

УДК 621.785.545

Д.Г. Иванов, С.П. Кундас, А.В. Лемзиков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СТАЛЬНЫХ ДЕТАЛЯХ ПРИ ИНДУКЦИОННОЙ ЗАКАЛКЕ

Рассматриваются характерные особенности остаточных напряжений при индукционной закалке, устанавливаются вызывающие их причины. Строится математическая модель, описывающая остаточные напряжения первого рода в стальных деталях. Полученное математическое описание позволяет осуществлять моделирование процесса формирования остаточных напряжений с учетом термических и обусловленных различием удельного объема фаз деформаций, а также индуцированной фазовыми превращениями пластичности. Модель адаптирована к интеграции с тепловым расчетом и расчетом фазовых превращений и позволяет учитывать зависимость механических свойств материала от температуры. Представляются алгоритм компьютерной реализации модели и ее конечно-элементная формулировка. Рассматриваются особенности определения механических характеристик сталей в процессе закалки.

Введение

Использование индукционного нагрева для закалки и отпуска стальных деталей в последнее время находит все большее применение в промышленности. Обусловлено это следующими его преимуществами перед печным: высокой скоростью и локализацией зоны нагрева, более низкими энергозатратами, экологической чистотой метода.

При разработке технологического процесса термообработки с применением индукционного нагрева стоит задача оценки и выбора таких параметров системы, как частота напряжения, питающего индуктор; форма и размеры индуктора; мощность генератора и т. п. Критериями для выбора этих параметров чаще всего являются свойства деталей, обеспечиваемые термообработкой (распределение твердости по сечению стальной детали, остаточные напряжения и деформации и др.). Оценка остаточных напряжений при проектировании технологии термообработки крайне важна в связи с тем, что при последующей эксплуатации детали остаточные напряжения суммируются с напряжениями, вызванными внешней нагрузкой, а это, в свою очередь, может привести к разрушению. Для решения данной проблемы может быть использован целый ряд экспериментальных методов [1]. Вместе с тем проведение такого рода экспериментов возможно лишь в хорошо оборудованных, дорогостоящих, специализированных лабораториях высококвалифицированными специалистами.

Альтернативным подходом к оценке остаточных напряжений является использование теоретических достижений механики деформированного твердого тела и построение на их основе математических и компьютерных моделей. Такой подход позволяет значительно упростить инженерный анализ технологического процесса индукционной закалки, сократить затраты времени и материальных средств на технологическую подготовку производства.

1. Физические явления в процессе индукционной закалки. Причины остаточных напряжений

Вопросу о причинах, вызывающих остаточные напряжения при термообработке, в литературе уделяется недостаточное внимание, хотя только в случае детального представления о природе этого явления возможно построение адекватной математической модели.

На рис. 1 показана схема наиболее значимых физических явлений, протекающих в процессе индукционной закалки.

В соответствии с работами [2, 3] при нагреве детали наличие источников теплоты обусловлено возникновением вихревых токов вследствие действия переменного магнитного поля. Нагрев детали до температуры выше точки A_{c1} приводит к аустенитизации стали. При охлаж-

дении аустенит распадается на феррит, перлит, бейнит и мартенсит. Неравновесные структуры бейнита и мартенсита во многих случаях являются желательными благодаря их механическим характеристикам. Однако на эксплуатационные характеристики детали, помимо структуры, в значительной мере влияют и упругопластические деформации детали, которые имеют место в процессе закалки и чаще всего приводят к остаточным напряжениям.

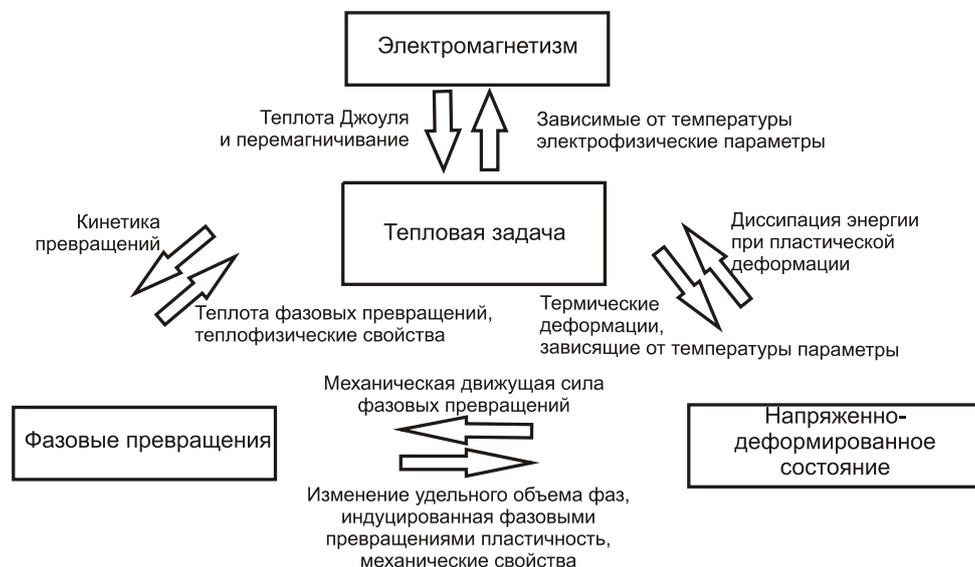


Рис. 1. Физические явления в процессе индукционной закалки

Остаточные напряжения первого рода могут быть вызваны следующими явлениями [4]:

