ИНФОРМАТИКА

2009 октябрь-декабрь № 4

УДК 004.5; 621.38

Е.А. Шестаков, А.А. Воронов

МЕТОД ПОКРЫТИЯ МНОГОСВЯЗНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА МНОЖЕСТВОМ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Рассматривается метод формирования покрытия многосвязных объектов топологии прямоугольниками, где объектами исследования являются многосвязные конечные области плоскости. Области применения результатов работы – вычислительная геометрия и методы анализа изображений.

Введение

При производстве многих микроэлектронных устройств возникает задача формирования топологических структур на металлизированных фотошаблонах [1]. Эти структуры формируются с помощью специальных генераторов изображений. Генераторы изображений строят топологию на фотошаблоне из наборных элементов в виде прямоугольников. Создание посредством таких генераторов произвольных изображений топологических структур требует предварительного разложения (декомпозиции) описания этих структур (многосвязных многоугольников) на множество прямоугольников, объединение которых с заданной точностью совпадает с описанием соответствующих исходных структур. При этом число прямоугольников, входящих в множество, должно быть минимальным или близким к минимальному. По полученному множеству прямоугольников формируется оптимальная входная последовательность, которая кодируется в соответствии с правилами входного языка соответствующего генератора изображений.

Задача декомпозиции многосвязного многоугольника не является новой. Разработано несколько методов ее решения [1–6]. Наиболее интересными являются переборные алгоритмы [1, 2] и алгоритмы сканирующего типа [3, 4]. Переборные алгоритмы просты в реализации, но оказываются эффективными лишь при покрытии небольших по числу вершин многосвязных многоугольников. Алгоритмы сканирующего типа эффективны по быстродействию и дают возможность получать покрытия, близкие к минимальному. Существуют также различные комбинации данных методов [5–9]. Тем не менее при проектных нормах меньше 1 мкм возникают значительные трудности при генерации изображений, так как возрастают степень интеграции микросхем и сложность топологии. Поэтому актуальна разработка новых более эффективных методов решения задачи покрытия прямоугольниками объектов топологии микросхем, которые описываются многоугольниками.

1. Основные определения, постановка задачи

Точки плоскости a и b, заданные соответственно координатами (x_a, y_a) и (x_b, y_b) в декартовой системе, где x и y – переменные, связанные соответственно с осью абсцисс (OX) и с осью ординат (OY), совпадают, если $x_a = x_b$ и $y_a = y_b$. Если хотя бы одно из этих равенств не выполняется, то точки считаются различными. *Отрезком* ab называется пара различных точек a и b плоскости, соединенных прямой линией. Точки плоскости, находящиеся на этой прямой, принадлежат данному отрезку. Точки a и b отрезка ab называются *граничными*. Рассмотрим различные точки плоскости: $a, b, c, d, \dots, k, m$. Соединим эти точки отрезками $ab, bc, cd, \dots, km, ma$. Получим замкнутую ломаную, которую обозначим через $L = abcd\dots km$. Точки $a, b, c, d, \dots, k, m$ называются *вершинами* ломаной L, а отрезки $ab, bc, cd, \dots, km, ma$ – *сторонами* ломаной L. Две стороны ломаной L называются *соседними*, если одна из их граничных точек является общей. Общую граничную точку соседних сторон назовем *точкой соединения*.

Два отрезка пересекаются, если существует хотя бы одна точка плоскости, принадлежащая каждому из них. Если такая точка отсутствует, то отрезки не пересекаются.

Замкнутая ломаная L является *непересекающейся*, если любая общая для двух сторон точка является граничной для этих и только для этих сторон. В дальнейшем непересекающуюся ломаную будем называть контуром.

Рассмотрим некоторый контур L. Этот контур делит плоскость на две части. Одна часть содержит точки плоскости, находящиеся внутри контура L и на его сторонах, другая – точки плоскости, находящиеся вне контура L. Под *многоугольником* M будем понимать часть плоскости, находящуюся внутри контура L и на его сторонах.

Многосвязный многоугольник W представляется последовательностью непересекающихся контуров: $L_1, L_2, \ldots, L_g$. В этой последовательности контур L_1 называется основным, а контуры $L_2, \ldots, L_g$ – контурами-разрезами. При этом контуры-разрезы находятся внутри основного контура, т. е. все точки, лежащие на их сторонах, являются внутренними точками основного контура. Многосвязный многоугольник задает точки плоскости, находящиеся на границах представляющих его контуров, а также точки плоскости, находящиеся внутри основного контура, но не внутри контуров-разрезов.

Прямоугольник принадлежит многосвязному многоугольнику, если любая точка плоскости, расположенная внутри или на границе этого прямоугольника, находится внутри или на границе многосвязного многоугольника.

Прямоугольник называется *h-допустимым*, если длина любой из его сторон не меньше некоторой величины h, которая является положительным вещественным числом, большим нуля.

