ИНФОРМАТИКА

2008 январь-март № 1

УДК 519.711.3

О.И. Костюкова, М.А. Курдина

ОПТИМАЛЬНАЯ ГАРАНТИРОВАННАЯ СТРАТЕГИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

Рассматривается линейная терминальная задача управления динамической системой, на которую оказывают воздействие неизвестные заранее ограниченные помехи. Для такой системы обосновывается алгоритм построения оптимальной гарантированной стратегии управления с одним заданным промежуточным моментом коррекции. Предложенная стратегия управления гарантирует, что для любых допустимых возмущений из заданного класса в конечный момент времени терминальное состояние реальной системы окажется в заданной окрестности заданного состояния и гарантированное значение критерия качества примет минимально возможное значение.

Введение

Различают три основных подхода к формированию оптимизационных задач для управления динамическими объектами с неопределенностями [1, 2]:

1) программное оптимальное управление (open-loop optimal-feedback control);

2) программное оптимальное гарантированное управление (open-loop worst-case optimal-feedback control);

3) оптимальная гарантированная стратегия управления (closed-loop worst-case optimal receding horizon control).

В первом подходе задача формируется и решается в предположении, что все неопределенности известны заранее. Второй подход предполагает решение минимаксных оптимизационных задач, решением которых будет одна функция управления, рассчитанная на всевозможные допустимые помехи [1]. Здесь не учитывается тот факт, что в ходе реального процесса состояние системы может быть известно, поэтому зачастую возникают проблемы с существованием допустимых управлений. В третьем подходе учитывается возможность корректировать управление по ходу процесса, основываясь на информации о текущем состоянии реальной системы в некоторые моменты времени, и ищется *стратегия управления*, состоящая из законов управления, каждый из которых действует на своем временном интервале. Третий подход, безусловно, позволяет лучше управлять системой, чем предложенные первые два, но слишком сложен в практическом применении [1–5]. В связи с тем что в рамках третьего подхода возникают очень сложные задачи, которые требуется решать в процессе управления в режиме реального времени, в настоящий момент этот подход скорее является концептуальным, чем конструктивным [2]. Цель данной работы заключается в разработке конструктивных правил построения оптимальной гарантированной стратегии с одним промежуточным моментом коррекции.

В статье используются следующие обозначения: $\lambda_{\max}(S)$ – максимальное собственное число матрицы S; $\|y\|_S$ – взвешенная норма с некоторой положительно определенной матрицей S, $\|y\|_S^2 := y^T S y$, $\| y \|_2^2 = y^T y$; $\mathring{A}_n$ – единичная матрица размерности $n \times n$; $S \geq (\dot{>}) 0$ – неотрицательно (положительно) определенная матрица S.

1. Постановка задачи

Рассмотрим динамический объект, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = Az(t) + bu(t) + gw(t),\ t \in T = [0, t_*],\ \operatorname{rank}(b, Ab, ..., A^{n-1}b) = n, \tag{1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы; $u(t) \in \mathbb{R}$ – скалярное управление; $w(\cdot) = (w(t), t \in T)$ – неизвестная помеха из множества

$$\Omega = \left\{ w(\cdot) \in L_2(T) : \int_0^{t_1} w^2(t)dt \le v,\ \int_{t_1}^{t_*} w^2(t)dt \le v_* \right\};$$

матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторы $b, g \in \mathbb{R}^n$, моменты t_1, t_*, $t_1 \in (0, t_*)$, и числа $v > 0, v_* > 0$ считаются заданными. Обозначим $t_0 := 0,\ t_2 := t_*,\ T_i = [t_{i-1}, t_i],\quad i = 1, 2.$

Предполагается, что для $i = 1, 2$ в текущий момент времени t_{i-1} будет известно текущее состояние $z_{i-1} = z(t_{i-1})$ реальной системы (1) и можно будет корректировать управление, подаваемое на вход системы на отрезке T_i.

Рассмотрим стратегию управления

$$\pi = \big(u_1(\cdot \mid z_0),\, u_2(\cdot \mid z_1)\big),$$

состоящую из законов управления

$$u_i(\cdot \mid z_{i-1}) = (u_i(t \mid z_{i-1}),\, t \in T_i = [t_{i-1}, t_i]),\quad i = 1, 2,$$

каждый из которых действует на своем временном интервале T_i и зависит от n-вектора параметров $z_{i-1} \in \mathbb{R}^n$.

Для заданных числа $\delta_* > 0$ и n-вектора z_* требуется найти такую стратегию π, что:

а) траектория $z(t) = z(t \mid \pi, w(\cdot)),\ \ t \in T,$ системы

$$\dot z(t) = Az(t) + bu_i(t \mid z(t_{i-1})) + gw(t),\quad t \in T_i,\ \ i = 1, 2,\quad z(0) = z_0,$$

удовлетворяет соотношениям

$$\left\| z(t_* \mid \pi, w(\cdot)) - z_* \right\|_2^2 \le \delta_*^2,\quad \forall\, w(\cdot) \in \Omega\,; \tag{2}$$

б) значение критерия качества

$$J(\pi) = \max_{w(\cdot)\in\Omega} J(\pi, w(\cdot)),\ \ J(\pi, w(\cdot)) = \sum_{i=1}^{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u_i^2(t \mid z(t_{i-1} \mid \pi, w(\cdot)))dt\,, \tag{3}$$

принимает минимальное значение $\min\limits_{\pi} J(\pi)$.

Стратегию управления, являющуюся решением поставленной задачи, будем называть *оптимальной* и обозначать $\pi^0 = \big(u_1^0(\cdot \mid z_0),\, u_2^0(\cdot \mid z_1)\big)$.

Заметим, что рассматриваемая задача аналогична по постановке задаче из работы [6], но здесь изучается более реалистичная ситуация, когда отсутствует предположение об управляемости исходной системы относительно помехи.