1) термическими напряжениями в процессе нагрева и охлаждения. Несмотря на то, что исходное состояние детали может быть ненапряженным, в процессе быстрого нагрева или охлаждения за счет термического градиента различные части детали становятся несогласованными, что может привести к превышению предела текучести с дальнейшим переходом в область пластического течения. После охлаждения до комнатной температуры остаточная деформация сохраняется и является причиной остаточных напряжений [5];

2) различиями в структурных составляющих по сечению детали. Целью термообработки является получение требуемого фазового состава и свойств детали. Так, например, часто требуется достижение такого результата, когда поверхность детали до некоторой глубины составляет мартенсит, а сердцевину – феррит и перлит [6]. Различные механизмы образования этих фаз из аустенита (диффузионный для феррита и перлита и сдвиговый для мартенсита), ряд особенностей кинетического и термодинамического характера приводят к тому, что твердые растворы в среднем одного химического состава значительно отличаются по своим физическим свойствам [7]. К таким свойствам можно отнести температурный коэффициент линейного расширения (ТКЛР) и плотность;

3) индуцированной фазовыми превращениями пластичностью (ИФПП), которая представляет собой аномальную пластическую деформацию, наблюдаемую даже в том случае, если фазовые превращения происходят под действием намного меньшего внешнего напряжения, чем предел текучести наиболее «слабой» фазы. Для объяснения этого феномена в настоящее время используются два механизма: Мэги и Гринвуда – Джонсона [8]. Механизм Мэги играет важную роль в процессе мартенситного превращения: под действием девиаторных напряжений первого рода рост мартенсита более предпочтителен в определенных направлениях, т. е. является анизотропным, что приводит к необратимой пластической деформации. При этом не обязательно наличие внешней нагрузки в общепринятом смысле – в сложных, неравномерно охлаждающихся деталях достаточно напряжений, вызванных причинами, указанными выше. Механизм Гринвуда – Джонсона объясняет наблюдаемую ИФПП в случае диффузионного типа превращения: разность удельного объема исходной и результирующей фазы приводит к микропластичности, которая обретает анизотропный характер в условиях действия девиаторных напря-

жений первого рода. ИФПП по механизму Мэги является обратимой, т. е. устраняется после повторной аустенитизации. Последние исследования в этой области показывают, что механизм Гринвуда – Джонсона является доминирующим в случае и бейнитного превращения, хотя оно и происходит по сдвиговому механизму.

2. Математическая модель упругопластического состояния детали в процессе термообработки

Выше была показана необходимость решения задачи об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) детали в упругопластической постановке, что требует поэтапного вычисления приращения деформаций и напряжений с последующим выполнением интегрирования этих компонент на каждом шаге решения тепловой задачи. Связано это с тем, что пластическое поведение материала обладает «эффектом памяти» и решение задачи в определенный момент времени зависит от предыстории нагрузки. Необходимо отметить, что эта особенность часто делает невозможным использование для расчета остаточных напряжений конечно-элементных программ общего назначения (например, Comsol Multiphysics).

В общем случае соотношение между деформацией и напряжением будет следующим [9]:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (1)$$

где $\{\sigma\}$ и $\{\varepsilon\}$ – тензоры напряжения и упругой деформации (здесь и далее тензоры напряжения и деформации представлены в векторном виде), $[D]$ – матрица упругости материала.

В предположении малых деформаций выражение (1) может быть представлено в дифференциальном виде:

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon\} + [dD]\{\varepsilon\}, \quad (2)$$

где $[dD]$ – изменение матрицы упругости материала на рассматриваемом интервале приращения тензора деформаций.

Обобщая все вышесказанное, запишем выражение для суммарной деформации:

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\} + \{d\varepsilon^T\} + \{d\varepsilon^{ph}\} + \{d\varepsilon^{tp}\}, \quad (3)$$

где $\{d\varepsilon^e\}$, $\{d\varepsilon^p\}$, $\{d\varepsilon^T\}$, $\{d\varepsilon^{ph}\}$, $\{d\varepsilon^{tp}\}$ – приращения упругих, пластических, термических, обусловленных фазовыми превращениями и ИФПП деформаций на текущем временном шаге соответственно.