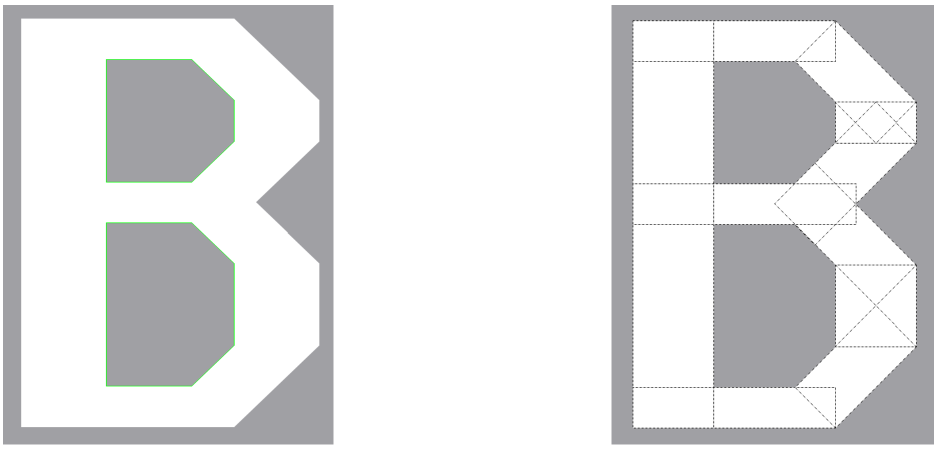
Точка плоскости r, расположенная внутри или на границе многосвязного многоугольника, называется h-покрываемой, если точка r h-допустимого прямоугольника, принадлежащего данному многосвязному многоугольнику, находится на границе или внутри данного прямоугольника.

Заметим, что в многосвязном многоугольнике могут существовать точки, расположенные около острых внутренних углов, которые не являются h-покрываемыми. Так, точка плоскости, находящаяся в вершине острого внутреннего угла, не является h-покрываемой для любой величины h, сколь малой она бы не была.

Под покрытием V многосвязного многоугольника W понимается совокупность h-допустимых прямоугольников, удовлетворяющих следующим условиям:

1) всякий прямоугольник из данной совокупности принадлежит многосвязному многоугольнику W;

2) для всякой h-покрываемой точки r многосвязного многоугольника W найдется хотя бы один прямоугольник этой совокупности, точка r которого находится на границе или внутри данного прямоугольника.



а) *б)*

Рис. 1. Многосвязный многоугольник, содержащий:
а) два контура-разреза; *б)* покрытие

Если при этом покрытие V многосвязного многоугольника W состоит из h-допустимых прямоугольников, то V покрывает многосвязный многоугольник W с точностью h.

Покрытие V, удовлетворяющее данным условиям, корректно. Если в многосвязном многоугольнике W существуют h-покрываемые точки, такие, что в покрытии V отсутствуют прямоугольники, содержащие их, то будем называть данное покрытие некорректным.

В настоящей работе рассматривается следующая задача: необходимо найти для многосвязного многоугольника W корректное покрытие V, состоящее из минимального или близкого к минимальному числа h-допустимых прямоугольников.

Пример 1. Рассмотрим многосвязный многоугольник W (рис. 1), который задается основным контуром L_1 и контурами-разрезами L_2, L_3.

Основной контур L_1 представляется следующей последовательностью вершин, заданных своими координатами: (2, 2), (2, 12), (7, 12), (9, 10), (9, 9), (7,5, 7,5), (9, 6), (9, 4), (7, 2). Контуры-разрезы L_2, L_3 задаются соответственно последовательностями вершин (4, 8), (4, 11), (6, 11), (7, 10), (7, 9), (6, 8) и (4, 3), (4, 7), (6, 7), (7, 6), (7, 4), (6, 3).

2. Метод декомпозиции

Под сторонами многосвязного многоугольника W понимаются как стороны основного контура, так и стороны контуров-разрезов. Основной контур и контуры-разрезы, которыми задается многосвязный многоугольник W, образуют границы этого многоугольника. Обозначим через $P(ab)$ прямую, проходящую через сторону ab многосвязного многоугольника. Будем говорить, что стороны ab и cd параллельны, если и только если параллельны прямые $P(ab)$ и $P(cd)$. Стороны ab и cd перпендикулярны, если и только если перпендикулярны прямые $P(ab)$ и $P(cd)$. Для простоты понимания стороны многосвязного многоугольника ниже будем иногда просто обозначать латинскими буквами.

Предлагаемый метод покрытия состоит из двух этапов. На первом этапе по сторонам многоугольника находится его предварительное покрытие. На втором этапе после получения совокупности прямоугольников, составляющих предварительное покрытие, решается задача анализа этой совокупности на корректность. Если предварительное покрытие не является корректным, то оно пополняется прямоугольниками так, чтобы новое покрытие стало корректным.

2.1. Поиск предварительного покрытия

Прямоугольники предварительного покрытия строятся по сторонам многосвязного многоугольника W. Последовательно перебираются стороны многоугольника W. По очередной выбранной стороне a многоугольника W строится один или несколько прямоугольников предварительного покрытия по следующим правилам.

Правило 1. Если ни один из внутренних углов многосвязного многоугольника W в граничных точках его очередной выбранной стороны a не является острым, то по этой стороне строится основной прямоугольник.