2. Обоснование оптимальной стратегии управления

Введем в рассмотрение функции

$$Q(t,\tau) = \int_t^{\tau} F(\tau,t)g\big(F(\tau,t)g\big)^T dt\,,\ G(t,\tau) = \int_t^{\tau} F(\tau,t)b\big(F(\tau,t)b\big)^T dt\,,$$

где $F(t,\tau) = F(t)F^{-1}(\tau),\ F(t)$ – фундаментальная матрица решений системы $\dot x = Ax$. Обозначим

$$G = G(t_0,t_1),\ G_* = G(t_1,t_*),\ Q = Q(t_0,t_1),\ Q_* = Q(t_1,t_*),\ Q = NN^T,$$

$$N \in \mathbb{R}^{n\times r},\ r = \text{rank}\ (g, Ag, ..., A^{n-1}g),\ F_* = F(t_*,t_1),\ F = F(t_1,t_0).$$

Можно показать [6], что условие $\delta_*^2 \ge \nu_*\lambda_{\max}(Q_*)$ является необходимым и достаточным для существования стратегии π, удовлетворяющей неравенствам (2). Для простоты выкладок будем считать, что параметр δ_* принимает минимальное из возможных значение, т. е.

$$\delta_*^2 = \nu_*\lambda_{\max}(Q_*). \tag{4}$$

Для $i = 1,2$ будем различать номинальную

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu_i(t),\quad x(t_{i-1}) = z_{i-1},\quad t \in T_i, \tag{5}$$

и реальную системы

$$\dot{z}(t) = Az(t) + bu_i(t) + gw(t),\ \ z(t_{i-1}) = z_{i-1},\quad t \in T_i. \tag{6}$$

Положим $i = 2$. Пусть $z_1 \in \mathbb{R}^n$ – известное состояние реальной системы (6) в момент времени $t = t_1$. Согласно (4), для того чтобы состояние реальной системы (6) в момент времени $t = t_*$ попадало в заданную δ_*-окрестность вектора z_*, управление $u_2(t), t \in T_2 = [t_1, t_*]$, должно переводить номинальную систему (5) из состояния z_1 в момент времени $t = t_1$ в состояние z_* в момент времени $t = t_*$.

Согласно (3) среди всех таких управлений $u_2(t), t \in T_2$, нужно выбрать то, для которого функционал $\int_{t_1}^{t_*} u_2^2(t)dt$ принимает минимальное значение. Следуя результатам классической теории управления, можно показать, что искомое управление имеет вид

$$u_2^0(t) = u_2^0(t\,|\,z_1) = \left(z_* - F_* z_1\right)^T G_*^{-1} F(t_*,t),\ \ t \in T_2, \tag{7}$$

и задает оптимальный закон управления на интервале T_2 из оптимальной стратегии управления π^0. Значение целевого функционала при использовании такого закона управления на T_2 будет равно

$$J_1(z_1) := \left(z_* - F_* z_1\right)^T G_*^{-1}\left(z_* - F_* z_1\right) = \left\| z_* - F_* z_1 \right\|_{G_*^{-1}}^2.$$

Обоснуем теперь правила построения закона управления на первом отрезке $T_1 = [t_0, t_1]$. Положим $i = 1$. Пусть $z_0 \in \mathbb{R}^n$ – известное состояние реальной системы (6) в момент времени $t = t_0$. Предположим, что на первом временном отрезке в качестве управления используется некоторая функция $u_1(t),\ t \in T_1$. Под действием этого управляющего воздействия номинальная система (5) из состояния z_0 в момент времени t_0 попадет в некоторое состояние x_1 в момент времени t_1. При этом реальная система (6) в момент t_1 может оказаться в любом состоянии $z_1 = z(t_1)$ из множества

$$Z(x_1) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : z = x_1 + \int_{t_0}^{t_1} F(t_1,t) g w(t)dt,\ \int_{t_0}^{t_1} w^2(t)dt \le \nu \right\}. \tag{8}$$

Гарантированное значение критерия качества при использовании управления $u_1(t),\ t \in T_1$, на первом отрезке и закона управления (7) на втором отрезке равно

$$\int_{t_0}^{t_1} u_1^2(t)dt + \max_{z_1 \in Z(x_1)} J_1(z_1) = \int_{t_0}^{t_1} u_1^2(t)dt + \max_{z_1 \in Z(x_1)} \|z_* - F_* z_1\|^2_{G_*^{-1}}. \quad (9)$$

Из (9) видно, что среди всех возможных законов $u_1(t),\ t \in T_1$, переводящих номинальную систему (5) в состояние x_1, следует выбрать тот, на котором функционал $\int_{t_0}^{t_1} u_1^2(t)dt$ принимает наименьшее значение. Согласно классической теории оптимального управления такое управление имеет вид

$$u_1(t) = \left(x_1 - Fz_0\right)^T G^{-1} F(t_1, t),\ \ t \in T_1. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получаем следующее гарантированное значение критерия качества при использовании управления (10) на первом отрезке и закона управления (7) на втором отрезке:

$$\|x_1 - Fz_0\|^2_{G^{-1}} + \max_{z_1 \in Z(x_1)} \|z_* - F_* z_1\|^2_{G_*^{-1}}. \quad (11)$$

Ясно, что управление (10) будет оптимальным, если вектор x_1 доставляет минимальное значение функции (11), т. е. является решением следующей задачи:

$$J_0(z_0) = \min_{x_1 \in \mathbb{R}^n} \left(\|x_1 - Fz_0\|^2_{G^{-1}} + \max_{z_1 \in Z(x_1)} \|z_* - F_* z_1\|^2_{G_*^{-1}} \right). \quad (12)$$

Используя результаты леммы 1 (см. разд. 7), перепишем множество $Z(x_1)$ в более конструктивной форме: $Z(x_1) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \exists f \in \mathbb{R}^r,\ z = x_1 + Nf,\ f^T f \le v \right\}$. Тогда задача (12) примет вид

$$J_0(z_0) = \min_{x_1 \in \mathbb{R}^n} \left(\|x_1 - Fz_0\|^2_{G^{-1}} + \max_{z_1 \in \mathbb{R}^n,\, f \in \mathbb{R}^r} \|z_* - F_* z_1\|^2_{G_*^{-1}} \right),\quad z_1 = x_1 + Nf,\ f^T f \le v,$$

или

$$J_0(z_0) = \min_{x_1 \in \mathbb{R}^n} \left(\|x_1 - Fz_0\|^2_{G^{-1}} + \max_{f^T f \le v} \|z_* - F_* Nf - F_* x_1\|^2_{G_*^{-1}} \right). \quad (13)$$

Задача (13) является двухуровневой минимаксной задачей относительно n-вектора переменных x_1 на верхнем уровне и r-вектора переменных f на нижнем уровне. Для таких задач не существует стандартных методов решения, поэтому в общем случае найти решение этой задачи достаточно сложно. Однако используя специфику задачи (13), можно предложить эффективный метод ее решения. В основе этого метода лежит следующая теорема.