Как указано в работе [10], объемная деформация для сталей в случае превращения 100 % объема аустенита в 100 % объема мартенсита составляет 0,044, а в случае полного превращения в перлит и феррит – 0,007.

Приращение деформации, обусловленной фазовыми превращениями, можно представить в виде [11]

$$\{d\varepsilon^{ph}\} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V^{ph}} \{I^V\}, \quad (4)$$

где ΔV – изменение удельного объема при фазовом превращении; V^{ph} – удельный объем стали до фазового превращения; $\{I^V\}$ – вектор, соответствующий единичному гидростатическому тензору деформации.

Аналогичным образом вычисляется термическая деформация, которая также имеет объемный характер:

$$\{d\varepsilon^T\} = \alpha \{I^V\} dT + (T - T_{ref}) \{I^V\} d\alpha \quad (5)$$

где T – температура на текущем временном шаге; dT – изменение температуры по отношению к предыдущему временному шагу; α – ТКЛР; $d\alpha$ – изменение ТКЛР на интервале dT ; T_{ref} – температура, по отношению к которой измеряется термическая деформация.

Включение в модель ИФПП-деформаций представляет собой более сложную задачу. В настоящее время только модель Леблонда позволяет получить математическое описание ИФПП применительно к напряжениям первого рода [12]:

$$\{\varepsilon^p\} = k \cdot \varphi(z)\{s\}, \quad \varphi(z) = \begin{cases} 0, & z = 0; \\ 1, & z = 1, \end{cases} \quad (6)$$

где k – параметр ИФПП; z – объемная доля образующейся фазы; $\{s\}$ – девиаторная часть тензора напряжений; $\varphi(z)$ – функция, описывающая кинетику ИФПП.

В работах [9,13] используется следующая дифференциальная форма выражения (6):

$$\{d\varepsilon^p\} = kdz(1-z)\{s\}. \quad (7)$$

Значение параметра ИФПП для превращения типа аустенит – феррит/перлит составляет $4,18 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}$, для превращения типа аустенит – мартенсит [13] – $5,08 \times 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}$.

Таким образом, выражение (2) с учетом формулы (3) может быть представлено в виде

$$\{d\sigma\} = [D](\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\} - \{d\varepsilon^T\} - \{d\varepsilon^{ph}\} - \{d\varepsilon^p\}) + [dD]\{\varepsilon\}. \quad (8)$$

Вычисление напряжений и деформаций при расчете может быть осуществлено при помощи интегрирования выражения (8).

Задача может быть сведена к отысканию приращения тензора напряжений и деформаций на каждом временном шаге теплового расчета с учетом выбранного критерия пластичности. Члены $\{d\varepsilon^{ph}\}$, $\{d\varepsilon^T\}$, $\{d\varepsilon^p\}$ в выражении (8) могут быть вычислены непосредственно с использованием формул (4), (5), (7). Вычисление полной деформации $\{d\varepsilon\}$ возможно с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Вычисление приращения пластической деформации $\{d\varepsilon^p\}$ более подробно рассмотрим ниже.

Выбор критерия перехода в пластическую область крайне важен. Одним из наиболее значимых требований при этом является наличие справочных данных для сталей по задействованным в выбранном критерии феноменологическим параметрам. Экспериментальные исследования в области пластического поведения сталей показывают, что пластическое течение этого материала не зависит от шарового тензора (равномерного, всестороннего сжатия или растяжения), а определяется девиатором напряжений, который характеризует изменение формы элементарного объема [14]. Для такого поведения материала хорошо зарекомендовали себя два критерия перехода в область пластического течения: Треска и фон Мизеса.

В работе [14] показано, что наиболее приемлемым для сталей является критерий фон Мизеса. При этом закон, описывающий направление пластического течения, является ассоциированным, что подразумевает дифференцирование функции текучести по компонентам напряжения для определения соответствующих пластических деформаций. Гладкость критерия фон Мизеса дает ему дополнительные вычислительные преимущества.

Кинематическим упрочнением в модели пластического поведения стали при индукционной закалке можно пренебречь, что связано со следующими фактами:

1) кинематическое упрочнение в достаточной мере проявляет себя в случае действия циклической нагрузки;

2) в большинстве случаев отсутствуют справочные данные, которые отражают поведение материала при циклической нагрузке, что приводит к проблеме экспериментальной идентификации этих параметров для конкретной построенной модели.

Функцию F , описывающую поверхность пластического течения и учитывающую изотропное упрочнение, запишем следующим образом:

$$F = f - \alpha_0, f = \{s\}^T \{s\}, \alpha_0 = \frac{1}{3} Y^2; \quad (9)$$

$$Y = (Y_0 + H_{iso} e^p); \quad (10)$$

$$e^p = \left(\frac{2}{3} \{ \varepsilon^p \}^T \{ \varepsilon^p \} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

где Y_0 – предел текучести, соответствующий одноосному растяжению; H_{iso} – коэффициент изотропного упрочнения; $\{ \varepsilon^p \}$ – тензор пластической деформации; e^p – эффективная пластическая деформация.