Для построения основного прямоугольника выполняем следующие действия. Находим прямые R_1, R_2, перпендикулярные прямой $P(a)$ и проходящие через граничные точки стороны a (рис. 2, *а*). Среди точек многосвязного многоугольника, лежащих между этими прямыми и стороной a, ищем точку β, лежащую на границе многосвязного объекта и находящуюся на минимальном расстоянии от стороны a. Через эту точку проводится прямая R_3, параллельная прямой $P(a)$. Точки, находящиеся на пересечении прямых R_1, R_2, R_3, $P(a)$, задают вершины искомого основного прямоугольника S_1.

Далее делается попытка расширить основной прямоугольник S_1 по его сторонам d и b. Основной прямоугольник, приведенный на рис. 2, *а*, невозможно расширить по этим сторонам. Поэтому обратимся к рис. 2, *б*.

Расширение основного прямоугольника делаем следующим образом. Обозначим через p сторону основного прямоугольника S_1, параллельную стороне a, а соответственно через R_1, R_2, R_3 – прямые, проходящие через стороны b, d, p прямоугольника S_1 (рис. 2, *б*). Построим прямоугольник S_2 по стороне d прямоугольника S_1. Прямоугольник S_2 можно построить по стороне d только в том случае, если внутренний угол многоугольника W в граничной точке стороны a, совпадающей с вершиной прямоугольника S_1, которая образована его сторонами a и d, больше или равен 180°. Для этого среди точек многоугольника W, ограниченных прямыми R_2, R_3, $P(a)$ и не находящихся в основном прямоугольнике S_1, ищется точка γ, лежащая на границе многосвязного объекта и расположенная на минимальном расстоянии (не равном нулю) от прямой R_2.

Если такая точка существует, то через нее проводится прямая G_4, параллельная прямой R_2. Точки, находящиеся на пересечении прямых R_2, R_3, $P(a)$, G_4, задают вершины искомого прямоугольника S_2. Расширение основного прямоугольника S_1 выполняется за счет присоединения к нему прямоугольника S_2.

Аналогичным образом можно попытаться расширить основной прямоугольник и со стороны b. Прямоугольник, полученный после расширения основного прямоугольника, включается в искомое предварительное покрытие.

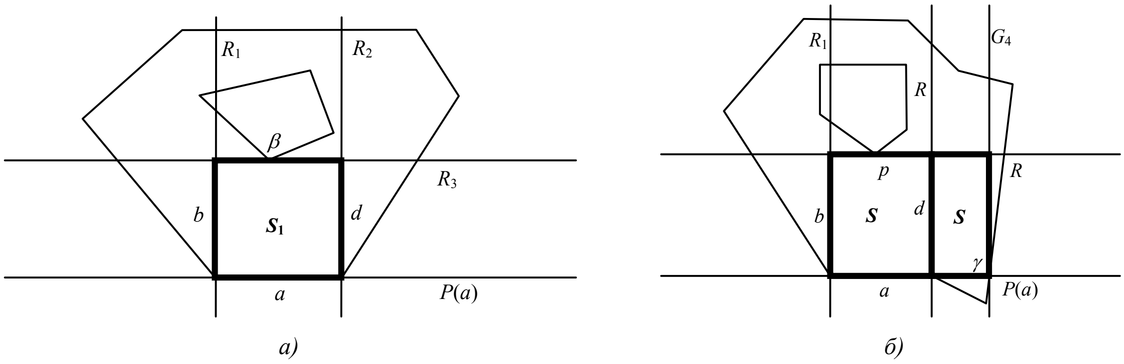


Рис. 2. Построение основного прямоугольника:
а) по стороне *a*; *б)* стороне *d*

Правило 2. Положим, что один из внутренних углов многосвязного многоугольника W в одной из граничных точек его выбранной стороны a является острым (рис. 3). Обозначим эту вершину через a_1, а другую граничную вершину стороны a – через a_2. Проведем через граничную вершину a_2 стороны a прямую F_1, перпендикулярную a. Возможны два варианта.

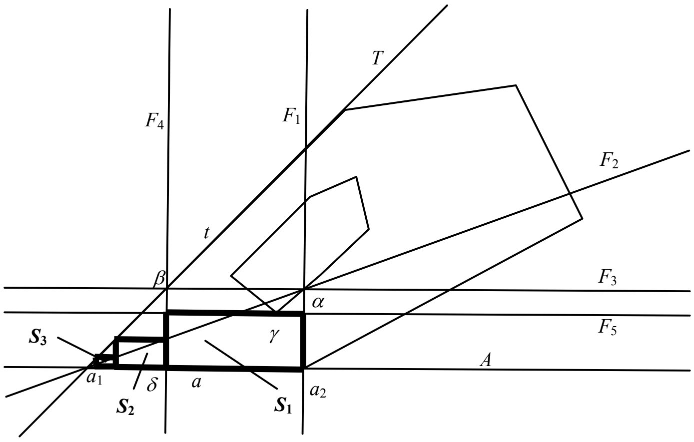


Рис. 3. Формирование прямоугольников для стороны *a*,
когда угол между сторонами *a* и *t* является острым (вариант 1)

Вариант 1. Сторона многоугольника t, соседняя к стороне a и соединяющаяся с ней в вершине a_1, пересекается с прямой F_1, т. е. на стороне t существует точка, принадлежащая прямой F_1. Пусть $T = P(t)$, $A = P(a)$. Через F_2 обозначим прямую, являющуюся биссектрисой угла между сторонами t и a. В этом случае поиск прямоугольников предварительного покрытия выполняется следующим образом.