Теорема 1. *Рассмотрим задачу*

$$I(z_0) = \min_{\lambda \ge \mu} \left(\left(z_* - F_* F z_0\right)^T \bar{G}^{-1}(\lambda) \left(z_* - F_* F z_0\right) + \lambda v \right), \quad (14)$$

где $\mu = \lambda_{\max}\left(N^T F_*^T G_*^{-1} F_* N\right)$, $\bar{G}(\lambda) = F_* G F_*^T + G_* - F_* N N^T F_*^T / \lambda$. *Имеет место равенство* $J_0(z_0) = I(z_0)$, *и решения* $\lambda^0 \in \mathbb{R}$ *и* $x_1^0 \in \mathbb{R}^n$ *задач (14) и (13) связаны соотношением*

$$x_1^0 = x(z_0) = Fz_0 - GF_*^T \bar{G}^{-1}(\lambda^0)(F_* F z_0 - z_*). \tag{15}$$

Доказательство теоремы приведено в разд. 7.

Из теоремы 1 следует, что решение двухуровневой минимаксной задачи (13) (относительно n-вектора переменных x_1 на верхнем уровне и r-вектора переменных f на нижнем уровне) можно свести к решению задачи (14), которая является задачей минимизации скалярной функции

$$s(\lambda) := \left(\left(z_* - F_* F z_0 \right)^T \bar{G}^{-1}(\lambda) \left(z_* - F_* F z_0 \right) + \lambda v \right),\ \lambda \ge \mu, \tag{16}$$

относительно скалярного аргумента λ. Более того, можно показать, что функция (16) является выпуклой. Следовательно, решение задачи (14) легко находится. Действительно, подсчитаем производную $ds(\lambda)/d\lambda = -\|\psi(\lambda)\|^2/\lambda^2 + v$,

где
$$\psi(\lambda) := N^T F_*^T \bar{G}^{-1}(\lambda)(F_* F z_0 - z_*) \in \mathbb{R}^r. \tag{17}$$

Очевидно, в случае $ds(\mu)/d\lambda > 0$ число $\lambda^0 = \mu$ является решением задачи (14), а при $ds(\mu)/d\lambda \le 0$ решение задачи (14) имеет вид $\lambda^0 = \lambda^*$, где λ^* – единственное число, удовлетворяющее соотношениям

$$\| \psi(\lambda^*) \|^2 = \lambda^{*2} v,\ \ \lambda^* \ge \mu. \tag{18}$$

Согласно теореме 1 вектор (15), построенный по известному решению λ^0 задачи (14), является искомым решением задачи (13). Следовательно, закон управления $u_1^0(t \mid z_0),\ t \in T_1$, из оптимальной стратегии управления π^0 задается по правилу

$$u_1^0(t \mid z_0) = \left(x(z_0) - F z_0 \right)^T G^{-1} F(t_1, t),\ \ t \in T_1, \tag{19}$$

где вектор $x(z_0)$ определяется соотношением (15).

Таким образом, показано, что оптимальная стратегия управления π^0 состоит из законов управления (10) и (19).

3. Применение оптимальной стратегии управления π^0 в реальном процессе

Опишем правила использования построенных законов управления в конкретном процессе.

1. В момент времени $t_0 = 0$ по исходным данным и известному состоянию системы $z(t_0) = z_0$ формируем задачу (14). Находим ее решение λ^0 по описанным выше правилам и по формуле (15) вычисляем вектор $x(z_0)$. Этот вектор используем для построения закона управления $u_1^0(t \mid z(t_0)), t \in T_1$, согласно (10). Построенное управление подаем на вход системы на отрезке T_1.

2. Под действием найденного управления $u_1^0(t \mid z(t_0)), t \in T_1$, и реализовавшегося возмущения $w(t),\ t \in T_1$, реальная система в момент t_1 окажется в некотором состоянии $z(t_1)$, которое будет известно в этот момент.

3. В момент времени t_1, используя известное текущее состояние реальной системы $z(t_1)$, формируем управляющее воздействие $u_2^0(t \mid z(t_1)),\ t \in T_2$, по формуле (7) и подаем его на вход системы на отрезке T_2.

Описанные правила являются простыми и легко могут быть реализованы в процессе управления системой.

При использовании такой стратегии гарантируется, что при любом допустимом возмущении $w(t),\ t \in T$:

– состояние реальной системы в момент времени t_* окажется в δ_*-окрестности заданного состояния z_*;

– значение критерия качества $J(\pi^0, w(\cdot))$ не превысит гарантированного значения $J(\pi^0) = I(z_0)$;

– не существует других стратегий π^*, таких, для которых $J(\pi^*) < J(\pi^0)$.

Здесь функционал $J(\pi)$ определен согласно (3).

Подчеркнем, что в каждом конкретном процессе управляющие воздействия $u_1^0(t \mid z(t_0)),\ t \in T_1$, $u_2^0(t \mid z(t_1)),\ t \in T_2$, подаваемые на вход системы, будут зависеть от реализовавшихся в данном процессе начального состояния $z(t_0)$ и возмущения и, следовательно, могут быть разными в разных процессах.

4. Стратегия $\overline{\pi}$, основанная на классической обратной связи

Приведем еще одну стратегию управления $\overline{\pi}$, которая обеспечивает выполнение условий (2), легко реализуется, но не является оптимальной. Далее в разд. 5 будет проведено сравнение этой стратегии со стратегией π^0.