Введем понятие предельного неравенства модели: $F \leq 0$. В случае пластического течения необходимо, чтобы $F = 0$. Значит, на текущем инкременте нагрузки справедливо условие $dF = 0$. Вычислим дифференциал выражения (9):

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_0} \right)^T \{d \alpha_0\} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_0} d \alpha_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_0} \right)^T \{d \alpha_0\} - \frac{\partial \alpha_0}{\partial e^p} d e^p - \frac{\partial \alpha_0}{\partial T} d T = 0. \quad (12)$$

В соответствии с ассоциированным законом пластического течения для активного нагружения приращение пластической деформации

$$\{d \varepsilon^p\} = d \lambda \{n\}, \quad d \lambda \geq 0, \quad (13)$$

где $\{n\}$ – тензор направления пластического течения,

$$\{n\} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} f_m^{-1}, \quad f_m = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \alpha_0}^T \frac{\partial f}{\partial \alpha_0}}. \quad (14)$$

Параметр $d \lambda$ в выражении (13) непосредственно связан с приращением эффективной пластической деформации на рассматриваемом этапе тепловой нагрузки:

$$d e^p = \sqrt{2/3} d \lambda \quad (15)$$

Выражение (12) с учетом (9)–(11), (14) и (15) запишем в виде

$$\{n\}^T f_m \{d \alpha_0\} = \frac{2}{3} Y \left(\left(\frac{\partial Y}{\partial T} \right) d T + \sqrt{\frac{2}{3}} H_{iso} d \lambda \right). \quad (16)$$

Используя выражения (8), (13) и (16), вычислим параметр $d \lambda$:

$$d \lambda = \frac{\{n\}^T [D] (\{d \xi\} - \{d \varepsilon^{th}\} - \{d \varepsilon^{ph}\} - \{d \varepsilon^p\}) + \{n\}^T [dD] \{ \varepsilon \} - 2/3 Y f_m^{-1} (\partial Y / \partial T) d T}{S}, \quad (17)$$

$$S = \{n\}^T [D] \{n\} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} Y f_m^{-1} H_{iso}.$$

Приращение тензора напряжения с использованием (8), (13) и (17) получается следующим:

$$\{d\sigma\} = [D^{ep}](\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^{th}\} - \{d\varepsilon^{ph}\} - \{d\varepsilon^{tp}\}) + \left([dD] - \frac{[D]\{n\}\{n\}^T[dD]}{S} \right) \{\varepsilon\} - \frac{2/3[D]\{n\}Yf_m^{-1}(\partial Y / \partial T)dT}{S}, \quad (18)$$

где $[D^{ep}] = [D] - \frac{[D]\{n\}\{n\}^T[D]}{S}$ – упругопластическая матрица.

3. Конечно-элементная формулировка

Согласно принципу возможных перемещений для деформированного тела необходимым и достаточным условием равновесия является равенство работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях [15].

Работа приращений внутренних напряжений $\{d\sigma\}$ на возможных приращениях деформаций $\delta\{d\varepsilon\}$ при отсутствии внешних сил может быть приравнена к нулю:

$$\int_V \delta d\varepsilon^T \{d\sigma\} dV = 0. \quad (19)$$

Используя конечно-элементный подход, запишем:

$$\{du\} = [N]\{dU\},$$

где $\{du\}$ – аппроксимация приращения перемещений на элементе, $\{dU\}$ – вектор узловых приращений перемещений, $[N]$ – матрица функций формы.

Приращения деформации и приращения перемещений непосредственно связаны, и в общем виде справедливо

$$\{d\varepsilon\} = [B]\{dU\}, \quad \delta d\varepsilon = [B]\delta dU, \quad (20)$$

где $[B]$ – матрица, получаемая дифференцированием матрицы $[N]$. Фактические значения коэффициентов матрицы $[B]$ зависят от вида используемого элемента и от типа рассматриваемой задачи (осевая симметрия, общий случай трехмерной геометрии и т. п.).

Таким образом, уравнение (19) с учетом (20)

$$\int_V \delta dU^T [B]^T \{d\sigma\} dV = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) справедливо для любого ненулевого возможного приращения перемещений $\delta\{dU\}$. Следовательно, справедливо и следующее выражение:

$$\int_V [B]^T \{d\sigma\} dV = 0. \quad (22)$$

В случае упругого поведения материала уравнение (22) с учетом (8) и того, что $\{d\varepsilon^p\} = 0$, может быть представлено в виде

$$\int_V [B]^T [D][B]\{dU\} dV = \int_V [B]^T [D]\{d\varepsilon^0\} dV - \int_V [B]^T [dD]\{\varepsilon\} dV, \quad (23)$$

где $\{d\varepsilon^0\} = \{d\varepsilon^T\} + \{d\varepsilon^{ph}\} + \{d\varepsilon^{tp}\}$.