Найдем точку α пересечения прямых F_1 и F_2. Проведем через точку α прямую F_3, параллельную прямой A. Найдем точку β пересечения прямой F_3 с прямой T. Проведем через эту точку прямую F_4, параллельную прямой F_1. Среди точек многосвязного многоугольника, лежащих между прямыми F_1, F_4 и стороной a, найдем точку γ, лежащую на границе многосвязного

объекта и находящуюся на минимальном расстоянии от стороны a. Через эту точку проведем прямую F_5, параллельную прямой A. Если расстояние от точки γ до стороны a меньше, чем расстояние от точки α до этой стороны, то точки, находящиеся на пересечении прямых F_1, F_4, F_5, A, задают вершины прямоугольника S_1. Иначе прямоугольник S_1 задается точками пересечения прямых F_1, F_4, F_3, A. На рис. 3 показан процесс формирования этого прямоугольника для стороны a, когда расстояние от точки γ до стороны a меньше, чем расстояние от точки α до этой стороны. Если длина некоторой стороны прямоугольника S_1 оказывается меньше наперед заданной величины h, то процесс построения прямоугольников для стороны a прекращается. Иначе прямоугольник S_1 включается в предварительное покрытие и строится прямоугольник S_2.

Прямоугольник S_2 строится точно так же, как и прямоугольник S_1. Для этого обозначим через δ (см. рис. 3) точку пересечения прямых A и F_4. В качестве стороны a рассматриваем отрезок прямой, расположенный между точками a_1 и δ, в качестве прямой F_1 – прямую F_4. Если длины некоторых сторон прямоугольника S_2 оказываются меньше заданной величины h, то процесс построения прямоугольников для стороны a прекращается. Иначе прямоугольник S_2 включается в предварительное покрытие и строится прямоугольник S_3, далее поступаем аналогичным образом.

Вариант 2. Сторона многоугольника t, соседняя к стороне a и соединяющаяся с ней в вершине a_1, не пересекается с прямой F_1 (рис. 4). Проведем прямую Z, перпендикулярную к стороне a и проходящую через концевую точку стороны t, не являющуюся точкой соединения соседних сторон a и t. Обозначим через α точку пересечения прямых Z и A, а через a_1, a_2 – концевые точки стороны a. Разобьем сторону a на два отрезка: (a_2, α), (α, a_1).

По части стороны a, представленной отрезком (a_2, α), построим прямоугольник искомого предварительного покрытия так, как это делается посредством правила 1. При этом в качестве исходной стороны многоугольника рассматривается отрезок (a_2, α).

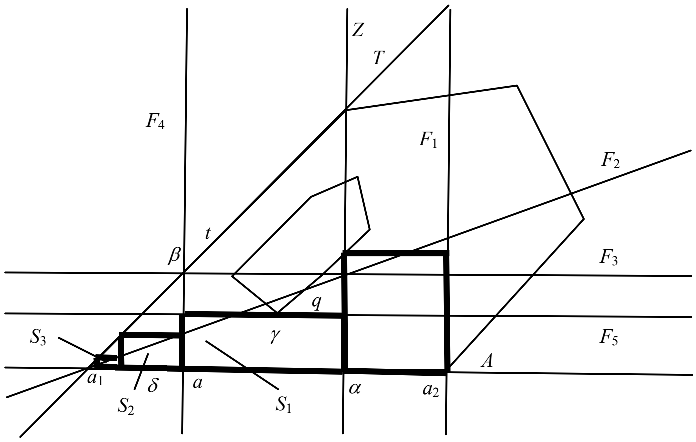


Рис. 4. Формирование прямоугольников для стороны a, когда угол между сторонами a и t является острым (вариант 2)

Согласно варианту 1 правила 2 по части стороны a, представленной отрезком (α, a_1), построим подмножество прямоугольников предварительного покрытия. При этом в качестве стороны a многоугольника рассматривается отрезок (α, a_1). В данном случае по стороне a может быть построено несколько прямоугольников предварительного покрытия.

Правило 3. Положим, что оба внутренних угла многосвязного многоугольника W в граничных точках a_1, a_2 стороны a являются острыми. В этом случае найдем точку β, находящуюся посередине стороны a, и разобьем сторону a на два отрезка: (a_1, β), (β, a_2). Для каждого из этих отрезков (сторон) многоугольника W находим прямоугольники предварительного покрытия так, как это описано правилом 2.