Стратегия $\overline{\pi}$ основана на идеях классической обратной связи: управление корректируется в процессе функционирования системы и при построении управляющих воздействий учитывается только текущее состояние системы, но не учитывается тот факт, что управление будет корректироваться в будущем. Используя результаты классической теории оптимального управления, можно показать, что стратегия $\overline{\pi} = \left(\overline{u}_1(\cdot \mid z_0), \overline{u}_2(\cdot \mid z_1)\right)$ состоит из законов

$$\overline{u}_1(t \mid z_0) = \left(z_* - F(t_*, t_0) z_0\right)^T \left(G(t_0, t_*)\right)^{-1} F(t_*, t),\ \ t \in [t_0, t_1];$$

$$\overline{u}_2(t \mid z_1) = \left(z_* - F(t_*, t_1) z_1\right)^T \left(G(t_1, t_*)\right)^{-1} F(t_*, t),\ \ t \in [t_1, t_*].$$

Гарантированное значение критерия качества для стратегии $\overline{\pi}$ найдем из выражения

$$J(\overline{\pi}) = \max_{w(\cdot)\in\Omega} J(\overline{\pi}, w(\cdot)),\ \ J(\overline{\pi}, w(\cdot)) = \sum_{i=1}^{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \overline{u}_i^2(t \mid z(t_{i-1} \mid \overline{\pi}, w(\cdot)))dt .$$

5. Численный эксперимент

В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

$$\int_0^{t_*} u^2(t)dt \to \min ,$$

$$\dot z_1 = z_2,\ \ \dot z_2 = 0{,}5u,\ \ \dot z_3 = z_4 + 2w,\ \dot z_4 = -z_3 + 0{,}5u,$$

$$z_1(t_*) = 0,\ \ z_2(t_*) = -2,\ \ z_3(t_*) = -2,\ \ z_4(t_*) = -2,\ \ t_* = 10\pi,$$

$$\Omega = \left\{ w(\cdot) : \int_0^{t_1} w^2(t)dt \le v_1 = 0{,}8,\ \int_{t_1}^{t_*} w^2(t)dt \le v_2 = 0{,}5 \right\},\ t_1 = 6\pi,$$

$$z_1^2(t_*) + z_2^2(t_*) + z_3^2(t_*) + z_4^2(t_*) \le \delta_*^2,\ \delta_* = 3{,}6 .$$

Система такого вида описывает движение погрузчика руды [7].

Предположим, что в момент $t_0 = 0$ система находится в состоянии $z_1(0) = 0,\quad z_2(0) = 2,$ $z_3(0) = 2,\quad z_4(0) = 2.$ Подсчитаем гарантированные значения оптимальной стратегии π^0 и стратегии $\bar{\pi}$, основанной на классической обратной связи: $J(\pi^0) = 35{,}943$, $J(\bar{\pi}) = 45{,}916$. Отметим, что в рассматриваемом примере $r = \operatorname{rank}(g, Ag, A^2g, A^3g) = 2 < n = 4$.

Приведем для сравнения значения критериев качества $J(\pi^0, \bar{w})$ и $J(\bar{\pi}, \bar{w})$ предложенных стратегий на различных допустимых возмущениях. В таблице указаны некоторые конкретные допустимые возмущения и соответствующие им значения $J(\pi^0, \bar{w})$, $J(\bar{\pi}, \bar{w})$.

Таблица

$\bar{w}(\cdot)$ / $J(\pi, \bar{w})$	$\frac{1}{5}\sin(t)$	0	$\frac{1}{5}\cos(t)$	$\frac{1}{5}\sin(t+\pi/3)$	$\frac{1}{5}\sin(t^2)$	$\frac{1}{7}\left(\cos(t)+\sin(t)\right)$
$J(\pi^0, \bar{w})$	24,9376	14,1235	24,7928	25,2706	14,2676	25,4449
$J(\bar{\pi}, \bar{w})$	27,0152	10,2875	28,8282	31,2082	11,1387	31,4554

Подчеркнем, что нельзя заранее определить, какая из стратегий π^0 или $\bar{\pi}$ даст лучшее значение критерия качества $J(\pi^0, \bar{w})$ или $J(\bar{\pi}, \bar{w})$ на конкретном возмущении $\bar{w}(t),\ t \in T$. Однако отметим, что существует допустимое возмущение $\tilde{w}(t),\ t \in T,$ для которого $J(\bar{\pi}, \tilde{w}) = 45{,}916$, но для всех допустимых возмущений верно неравенство $J(\pi^0, w) \le 35{,}943$.

6. Обобщения

Полученные результаты можно использовать для решения более сложных задач. Рассмотрим, например, следующую задачу.

Пусть имеется некоторый динамический объект, поведение которого описывается системой вида (1). Требуется управлять этим объектом таким образом, чтобы при любом допустимом возмущении в заданные моменты времени $0 = t_{*0} < t_{*1} < \ldots < t_{*m-1} < t_{*m} = t_*$ обеспечить попадание реальной системы (1) в заданные δ_{*i}-окрестности заданных состояний z_{*i}. Относительно возмущений известно, что они принадлежат множеству

$$\Omega_* := \{ w(\cdot) \in L_2(T) : \int_{T_{1i}} w^2(t)dt \le v_i, \quad \int_{T_{2i}} w^2(t)dt \le v_{*i}, \quad i = 1, \ldots, m \},$$

где $T_{1i} = [t_{*i-1}, \tau_i]$, $T_{2i} = [\tau_i, t_{*i}]$, τ_i – заданный момент из интервала (t_{*i-1}, t_{*i}). Качество управления оценивается функционалом $\int_{t_0}^{t_*} u^2(t)dt$.

Предполагается, что в текущие моменты времени t_{*i-1} и τ_i, $i = 1, \ldots, m,$ будут известны соответствующие текущие состояния $z_{*i-1} = z(t_{*i-1})$ и $z_{i-1} = z(\tau_{i-1})$ реальной системы (1) и можно будет корректировать управление, подаваемое на вход системы на отрезках $T_{1i} = [t_{*i-1}, \tau_i]$ и $T_{2i} = [\tau_i, t_{*i}]$ соответственно.