Интегралы в выражении (23) в зависимости от типа используемых конечных элементов могут быть вычислены аналитически или с помощью численного интегрирования. В векторно-матричной форме выражение (23) запишем как

$$[K]_e \{dU\} = \{dR\}_e + \{df\}_e,$$

$$[K]_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV, \quad \{dR\}_e = \int_V [B]^T [D] \{d \xi^0\} dV, \quad \{df\}_e = - \int_V [B]^T [dD] \{ \xi \} dV,$$

где $[K]_e$ – матрица жесткости; $\{dR\}_e$ – вектор узловых нагрузок, обусловленных термическими деформациями и фазовыми превращениями; $\{df\}_e$ – дополнительный вектор узловых нагрузок, обусловленный зависимостью механических свойств стали от температуры.

В случае пластического течения материала выражение (22) с учетом (18) имеет вид

$$\int_V [B]^T [D^{ep}] [B] \{dU\} dV = \int_V [B]^T [D^{ep}] \{d \xi^0\} dV -$$

$$- \int_V [B]^T \left(\left([dD] - \frac{[D] \{n\} \{n\}^T [dD]}{S} \right) \{ \xi \} + \frac{2/3 [D] \{n\} Y_f m^{-1} (\partial Y / \partial T) dT}{S} \right) dV. \quad (24)$$

В векторно-матричной форме выражение (24) может быть представлено следующим образом:

$$[K]_p \{dU\} = \{dR\}_p + \{df\}_p, \quad [K]_p = \int_V [B]^T [D^{ep}] [B] dV, \quad \{dR\}_p = \int_V [B]^T [D^{ep}] \{d \xi^0\} dV,$$

$$\{df\}_p = - \int_V [B]^T \left(\left([dD] - \frac{[D] \{n\} \{n\}^T [dD]}{S} \right) \{ \xi \} + \frac{2/3 [D] \{n\} Y_f m^{-1} (\partial Y / \partial T) dT}{S} \right) dV.$$

Для получения решения задачу об определении НДС необходимо дополнить граничными условиями. В противном случае матрица жесткости системы плохо обусловлена, так как задача имеет множество решений относительно перемещений. Для получения единственного решения могут быть определены точки с нулевыми перемещениями по направлениям, наиболее соответствующим физической сути процесса. Так, в случае осевой симметрии точки, лежащие на оси симметрии, ограничены в радиальном перемещении.

Если интегралы в выражениях (23) и (24) не могут быть вычислены аналитически, численное интегрирование может быть проведено с использованием квадратур Гаусса. Порядок используемых квадратур может быть определен в зависимости от типа конечного элемента в соответствии с правилами, указанными в работе [16].

4. Алгоритм компьютерной реализации модели НДС

Как уже упоминалось выше, задача решается в цикле для всех этапов тепловой нагрузки (рис. 2). Расчет поля температур осуществляется с помощью МКЭ с дискретизацией по времени. Таким образом, для задачи НДС может быть использована та же конечно-элементная сетка. Фазовый состав на каждом временном интервале определяется исходя из температурной истории в каждой точке интегрирования элемента [17].

Для известного фазового состава и температуры с помощью алгоритмов расчета механических свойств стали и баз данных осуществляется расчет следующих величин: модуля Юнга $E(T, \Sigma)$, коэффициента изотропного упрочнения $H_{iso}(T, \Sigma)$, предела текучести $Y_0(T, \Sigma)$, ТКЛР $\alpha(T, \Sigma)$, коэффициента Пуансона $\nu(T, \Sigma)$, параметра ИФПП $k(T, \Sigma)$, матрицы упругости и ее приращения на текущем временном шаге, разностной аппроксимации производной предела текучести по температуре.

Поиск решения упругопластической задачи осуществляется итерационно в соответствии с алгоритмом Ньютона – Рафсона. В качестве тангенциальной используется упругопластическая матрица. Необходимая корректировка полученных на каждом шаге напряжений осуществляется на основе субинкрементальной схемы [9].