Пример 2. Рассмотрим многосвязный многоугольник, приведенный в примере 1. Графическое представление этого многоугольника дано на рис. 1, *а*, а его предварительное покрытие – на рис. 1, *б*.

2.2. Анализ предварительного покрытия на корректность

Описанный в подразд. 2.1 метод решения задачи покрытия является эвристическим. Это означает, что нельзя гарантировать получение корректного решения задачи покрытия. Возможны случаи, когда найденное предварительное покрытие будет некорректно.

Пример 3. На рис. 5 показан многосвязный многоугольник и его предварительное покрытие, полученное посредством метода, который приведен в подразд. 2.1. Видно, что полученное покрытие является некорректным, так как в нем присутствуют две непокрытые внутренние области.

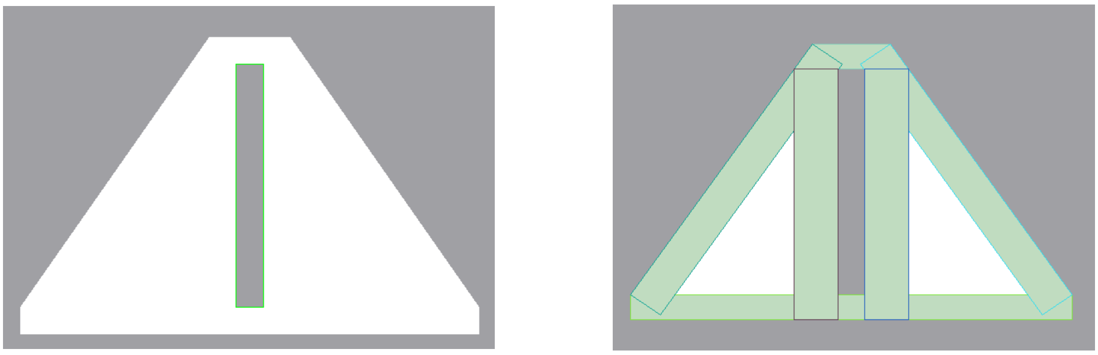


Рис. 5. Примеры некорректного покрытия многосвязного многоугольника

Особенность предварительных покрытий, которые получены по методу, предложенному выше, состоит в том, что к каждой стороне покрываемого многосвязного многоугольника примыкает один или несколько прямоугольников покрытия. Исключение составляют небольшие участки сторон многосвязного многоугольника, непосредственно примыкающие к острым внутренним углам. Эти участки не содержат h-покрываемых точек. Поэтому области в многосвязном многоугольнике W, не покрытые предварительным покрытием V (за исключением областей, не содержащих h-покрываемых точек), являются внутренними областями многоугольника. Эти внутренние области можно рассматривать как контуры-разрезы. В дальнейшем эти контуры-разрезы будем называть *добавленными* предварительным покрытием V. Предварительное покрытие, полученное в примере 3, содержит два добавленных контура-разреза.

Рассмотрим метод анализа предварительного покрытия V многосвязного многоугольника W на наличие в нем добавленных контуров-разрезов.

Пусть два отрезка ab и cd называются *сориентированными*, если они расположены на одной прямой. Любую часть отрезка, длина которой не равна нулю, будем называть *подотрезком*. В частности, подотрезок отрезка может совпадать с данным отрезком. Если gr является подотрезком отрезка ab, то этот факт будем представлять в виде выражения $gr \subseteq ab$.

Сориентированные отрезки ab и cd пересекаются, если существует отрезок gr, такой, что $gr \subseteq ab$ и $gr \subseteq cd$. Если такого отрезка gr не существует, то сориентированные отрезки ab и cd не пересекаются.

Пересечением сориентированных отрезков ab и cd назовем максимальный по длине отрезок gr, длина которого не равна нулю, такой, что $gr \subseteq ab$ и $gr \subseteq cd$ ($gr = ab \cap cd$).

Пусть отрезок gr является подотрезком отрезка ab. Если граничные вершины g и r отрезка gr совпадают с граничными вершинами a и b отрезка ab, то отрезок gr совпадает с отрезком ab. Если одна из граничных вершин отрезка gr совпадает с одной из граничных вершин отрезка ab, то отрезок gr делит отрезок ab на две части, одна из которых является отрезком gr. Если граничные вершины отрезка gr не совпадают с граничными вершинами отрезка ab, то отрезок gr делит отрезок ab на три части, одна из которых является отрезком gr. Таким образом, в общем случае отрезок gr делит отрезок ab на множество $ab(gr)$ подчастей, одна из которых совпадает с отрезком gr. Множество $ab(gr)$ состоит из одной части, если отрезок gr совпадает с отрезком ab. В остальных случаях множество $ab(gr)$ состоит из двух или из трех частей.

Под *вычитанием* отрезка gr из отрезка ab ($ab \setminus gr$), где отрезок gr является подотрезком отрезка ab, будем понимать множество отрезков $ab(gr) \setminus \{gr\}$. Множество $ab(gr) \setminus \{gr\}$ может быть пустым или состоять из одного или двух отрезков.