Покажем, как для решения такой задачи использовать описанные выше результаты. Для всех $i = 0, \ldots, m-1$ выполним следующие действия:

1. В момент времени t_{*i} по исходным данным и известному состоянию системы $z(t_{*i})$ формируем задачу (14), положив в ней $z_0 := z(t_{*i})$ и

$$t_0 := t_{*i}, \quad t_1 := \tau_{i+1}, \ t_* := t_{*i+1}, \ z_* := z_{*i+1}, \ v := v_i. \qquad (20)$$

Находим решение λ^0 задачи (14) и по формуле (15) вычисляем вектор $x(z_0)=x(z(t_{*i}))$. Этот вектор используем для построения закона управления $u^0_{1i+1}(t\,|\,z(t_{*i})),\ t\in T_{1\,i+1}$, по правилам (19). Построенное управление подаем на вход системы на отрезке $T_{1\,i+1}$.

2. Под действием найденного управления $u^0_{1i+1}(t\,|\,z(t_{*i})),\ t\in T_{1\,i+1}$, и реализовавшегося возмущения $w(t),\ t\in T_{1\,i+1}$, реальная система в момент τ_{i+1} окажется в некотором состоянии $z(\tau_{i+1})$, которое будет известно в этот момент.

3. В момент времени τ_{i+1}, используя известное текущее состояние реальной системы $z(\tau_{i+1})$, формируем управляющее воздействие $u^0_{2i+1}(t\,|\,z(\tau_{i+1})),\ t\in T_{2\,i+1}$, по формуле (7) и подаем его на вход системы на отрезке $T_{2\,i+1}$.

Использование предложенных правил гарантирует, что при любом допустимом возмущении:

– состояние реальной системы в момент времени t_{*i} окажется в δ_{*i}-окрестности заданного состояния z_{*i}, $i=1,\dots,m$;

– значение критерия качества на реализовавшемся управлении не превзойдет величины $\sum_{i=0}^{m-1}\max_{z_0\in B_i} I_i(z_0)$, где $B_i=\left\{z\in\mathbb{R}^n : \|z-z_{*i}\|_2^2\le\delta_{*i}\right\}$ и функция $I_i(z_0)$ определяется согласно (14) при данных (20).

Следует отметить, что для решения такой достаточно сложной задачи в каждый текущий момент $t_{*i},\ i=0,\dots,m-1,$ решается всего одна задача минимизации скалярной функции скалярного аргумента. Это позволяет успешно использовать предложенный способ управления в режиме реального времени, что дает право говорить о конструктивности предложенной стратегии управления.

7. Доказательство леммы 1 и теоремы 1

Лемма 1. *Рассмотрим множество*

$$\bar{Z}(x)=\left\{z\in\mathbb{R}^n : \exists f\in\mathbb{R}^r,\ z=x+Nf,\ f^Tf\le v\right\}.$$

Верно соотношение $Z(x)=\bar{Z}(x)$, *где множество* $Z(x)$ *определено согласно* (8).

Доказательство. Пусть $\bar{z}$ принадлежит границе множества $Z(x)$. Это означает, что $\bar{z}=x+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)g\bar{w}(t)dt,\quad \int_{t_0}^{t_1}\bar{w}^2(t)dt=v$. Из условия $Q=\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)g\left(F(t_1,t)g\right)^Tdt=NN^T$ следует, что для любого $\bar{z}\in Z(x)$ существует вектор $\bar{f}\in\mathbb{R}^r$, такой, что $\bar{z}-x=N\bar{f}$.

Предположим, что $\bar{z}\notin\bar{Z}(x)$, т. е.

$$\bar{f}^T\bar{f}>v. \tag{21}$$

Построим возмущение по правилам

$$\tilde{w}(t)=\alpha\bar{f}^TN^TMF(t_1,t)g=\alpha\bar{f}^T\left(N^TN\right)^{-1}N^TF(t_1,t)g,\quad t\in[t_0,t_1],$$

где число α задается соотношением $\alpha^2=v/(\bar{f}^T\bar{f}),\ M$ – обобщенная обратная матрица к матрице Q: $M=N(N^TN)^{-2}N^T$, $\det\,(N^TN)\ne 0.$ В результате по построению $\int_{t_0}^{t_1}\tilde{w}^2(t)dt=v.$

Рассмотрим новый вектор $\tilde{z} := x + \int_{t_0}^{t_1} F(t_1,t) g\tilde{w}(t)dt$. Обозначим $\overline{\Delta} = \overline{z} - x$, $\tilde{\Delta} = \tilde{z} - x$, и вычислим разность

$$J := \|\tilde{\Delta}\|_M^2 - \|\overline{\Delta}\|_M^2 = \|\tilde{\Delta} - \overline{\Delta}\|_M^2 + 2\overline{\Delta}^T M(\tilde{\Delta} - \overline{\Delta})$$

$$= \|\tilde{\Delta} - \overline{\Delta}\|_M^2 + 2(\overline{z} - x)M\int_{t_0}^{t_1} (\tilde{w}(t) - \overline{w}(t))F(t_1,t)gdt = \tag{22}$$

$$= \|\tilde{\Delta} - \overline{\Delta}\|_M^2 + 2\int_{t_0}^{t_1} \left(\tilde{w}(t) - \overline{w}(t)\right)\left(\overline{z} - x\right)MF(t_1,t)gdt = \|\tilde{\Delta} - \overline{\Delta}\|_M^2 + 2\int_{t_0}^{t_1} \frac{\overline{w}(t)\left(\tilde{w}(t) - \overline{w}(t)\right)}{\alpha}dt.$$

Так как $\int_{t_0}^{t_1} \tilde{w}^2(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \overline{w}^2(t)dt$, то

$$2\int_{t_0}^{t_1} \tilde{w}(t)\left(\overline{w}(t) - \tilde{w}(t)\right)dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(\overline{w}(t) - \tilde{w}(t)\right)^2 dt = 0. \tag{23}$$

Умножим (23) на $1/\alpha$ и прибавим (22):

$$J = \|\tilde{\Delta}\|_M^2 - \|\overline{\Delta}\|_M^2 = \|\tilde{\Delta} - \overline{\Delta}\|_M^2 + \frac{1}{\alpha}\int_{t_0}^{t_1} \left(\overline{w}(t) - \tilde{w}(t)\right)^2 dt \geq 0 \text{ для любого } \alpha > 0.$$