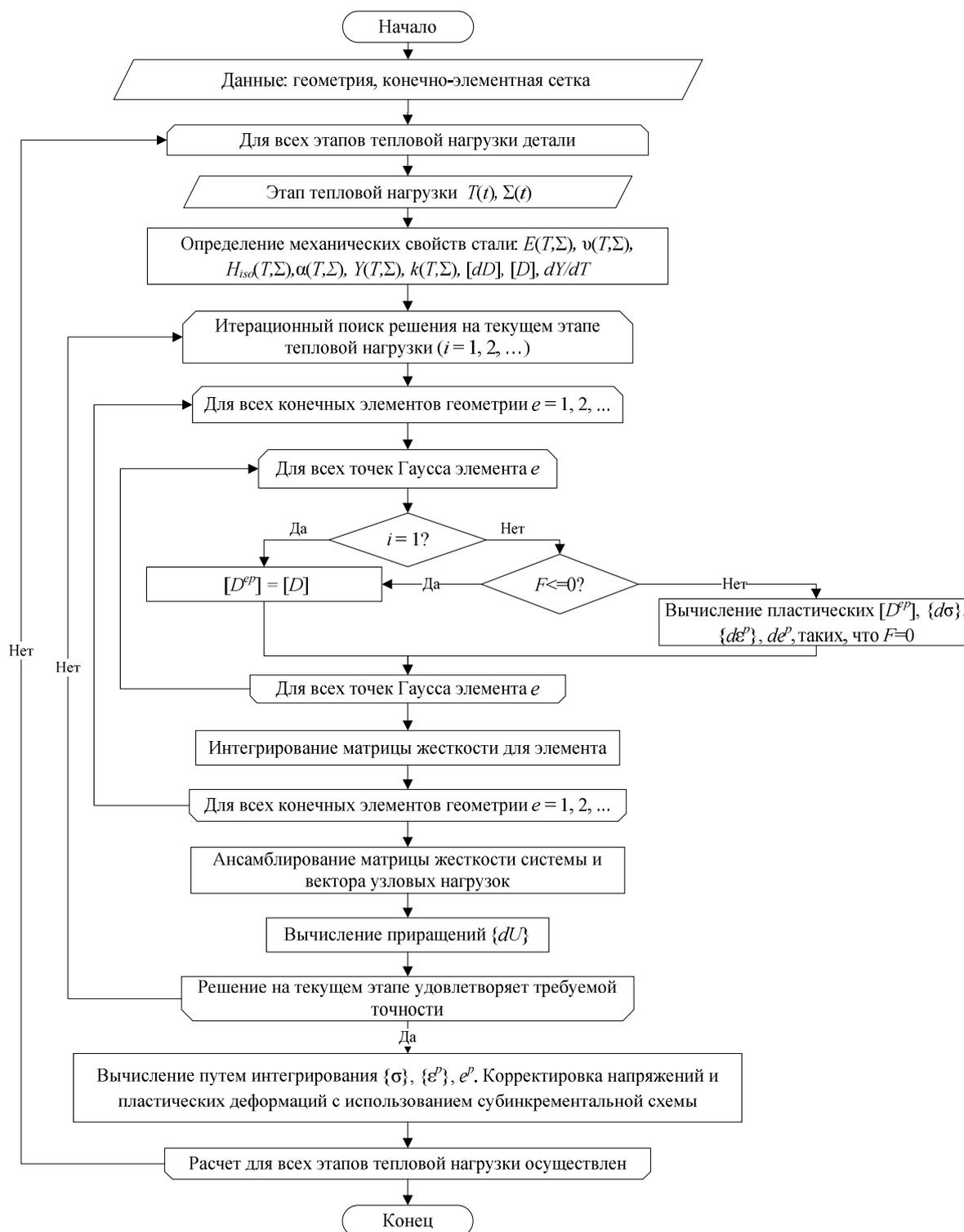


Рис. 2. Алгоритм решения задачи об определении НДС в процессе индукционной закалки

5. Определение механических свойств стали

Как видно из алгоритма решения задачи НДС, одним из обязательных этапов является определение механических свойств стали на каждом шаге тепловой нагрузки. Основной задачей является отыскание модуля Юнга $E(T, \Sigma)$, коэффициента изотропного упрочнения $H_{iso}(T, \Sigma)$ и предела текучести $Y_0(T, \Sigma)$ для стали с определенным фазовым составом. Для идентификации механических параметров стали используется билинейная диаграмма растяжения (рис. 3).

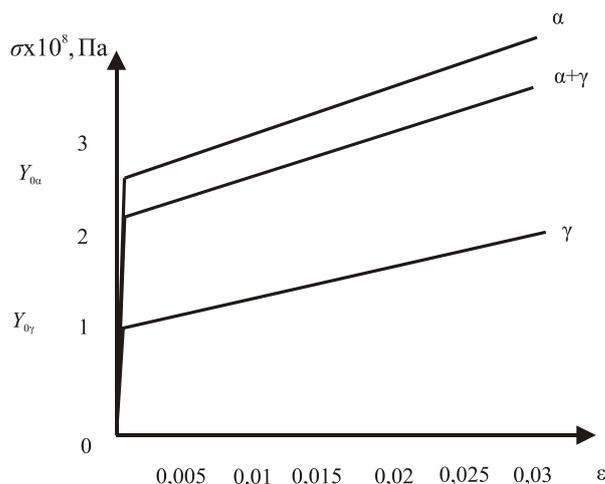


Рис. 3. Характерная билинейная диаграмма растяжения для разных фаз и их смеси

Кривая γ отражает поведение более «слабой» фазы (например, аустенита), кривая α – более «сильной» (например, перлита, бейнита или мартенсита) при заданной температуре. Модули Юнга для α - и γ -фаз обозначены как E_α и E_γ , пределы текучести – как $Y_{0\alpha}$ и $Y_{0\gamma}$, тангенс угла наклона кривых на пластическом участке – $E_{i\alpha}$ и $E_{i\gamma}$ соответственно. Последняя величина непосредственно связана с коэффициентом изотропного упрочнения и модулем упругости:

$$H_{iso} = \frac{EE_t}{E - E_t}.$$

Напряжение первого рода для смеси из фаз может быть вычислено путем использования правила аддитивности:

$$\Sigma = f(z) \sigma_1 + (1 - f(z)) \sigma_2, \quad 0 \leq f(z) \leq 1,$$

где σ_i и Σ – напряжение второго рода в i -й фазе и напряжение первого рода смеси соответственно; $f(z)$ – нормализующая функция, такая, что $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$; z – объемное содержание фазы 1.

Численные исследования Леблонда [18, 19], а затем и экспериментальные исследования [20] показывают, что для смесей фаз на основе α -модификации решетки железа (феррит, перлит, бейнит, мартенсит) справедливо линейное правило аддитивности, т. е.

$$f(z) = z.$$

Для смесей фаз, в которых присутствует аустенит, справедлива квадратичная аппроксимация:

$$f(z) = z^2,$$

где z – объемное содержание аустенита.

В силу линейной зависимости напряжений от деформаций в упругой области справедливы выражения

$$E(\Sigma) = f(z)E_\alpha + (1 - f(z))E_\gamma; \quad Y_0(\Sigma) = f(z)Y_{0\alpha} + (1 - f(z))Y_{0\gamma}$$

Вычисление коэффициента упрочения согласно правилу аддитивности возможно, если предположить следующее:

$$\frac{Y_{0\alpha}}{E_\alpha} = \frac{Y_{0\gamma}}{E_\gamma},$$

поскольку эти величины близки по значению и достаточно малы (см. рис. 3). Таким образом, коэффициент изотропного упрочнения

$$H_{iso}(\Sigma) = \frac{E(\Sigma) \left[f(z) H_{iso\alpha} E_\alpha (E_\gamma + H_{iso\gamma}) + [1 - f(z)] H_{iso\gamma} E_\gamma (E_\alpha + H_{iso\alpha}) \right]}{f(z) E_\alpha^2 (E_\gamma + H_{iso\gamma}) + [1 - f(z)] E_\gamma^2 (E_\alpha + H_{iso\alpha})}.$$

Заключение

Разработанная математическая модель в настоящее время реализована средствами MATLAB и показала свою работоспособность и устойчивость при решении характерных задач индукционной закалки. Следующим этапом является ее программная реализация и включение в состав программного комплекса ThermoSim II, предназначенного для моделирования процессов термообработки [21], в котором уже реализованы эффективные алгоритмы расчета нелинейных тепловых задач совместно с фазовыми превращениями, а также необходимые базы данных и средства визуализации.

В ходе исследований авторами были решены вопросы определения механических свойств стали в процессе ее термообработки, включения в модель ИФПП, непосредственного учета температурных зависимостей свойств стали. Сравнение результатов расчетов с опубликованными данными экспериментальных исследований в этой области позволяет говорить о том, что предложенная математическая модель адекватна и позволяет проводить анализ НДС детали в процессе индукционной закалки с достаточной для практического применения точностью, а также получать достоверную картину распределения остаточных напряжений без проведения дорогостоящих экспериментов. Стоит отметить, что существующие специализированные коммерческие программные комплексы (Deform HT, Sysweld и др.) не рассматривают задачу определения механических свойств стали при термообработке, что приводит к значительной погрешности результатов моделирования.

Включение в модель ИФПП позволяет оценивать степень влияния этого феномена для различных режимов индукционной закалки на свойства термообрабатываемых деталей. Такие работы уже проводятся авторами в настоящее время совместно с одним из ведущих мировых производителей индукционной техники – фирмой EFD Induction (Норвегия).

Список литературы

1. Withers, P.J. Residual Stress. Part 1 – Measurement techniques / P.J. Withers, H.K.D.H. Bhadeshia // Materials Science and Technology. – 2001. – Vol. 17. – P. 355–365.
2. Кундас, С.П. Совместное решение электромагнитной и тепловой задач при моделировании индукционного нагрева / С.П. Кундас, Д.Г. Иванов, И.А. Гишкелюк // Известия Белорусской инженерной академии. – 2005. – № 1(19)/2. – С. 51–53.
3. Semiatin, S.L. Induction Heat Treatment of Steel / S.L. Semiatin, D.E. Stutz. – Ohio: American Society for Metals, 1986. – 308 p.
4. Комплексная математическая модель индукционной закалки осесимметричных деталей с учетом напряженно-деформированного состояния и фазовых превращений / В.Б. Демидович [и др.] // Сб. тр. конф. «Актуальные проблемы энергосберегающих электротехнологий». – Екатеринбург, 2006. – С. 149–153.
5. Hearn, E.J. Mechanics of materials. An introduction to the mechanics of elastic and plastic deformation of solid and structural materials. Vol. 2 / E.J. Hearn. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 1997. – 597 p.