Рассмотрим уравнение $U(x, y) = 0$, задающее прямую на плоскости, где $U(x, y) = \alpha y+\beta x+\delta$, α, β, δ – вещественные числа. Эта прямая делит плоскость на две части: положительную и отрицательную. Точка плоскости w, заданная координатами (x_w, y_w), принадлежит положительной полуплоскости, если $U(x_w, y_w) = \alpha y_w+\beta x_w+\delta \geq 0$. Если $U(x_w, y_w) = \alpha y_w+\beta x_w+\delta < 0$, то точка w принадлежит отрицательной полуплоскости.

Пусть $k = |V| - 1$, где V – предварительное покрытие многосвязного многоугольника W. Пронумеруем прямоугольники, входящие в предварительное покрытие V, числами 0, 1, 2, …, k.

Обозначим через W_p множество сторон многосвязного многоугольника W, а через V_p – множество сторон прямоугольников, входящих в предварительное покрытие V этого многоугольника. Таким образом, W_p и V_p являются множествами отрезков.

Каждому отрезку rl в множестве V_p припишем два числа: $N(rl)$ и $Q(rl)$. Если $rl \in V_p$ и отрезок rl является стороной прямоугольника с номером t, то $N(rl) = t$. Число $Q(rl)$ вычисляется следующим образом.

Обозначим через $P(rl)$ прямую, проходящую через отрезок rl, а через $P^+(rl)$, $P^-(rl)$ – положительную и отрицательную полуплоскости, на которые прямая $P(rl)$ делит плоскость. Если прямоугольник множества V_p с номером $N(rl)$ лежит в полуплоскости $P^+(rl)$, то $Q(rl) = 1$. Иначе $Q(rl) = 2$.

Преобразуем множество отрезков V_p в множество отрезков $V_p(rs)$, где $rs \in W_p$. Для этого в множестве V_p заменим каждый отрезок ql, сориентированный и пересекающийся с rs, на множество отрезков $ql \setminus gt$, где $gt = ql \cap rs$. Если окажется, что ql совпадает с отрезком gt ($ql = ql \cap rs$ и соответственно $ql \setminus gt = \varnothing$), то не будем включать отрезок ql в множество $V_p(rs)$. Каждому отрезку из множества $ql \setminus gt$ припишем те же числа, что и отрезку ql.

Алгоритм анализа состоит из следующих этапов.

Этап 1. Удаление из сторон прямоугольников покрытия подотрезков, являющихся подотрезками сторон многоугольника. Положим, что $W_p = \{w_0, w_1, w_2, …, w_m\}$. Выполним $(m + 1)$-преобразование. Множество V_p преобразуем в множество $V_0 = V_p(w_0)$, множество V_0 – в множество $V_1 = V_0(w_1)$, а множество V_1 – в множество $V_2 = V_1(w_2)$ и т. д. Затем найдем множество V_{m-1}, по которому построим множество $Z_p = V_{m-1}(w_m)$. Так преобразуем множество отрезков V_p в множество отрезков Z_p.

После выполнения этапа 1 из отрезков, представляющих стороны прямоугольников предварительного покрытия V, будут удалены все подотрезки, являющиеся подотрезками сторон многосвязного многоугольника W.

Этап 2. Объединение совместимых отрезков в множестве Z_p. Два отрезка ql и rs множества Z_p называются непосредственно совместимыми, если эти отрезки сориентированы, пересекаются и $Q(ql) = Q(rs)$.

Отрезки ql и rs множества Z_p называются совместимыми, если они или непосредственно совместимы, или существуют в множестве Z_p отрезки a_1u_1, a_2u_2, …, a_tu_t, такие, что в последовательности отрезков ql, a_1u_1, a_2u_2, …, a_tu_t, rs любые два соседних отрезка непосредственно совместимы.

Отношение совместимости разбивает множество Z_p на классы совместимых отрезков. Обозначим разбиение множества отрезков Z_p, инициированное данным отношением совместимости, через $R = \{r_0, r_1, …, r_b\}$.

Все отрезки, находящиеся в одном классе совместимости r_i ($i = 0, 1, …, b$) разбиения R, можно всегда сложить в один отрезок g_i. Граничные точки отрезка g_i выбираются из граничных точек отрезков, входящих в класс r_i, таким образом, чтобы отрезок g_i имел максимальную длину. При этом всякий отрезок класса r_i будет являться подотрезком отрезка g_i. Так как для любых двух отрезков ab, cd из класса r_i выполняется равенство $Q(ab) = Q(cd)$, положим, что $Q(g_i) = Q(ab)$. Вместо числа $N(g_i)$ припишем отрезку g_i множество целых чисел $E(g_i)$, составленное из различных чисел $N(ab)$, где $ab \in r_i$. Так преобразуем множество отрезков Z_p в множество отрезков $G = \{g_0, g_1, \ldots, g_b\}$. Каждому отрезку g_i множества G приписано подмножество целых чисел $E(g_i)$ и номер полуплоскости $Q(g_i)$.

Этап 3. Поиск подотрезков отрезков множества G, не принадлежащих прямоугольникам предварительного покрытия. Будем говорить, что отрезок ql принадлежит прямоугольнику A, если любая точка отрезка находится или внутри, или на границе прямоугольника.