В результате получаем

$$\|\tilde{\Delta}\|_M^2 \geq \|\overline{\Delta}\|_M^2 > v. \tag{24}$$

С другой стороны, можно показать, что

$$\|\tilde{\Delta}\|_M^2 = \alpha^2 \|\overline{\Delta}\|_M^2 = v. \tag{25}$$

Действительно, $(\tilde{z} - x)^T = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{w}(t)\left(F(t_1,t)g\right)^T dt = \alpha(\overline{z} - x)^T MQ$, откуда следует

$$|\tilde{\Delta}\|_M^2 = (\tilde{z} - x)^T M(\tilde{z} - x) = \alpha^2(\overline{z} - x)^T M(\overline{z} - x) = \alpha^2 \|\overline{\Delta}\|_M^2 .$$

По построению $\alpha^2 \|\overline{\Delta}\|_M^2 = v$. Равенство (25) доказано.

Равенства (24) и (25) противоречат друг другу. Это свидетельствует о том, что неравенство (21) не может иметь место. Значит, $\overline{z} \in \overline{Z}(x)$ для любых $\overline{z}$, принадлежащих границе множества $Z(x)$. Следовательно, $Z(x) \subset \overline{Z}(x)$, так как множество $Z(x)$ выпукло.

Покажем теперь, что $\overline{Z}(x) \subset Z(x)$. Рассмотрим вектор $\overline{z} \in \overline{Z}(x)$. Тогда существует такой вектор $\overline{f} \in \mathbb{R}^r$, что $\overline{z} - x = N\overline{f}$, $\overline{f}^T\overline{f} \leq v$. Построим новое возмущение по правилам $\overline{w}(t) = = (\overline{z} - x)^T MF(t_1,t)g$, $t \in [t_0,t_1]$. Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} \overline{w}^2(t)dt = (\overline{z} - x)^T MQM(\overline{z} - x) = (\overline{z} - x)^T M(\overline{z} - x) = \overline{f}^T\overline{f} \leq v;$$

$$\overline{z} - x - \int_{t_0}^{t_1} \overline{w}(t)\, F(t_1,t)gdt = \left(\overline{z} - x\right) - QM\left(\overline{z} - x\right) = \left(E_n - QM\right)\left(\overline{z} - x\right) = \left(E_n - QM\right)N\overline{f} = 0 .$$

Эти соотношения означают, что $\bar{z} \in Z(x)$ и, следовательно, $\bar{Z}(x) \subset Z(x).$ Лемма 1 доказана.

Приведем теперь доказательство теоремы 1. Для упрощения выкладок введем обозначения $x := x_1$, $a := Fz_0$, $b := z_*$. Тогда задачи (12) и (13) перепишем в виде

$$J_0(z_0) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x - a\|^2_{G^{-1}} + \max_{f^T f \le v} \|b - F_* N f - F_* x\|^2_{G_*^{-1}}; \tag{26}$$

$$I(z_0) = \min_{\lambda \ge \mu} \Big((b - F_* a)^T \bar{G}^{-1}(\lambda)(b - F_* a) + \lambda v \Big). \tag{27}$$

Здесь $\mu = \lambda_{\max}\left(N^T F_*^T G_*^{-1} F_* N\right)$, $\bar{G}(\lambda) = F_* G F_*^T + G_* - F_* N N^T F_*^T/\lambda.$ С учетом новых обозначений требуется доказать, что $I(z_0) = J_0(z_0)$, а также то, что решения $\lambda^0 \in \mathbb{R}$ и $x^0 \in \mathbb{R}^n$ задач (27) и (26) связаны соотношением

$$x^0 = a - G F_*^T \bar{G}^{-1}(\lambda^0)(F_* a - b). \tag{28}$$

Сначала покажем, что $\bar{G}(\lambda) \dot{>} 0$ для всех $\lambda \ge \mu$ и, следовательно, матрица $\bar{G}(\lambda)$ невырожденная. Для этого покажем, что $G_* - F_* N N^T F_*^T/\lambda \dot{\ge} 0$ при $\lambda \ge \mu.$ Очевидно, последнее условие эквивалентно условию

$$\mathring{A}_n - G_*^{-\frac{1}{2}} F_* N N^T F_*^T G_*^{-\frac{1}{2}} / \lambda \dot{\ge} 0, \ \lambda \ge \mu. \tag{29}$$

Соотношение (29) выполняется, если верно неравенство $\lambda_{\max}\left(G_*^{-\frac{1}{2}} F_* N N^T F_*^T G_*^{-\frac{1}{2}}\right) \le \mu.$

Обозначим через $S = G_*^{-\frac{1}{2}} F_* N \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\operatorname{rank} S = r.$ Опираясь на результаты [8], можно доказать, что $\lambda_{\max}(S^T S) = \lambda_{\max}(S S^T).$ Следовательно,

$$\lambda_{\max}\left(G_*^{-\frac{1}{2}} F_* N N^T F_*^T G_*^{-\frac{1}{2}}\right) = \lambda_{\max}\left(N^T F_*^T G_*^{-1} F_* N\right) = \mu.$$

Последнее равенство означает, что для всех $\lambda \ge \mu$ верно $G_* - F_* N N^T F_*^T/\lambda \dot{\ge} 0$, отсюда заключаем, что $\bar{G}(\lambda) = F_* G F_*^T + G_* - F_* N N^T F_*^T/\lambda \dot{>} 0$.

Докажем теперь утверждения теоремы. В задаче (26) для фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим задачу нижнего уровня

$$\max_{f^T f \le v} \|b - F_* N f - F_* x\|^2_{G_*^{-1}}. \tag{30}$$

Обозначим через $D := N^T F_*^T G_*^{-1} F_* N \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Учитывая сделанные предположения, получаем $\det D \ne 0.$ Далее понадобится следующее представление матрицы D: $D = U \Lambda U^T$, где $U^T U = E_r$, $U = (U_1, U_2, \ldots, U_r)$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$, $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_r$ и U_i, $i = 1, \ldots, r,$ – собственные числа и собственные векторы матрицы D.