6. Термическая обработка в машиностроении: справ. / Под. ред. Ю.М. Лахтина, А.Г. Рахштадта. – М.: Машиностроение, 1980. – 783 с.
7. Withers, P.J. Residual stress. Part 2 – Nature and origins / P.J. Withers, H.K.D.H. Bhadeshia // *Materials Science and Technology*. – 2001. – Vol. 17. – P. 366–374.
8. Lakhdar, T. New investigations on transformation induced plasticity and its interaction with classical plasticity / T. Lakhdar, S. Petit-Grostabussiat // *International journal of plasticity*. – 2006. – Vol. 22. – P. 110–130.
9. Murthy, Y.V.L.N. Numerical simulation of welding and quenching processes using transient thermal and thermo-elasto-plastic formulations / Y.V.L.N. Murthy, G. Venkata Rao, P. Krishna Iyer // *Computers & Structures*. – 1996. – Vol. 60. – P. 131–154.
10. Mathematical model of phase transformations and elasto-plastic stress in the water spray quenching of steel bar / Y. Nagasaka [et al.] // *Metallurgical and Materials Transactions*. – 1993. – Vol. 24A. – P. 795–808.
11. Кундас, С.П. Моделирование напряженно-деформированного состояния стальных деталей при закалке / С.П. Кундас [и др.] // *Деформация и разрушение материалов*. – 2005. – № 5. – С. 37–47.
12. Leblond, J.B. Mathematical modeling of transformation plasticity in steels II. Coupling with strain hardening phenomena / J.B. Leblond // *International journal of plasticity*. – 1989. – № 5. – С. 573–591.
13. Seong-Hoon, K. Three-dimensional thermo-elastic-plastic finite element modeling of quenching process of plain-carbon steel in couple with phase transformation / K. Seong-Hoon, I. Young-Taek // *International journal of mechanical sciences*. – 2007. – Vol. 49. – P. 423–439.
14. *Plasticity of Metals: Experiments, Models, Computation* / Edited by E. Steck [et al.]. – Berlin: Wiley-VCH Verlag GmbH, 2001. – 398 p.
15. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести: учеб. для студентов вузов / Н.Н. Малинин. – 2-е изд. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
16. Zienkiewicz, O.C. *The Finite Element Method. The Basis* / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – 5th ed. – Oxford: Butterworth – Heinemann, 2000. – 708 p.
17. Математическое моделирование индукционной закалки с применением метода конечных элементов / С.П. Кундас [и др.] // Сб. тр. конф. «Актуальные проблемы теории и практики индукционного нагрева». – СПб., 2005. – С. 292–299.
18. Leblond, J.B. A theoretical and numerical approach to the plastic behavior of steels during phase transformations – II. Study of classical plasticity for ideal plastic phases / J.B. Leblond, G. Mottet, J.C. Devaux // *Journal of the mechanics and physics of solids*. – 1986. – Vol. 34. – P. 411–432.
19. Leblond, J.B. A theoretical and numerical approach to the plastic behaviour of steels during phase transformations – I. Derivation of general relations / J.B. Leblond, G. Mottet, J.C. Devaux // *Journal of the mechanics and physics of solids*. – 1986. – Vol. 34. – P. 395–409.
20. Petit-Grostabussiat, S. Experimental results on classical plasticity of steels subjected to structural transformations / S. Petit-Grostabussiat, L. Taleb, J-F. Jullien // *International journal of plasticity*. – 2004. – Vol. 20. – P. 1371–1386.
21. Кундас, С.П. Компьютерное моделирование процессов термической обработки сталей / С.П. Кундас. – Минск: Бестпринт, 2005. – 313 с.

Поступила 22.10.07

*Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники,
Минск, ул. П. Бровки, 6
e-mail: adminset@bsuir.unibel.by*

D.G. Ivanov, S.P. Kundas, A.V. Lemzikov

**A MATHEMATICAL MODEL
OF THE RESIDUAL STRESSES FORMATION PROCESS
IN STEEL PIECES DURING INDUCTION HARDENING**

The features of induction hardened steel pieces residual macrostresses are described. A mathematical model for simulation of stress-strained state of steel pieces under induction heating is proposed. The model includes such phenomena as a thermal and phase transformation deformations as well as phase transformation induced plasticity. The mathematical description is adapted for integrating with thermal and phase transformation calculations and allows to take into account the thermal dependencies of mechanical steel parameters. A computer implementation of algorithm is presented.