Отрезок ab пересекается с прямоугольником A, если существует максимальный по длине подотрезок ql отрезка ab, который принадлежит прямоугольнику A. Если отрезок ab пересекается с прямоугольником A, то или этот отрезок принадлежит прямоугольнику A, или он делится на две либо три части, только одна из которых принадлежит прямоугольнику A.

Пусть отрезок ab пересекается с прямоугольником A. Обозначим через $ab(A)$ множество подотрезков, на которые прямоугольник A делит отрезок ab. Если прямоугольник A пересекается с отрезком ab по подотрезку ql, то $ab(A) = ab(ql)$.

Положим, что в множестве V прямоугольнику A присвоен порядковый номер j. Преобразуем множество отрезков G в множество отрезков $G(A)$. Для этого в множестве G заменим каждый отрезок g_i на множество подотрезков $g_i(A) \setminus \{ql\}$, если прямоугольник A пересекается с отрезком g_i по подотрезку ql и число j не принадлежит множеству $E(g_i)$. Если окажется, что $g_i(A) \setminus \{ql\} = \varnothing$, то отрезок g_i удаляется из множества G.

Положим, что $V = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, где v_i $(i = 0, 1, \ldots, k)$ – прямоугольник предварительного покрытия V. Выполним $(k + 1)$-преобразование: множество G, полученное на этапе 2, – в множество $G_0 = G(v_0)$; множество G_0 – в множество $G_1 = G_0(v_1)$, а множество G_1 – в множество $G_2 = G_1(v_2)$ и т. д. Затем найдем множество G_{k-1}, по которому построим множество $U = G_{k-1}(v_k)$, т. е. преобразуем множество отрезков G в множество отрезков U.

Этап 4. Поиск добавленных контуров-разрезов выполняется на основе следующего утверждения.

Утверждение. *Если предварительное покрытие V многосвязного многоугольника W некорректно, то все стороны добавленных контуров-разрезов присутствуют в множестве отрезков U. Если покрытие V корректно, то или U = ∅, или из отрезков множества U невозможно составить ни одного контура.*

Согласно утверждению попытаемся из отрезков множества U составить все возможные контуры. Если это окажется невозможным, то считаем найденное предварительное покрытие корректным. Иначе покрываем найденные контуры-разрезы прямоугольниками. Полученные прямоугольники добавляем в предварительное покрытие. Покрытие прямоугольниками найденных контуров-разрезов выполняется по методу из работы [10].

Пример 4. В примере 3 было найдено предварительное покрытие многосвязного многоугольника (см. рис. 5). Последовательно выполняя приведенные выше этапы, найдем два добавленных контура-разреза и выполним их покрытие. Результирующее покрытие показано на рис. 6.

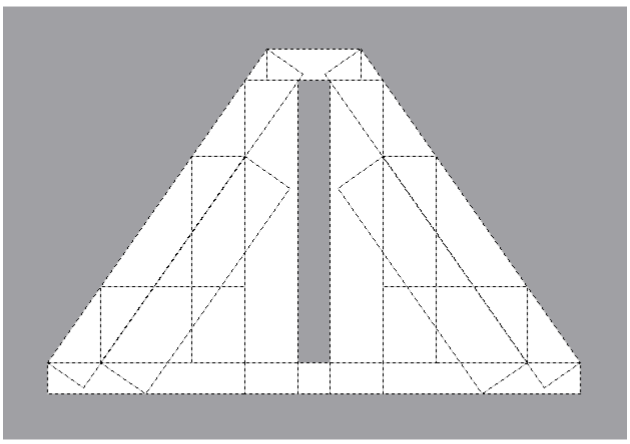


Рис. 6. Корректное покрытие многосвязного многоугольника из примера 3

3. Экспериментальное исследование метода покрытия

Метод покрытия произвольных многосвязных многоугольников запрограммирован на языке C++ в среде Borlanb C++Builder. Таблица представляет собой выборку из результатов исследования 173 многоугольников, взятых из реальных проектов. В ней приведен каждый пятый результат, но данное сокращение существенно не повлияло на точность и достоверность выявленных закономерностей. Так для 58 % многоугольников предварительное покрытие оказалось корректным. Как правило, для прямоугольных многоугольников количество прямоугольников покрытия приблизительно в два раза меньше, чем количество вершин в исходном многоугольнике. Это связано с тем, что в программу, реализующую описанный выше метод построения предварительного покрытия, добавлена специальная оптимизационная процедура. Согласно этой процедуре прямоугольник не строится по очередной стороне многоугольника, если эта сторона является подотрезком одной из сторон прямоугольника, найденного ранее.