Пусть $\mu = \lambda_r$, $I_* = \{1 \le i \le r : \lambda_i = \mu\}$, $U_* = (U_i, i \in I_*).$ Согласно результатам из работы [9] вектор $f \in \mathbb{R}^r$ является оптимальным решением задачи (30) тогда и только тогда, когда существует такое число λ, что

$$(-D + \lambda E_r) f + N^T F_*^T G_*^{-1}(b - F_* x) = 0, \ f^T f = v, \ \lambda \ge \mu. \tag{31}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$g(x) := \|x-a\|^2_{G^{-1}} + \max_{f^T f \le v} \|b - F_* N f - F_* x\|^2_{G_*^{-1}}, \ \ x \in \mathbb{R}^n,$$

тогда задачу (26) можно переписать в виде

$$g(x) \to \min, \ \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{32}$$

Рассмотрим функцию $\psi(\lambda)$, определенную в (16), и положим $\psi^* = \psi(\mu)$.

Будем различать два случая:

$$\text{А. } \|\psi^*\|^2 < \mu^2 v; \quad \text{Б. } \|\psi^*\|^2 \ge \mu^2 v.$$

Случай А. Множество векторов $\beta^{(k)} = \dfrac{U_*^T \psi^*}{\lambda_{\max}} \mu_k$, $k = 1, 2$, $\mu_1 = 1 + \mu_0 > 0$, $\mu_2 = 1 - \mu_0 < 0$, $\mu_0 = \sqrt{\lambda^2_{\max} v - \|\psi^*\|^2 + \|U_*^T \psi^*\|^2} / \|U_*^T \psi^*\| > 1$ удовлетворяет соотношению

$$\|\psi^*\|^2 - 2\mu \beta^T U_*^T \psi^* + \mu^2 \|\beta\|^2 = \mu^2 v. \tag{33}$$

Утверждение 1. *В случае А вектор*

$$x^0 = a - G F_*^T \overline{G}^{-1}(\mu)(F_* a - b) \tag{34}$$

является оптимальным решением задачи (32).

Доказательство. Покажем, что для $k = 1$ и $k = 2$ тройки

$$f^0 = \psi^*/\mu - U_* \beta^{(k)}, \lambda = \mu, \ \ x^0 = a - G F_*^T \overline{G}^{-1}(\mu)(F_* a - b) \tag{35}$$

удовлетворяют соотношениям (31). С учетом (33) получим

$$f^{0T} f^0 = \left(\psi^*/\mu - U_* \beta^{(k)}\right)^T \left(\psi^*/\mu - U_* \beta^{(k)}\right) = v.$$

Вычислим

$$(-D + \mu E_r)\left(\psi^*/\mu - U_* \beta^{(k)}\right) + N^T F_*^T G_*^{-1}[b - F_* a + F_* G F_*^T \overline{G}^{-1}(\mu)(F_* a - b)] =$$

$$= \psi^* - \frac{D\psi^*}{\lambda_*} + N^T F_*^T G_*^{-1} F_* N \frac{N^T F_*^T \overline{G}^{-1}(\mu)(F_* a - b)}{\mu} - N^T F_*^T \overline{G}^{-1}(\mu)(F_* a - b) =$$

$$= \psi^* - \frac{D\psi^*}{\mu} + \frac{D\psi^*}{\mu} - \psi^* = 0.$$

Отсюда следует, что тройки (35) удовлетворяют соотношениям (31). Тогда

$$\max_{f^T f \le v} \|b - F_* N f - F_* x^0\|^2_{G_*^{-1}} = \|b - F_* N f^0 - F_* x^0\|^2_{G_*^{-1}}$$

и, следовательно,

$$g(x^0) = \|x^0 - a\|^2_{G^{-1}} + \|b - F_* N f^0 - F_* x^0\|^2_{G_*^{-1}}.$$

Рассмотрим произвольный вектор $\overline{x} = x^0 + \Delta x \in \mathbb{R}^n$. Очевидно,

$$g(\overline{x}) - g(x^0) \geq \|\overline{x} - a\|^2_{G^{-1}} + \|b - F_* Nf^0 - F_* \overline{x}\|^2_{G_*^{-1}} - \|x^0 - a\|^2_{G^{-1}} - \|b - F_* Nf^0 - F_* x^0\|^2_{G_*^{-1}} =$$
$$= \Delta x^T G^{-1} \Delta x + \Delta x^T F^T G_*^{-1} F_* \Delta x + 2\Delta x^T F_*^T G_*^{-1} F_* Nf^0 - 2\Delta x^T F_*^T G_*^{-1} F_* N \psi^* / \mu = \tag{36}$$
$$= \Delta x^T G^{-1} \Delta x + \Delta x^T F_*^T G_*^{-1} F_* \Delta x + 2\Delta x^T F_*^T G_*^{-1} F_* N U_* \beta^{(k)} / \mu.$$

Будем полагать

$$f^0 = \psi^* / \mu + U_* \beta^{(1)},$$

если

$$\Delta x^T F_*^T G_*^{-1} F_* N U_* U_*^T \psi^* \geq 0,$$

и

$$f^0 = \psi^* / \mu + U_* \beta^{(2)},$$

если

$$\Delta x^T F_*^T G_*^{-1} F_* N U_* U_*^T \psi^* < 0.$$

По построению верно неравенство

$$\Delta x^T F_*^T G_*^{-1} F_* N U_* \beta^{(k)} \geq 0. \tag{37}$$

Из (36) и (37) следует, что $g(\overline{x}) - g(x^0) \geq 0$ для всех $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, если вектор ψ^* удовлетворяет условию А, то вектор (34) является решением задачи (32). Утверждение 1 доказано.

