (12) удовлетворяет обязательному требованию неотрицательности его удельной мощности, а также условию возможности описания всех лучевых нагружений в пространстве напряжений Коши моделью упруговязкопластической среды. Понятно, что произвольное, несогласованное с определяющими уравнениями (в конечном виде (1) и в скоростях) для тензора \mathbf{T}_e введение тензора \mathbf{T}_f вступит в противоречие с физическим экспериментом при численном моделировании. Наличие экспериментальных данных о лучевых нагружениях [11] позволяет выполнить проверку полученных определяющих уравнений и провести их возможную корректировку.

Теоретическое построение оказалось возможным благодаря значительной общности принятых уравнений (1), (2), которые, однако, приводят к неизбежной громоздкости как при изложении материала, так и при решении конкретных задач.

В силу принятого предположения (первого равенства в (16)) и наличия скалярного множителя ρ у тензора вязких напряжений в (11), (12) учитываются любые экспериментальные данные, снятые с базовых нагружений, и влияние временных эффектов («память» материала об истории изменения деформации вектора скорости). Имеет место непрерывная зависимость тензора \mathbf{T}_f от тензора \mathbf{D} . При $\|\mathbf{D}\| \rightarrow 0$ тензор вязких напряжений доопределяется однозначно.

Сохраняется двойственное представление процесса, как и для упругопластической среды, которое, однако, имеет свою специфику (13)–(16) ввиду зависимости вязких напряжений от скоростей.

Критерий активного процесса, совпадающий для обеих моделей сред, получен в более удобном виде (6), уменьшающем влияние численных погрешностей при компьютерных вычислениях.

Список литературы

1. Трусделл, К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
2. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Физ.-мат. лит., 1970. – 940 с.
3. Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 517 с.
4. Мулюков, В.В. Постановка задач геометрически нелинейной теории пластичности в терминах отсчетной конфигурации / В.В. Мулюков, П.В. Трусов // Известия РАН. МТТ. – 1997. – № 1. – С. 71–78.
5. Левитас, В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении / В.И. Левитас. – Киев: Наукова думка, 1987. – 232 с.
6. Махнач, В.И. Определение упругих деформаций при нагрузке / В.И. Махнач, О.Л. Швед // Технологии Физтех: сб. науч. тр. в 2 т.; под ред. С.А. Астапчика. – 2004. – Т. 2. – С. 126–138.

7. Швед, О.Л. К теории упругопластичности при конечных упругих деформациях и поворотах / О.Л. Швед // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 45–48.
8. Швед, О.Л. Главные потенциальные направления в модели упругопластической среды / О.Л. Швед // Информатика. – 2006. – № 3(11). – С. 70–79.
9. Швед, О.Л. Определяющее уравнение упруговязкопластической среды / О.Л. Швед // Информатика. – 2007. – № 2(14). – С. 107–116.
10. Швед, О.Л. Двойственное описание упругопластического процесса / О.Л. Швед // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2007. – № 2. – С. 88–93.
11. Швед, О.Л. Определение поверхности текучести с учетом влияния вязкости / О.Л. Швед // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 52, № 6. – С. 35–39.
12. Дэвис, Е. Рост напряжений с изменением деформаций и зависимость «напряжения – деформация» в пластической области для меди при сложном напряженном состоянии / Е. Дэвис // Теория пластичности. – М.: Ин. лит., 1948. – С. 336–363.

Поступила 31.08.07

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: swed@newman.bas-net.by*

O.L. Shwed

A DUAL DESCRIPTION OF ELASTIC-VISCOPLASTIC PROCESS OF MATERIAL DEFORMING

The correctness of the viscous stress tensor definition that is introduced as an admissible approximation is shown. The presentation of the process as two strain spaces that eliminates the influence of the elastic turns and allows to construct unambiguously the fluidity surface for elastic-viscoplastic material model is proposed.