Результаты исследования метода покрытия

Количество вершин в исходном многоугольнике	Количество прямоугольников в предварительном покрытии	Количество добавленных контуров-разрезов	Результирующее число прямоугольников в покрытии	Характеристика исходного многоугольника
3	40	0	40	Остроугольный треугольник
8	3	0	3	Ортогональный многоугольник
10	5	2	11	Произвольный многоугольник
14	4	0	4	Ортогональный многоугольник
16	31	0	31	Присутствуют острые углы
20	4	0	4	Ортогональный многоугольник
22	71	2	75	Присутствуют острые углы
25	34	1	37	Присутствуют острые углы
29	13	0	13	Подобен шине
33	34	1	35	Подобен шине
37	21	0	21	Произвольный многоугольник
41	18	0	18	Произвольный многоугольник
47	57	2	62	Присутствуют дуги окружности
50	56	0	56	Присутствуют дуги окружности
56	61	0	61	Произвольный многоугольник
61	66	3	72	Подобен шине
66	70	0	70	Присутствуют дуги окружности
71	49	0	49	Ортогональный многоугольник
76	72	0	72	Произвольный многоугольник
86	80	0	80	Подобен шине
91	96	0	96	Присутствуют дуги окружности
100	48	0	48	Подобен шине
114	107	0	107	Присутствуют острые углы
129	188	31	228	Произвольный многоугольник
133	55	0	55	Ортогональный многоугольник
139	209	35	253	Присутствуют дуги окружности
148	149	0	149	Произвольный многоугольник
155	212	34	263	Присутствуют острые углы и дуги
167	141	0	141	Произвольный многоугольник
182	103	0	103	Произвольный многоугольник
213	186	8	210	Присутствуют дуги окружности
247	819	2	824	Присутствуют острые углы
273	987	14	1006	Присутствуют острые углы
335	297	2	299	Подобен шинам
392	388	2	394	Подобен шинам
640	583	65	739	Присутствуют дуги окружности

Если многоугольник подобен шине, то результирующее покрытие содержит примерно столько же прямоугольников, сколько вершин в исходном многоугольнике. Увеличение числа прямоугольников покрытия, как правило, связано с усложнением исходных многоугольников – присутствием дуг окружностей и острых углов.

Заключение

Метод покрытия, предложенный в настоящей статье, является приближенным, т. е. не гарантирует, что число прямоугольников в найденном покрытии является минимальным. Тем не менее экспериментальные исследования программы, реализующей этот метод, показывают, что покрытия, полученные посредством данного метода, по числу прямоугольников близки к минимальным. Недостатком метода является то, что некоторые участки исходного многоугольника могут многократно покрываться прямоугольниками найденного покрытия.

Список литературы

1. Алгоритмы подготовки данных для микрофотонаборных установок / Г.Г. Казенков [и др.] // Электронная промышленность. – 1974. – № 6. – С. 84–87.

2. Носов, Е.Г. Алгоритмы разбиения плоских фигур в системах машинного проектирования интегральных схем / Е.Г. Носов, А.Г. Свердлов, В.З. Фейнберг // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1978. – № 5. – С. 16–23.

3. Осипов, Л.Б. Программа фотонабора топологий, содержащих многосвязные фигуры и наклонные линии / Л.Б. Осипов, Г.Э. Широ // Автоматизация РЭА и ЭВА. – Пенза, 1977. – С. 50–53.

4. Осипов, Л.Б. Алгоритмические методы подготовки и контроля информации для микрофотонаборных установок / Л.Б. Осипов, Г.Э. Широ // Электронная техника. Сер. 10. Микроэлектронные устройства. – 1978. – Вып. 2. – С. 89–103.

5. Широ, Г.Э. Параллельный быстродействующий алгоритм подготовки для микрофотонаборных установок / Г.Э. Широ, Л.Б. Осипов, В.И. Волков // Электронная техника. Сер. 11. Комплексная микроминиатюризация радиоэлектронных устройств и систем. – 1976. – Вып. 3. – С. 71–76.

6. Стемпковский, А.Л. Универсальный алгоритм подготовки данных для микрофотонаборных установок / А.Л. Стемпковский // Электронная техника. Сер. 3. Микроэлектроника. – 1978. – Вып. 6. – С. 74–80.

7. Mark Keil, J. Polygon Decomposition / J. Mark Keil. – Canada, 1996. – P. 10–15.

8. Nahar, S. A Fast Algorithm for Polygon Decomposition / S. Nahar, S. Sahni // IEEE Trans. on 38 Computer Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – 1988. – Vol. CAD-7, № 4. – P. 478–483.

9. Berman, P. Approximating Rectilinear Polygon Cover Problems / P. Berman, B. Dasgupta // Algorithmica. – 1997. – № 17 (4). – P. 331–356.

10. Бутов, А.А. Анализ корректности покрытия многосвязного многоугольника / А.А. Бутов, Е.А. Шестаков // Вестник Брестского государственного технического университета. Физика, математика, информатика. – 2008. – № 5 (53). – С. 42–47.

Поступила 05.06.09

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: sash_v_oo@tut.by

E.A. Shestakov, A.A. Voronov

A METHOD FOR COVERING MULTICONNECTED POLYGONS WITH A SET OF RECTANGLES

Algorithms for covering objects with multiconnected topology using rectangles are considered. The study objects include multiconnected finite domains of the plane. The potential application fields of the suggested algorithms are the computer geometry and image analysis.