Случай Б. Рассмотрим функцию $\psi(\lambda)$, определенную по правилам (16). Нетрудно показать, что в случае Б существует единственное число λ^*, для которого справедливы соотношения (31). Можно проверить, что тройка

$$f^* = \psi(\lambda^*) / \lambda^*, \quad x^* = a - GF_*^T \overline{G}^{-1}(\lambda^*)(F_* a - b), \quad \lambda = \lambda^*,$$

удовлетворяет условиям (31). Отсюда следует, что

$$\max_{f^T f \leq v} \|b - F_* Nf - F_* x^*\|^2_{G_*^{-1}} = \|b - F_* Nf^* - F_* x^*\|^2_{G_*^{-1}}.$$

Утверждение 2. *В случае Б вектор*

$$x^* = a - GF_*^T \overline{G}^{-1}(\lambda^*)(F_* a - b)$$

является оптимальным решением задачи (32).

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $\overline{x} = x^* + \Delta x \in \mathbb{R}^n$. Подсчитаем приращение целевой функции

$$g(\overline{x}) - g(x^*)) \geq \|x^* + \Delta x - a\|^2_{G^{-1}} + \|b - F_* Nf^* - F_* x^* - F_* \Delta x\|^2_{G_*^{-1}} - \|x^* - a\|^2_{G^{-1}} - \|b - F_* Nf^* - F_* x^*\|^2_{G_*^{-1}} =$$
$$= 2\Delta x^T G^{-1}(x^* - a) + \Delta x^T G^{-1} \Delta x - 2\Delta x^T F_*^T G_*^{-1}(b - F_* Nf^* - F_* x^*) + \Delta x^T F_*^T G_*^{-1} F_* \Delta x =$$
$$= \Delta x^T G^{-1} \Delta x + \Delta x^T F_*^T G_*^{-1} F_* \Delta x \geq 0.$$

Так как $G \dot{>} 0$ и $G_* \dot{>} 0$, заключаем, что $g(\overline{x}) \geq g(x^*)$ для любых $\overline{x} \neq x^*$. Это означает оптимальность вектора x^* в задаче (32). Утверждение 2 доказано.

Рассмотрим функцию $s(\lambda) = (b - F_* a)^T \bar{G}^{-1}(\lambda)(b - F_* a) + \lambda v.$ Тогда задачу (27) можно переписать в виде

$$s(\lambda) \to \min, \;\; \lambda \geq \mu \; .$$

Можно вычислить производную $ds(\lambda)/d\lambda = -\|\psi(\lambda)\|^2/\lambda^2 + v,$ где функция $\psi(\lambda)$ задается по правилам (16). Очевидно, что в случае А выполняется неравенство $ds(\mu)/d\lambda > 0$ и, следовательно, $\lambda^0 = \mu$ – решение задачи (27). Также очевидно, что в случае Б $ds(\mu)/d\lambda \leq 0$ и, следовательно, $\lambda^0 = \lambda^*$ – решение задачи (27). Здесь $\lambda^* \geq \mu$ – единственное решение уравнения (18).

С учетом последних выводов и утверждений 1, 2 заключаем, что задачи (26) и (27) эквиваленты, и их решения $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda^0 \in \mathbb{R}$ соответственно связаны соотношением (28). Теорема 1 доказана.

Заключение

В статье рассмотрена линейная динамическая система управления с ограниченными по энергии помехами. Требование об управляемости системы относительно помехи отсутствует. Для данной системы предложена и обоснована оптимальная гарантированная стратегия управления, допускающая корректировку управляющего воздействия в один заданный промежуточный момент времени и обеспечивающая выполнение терминального ограничения и наилучшее гарантированное значение критерия качества при любой допустимой реализации помехи.

Показано, что построение данной стратегии сводится к решению специальной двухуровневой минимаксной задачи с n-вектором переменных на верхнем уровне и r-вектором переменных на нижнем уровне. Учет специфики данной задачи позволил предложить эффективный метод ее решения. На основе этих результатов описаны простые явные правила построения оптимальной гарантированной стратегии управления, позволяющие осуществить ее реализацию в режиме реального времени.

Результаты настоящей работы допускают обобщение в ряде направлений, в частности, на случай произвольного числа точек коррекции и наличия промежуточных ограничений на состояние системы.

Список литературы

1. Lee, J.H. Worst-case formulation of model predictive control for systems with bounded parameters / J.H. Lee, Z. Yu // Automatica. – 1997. – Vol. 33, № 5. – P. 763–781.

2. Constrained model predictive control: Stability and optimality / D.Q. Mayne [et al.] // Automatica. – 2000. – Vol. 36. – P. 789–814.

3. Bemporad, A. Min-Max control of constrained uncertain discrete-time linear systems / A. Bemporad, F. Borrelli, M. Morari // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2003. – Vol. 48, № 9. – P. 1600–1606.

4. Scokaert, P.M. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems / P.M. Scokaert, D.Q. Mayne // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1998. – Vol. 43, № 8. – P. 1136–1142.

5. Robust model predictive control using tubes / W. Langson [et al.] // Automatica. – 2004. – Vol. 40. – P. 125–133.

6. Kostyukova, O. Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances / O. Kostyukova, E. Kostina // Mathematical Programming. – 2006. – Vol. 107, № 1–2. – P. 131–153.

7. Hippe, R. Zeitoptimale Steuerung eines Erzentladers / R. Hippe // Regelungstechnik und Proze. Datenverabeitung. – 1970. – Heft 8. – P. 346–350.

8. Магнус, Я.Р. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике / Я.Р. Магнус, Х. Нейдеккер. – М.: Физматлит, 2002. – 496 с.

9. More, J. Computing a trust region step / J. More, D.C. Sorensen // SIAM J. Sci. Stat. Comput. – 1983. – Vol. 4, № 3. – P. 553–572.

Поступила 02.08.07

Институт математики НАН Беларуси,
Минск, ул. Сурганова, 11
e-mail: kostyukova@im.bas-net.by

O.I. Kostyukova, M.A. Kurdina

OPTIMAL GUARANTEED STRATEGY OF DYNAMIC SYSTEMS WITH UNCERTAINTIES CONTROL

A terminal linear dynamic control system under the influence of unknown beforehand but bounded disturbances is considered. For this system, an algorithm of constructing optimal worst-case control strategy to be corrected at a fixed intermediate time moment is justified. For all admissible uncertainties, the proposed strategy ensures that the terminal system state lies in a prescribed neighborhood of a given state at a given final moment and the guaranteed value of the cost function is the minimal value.