ИНФОРМАТИКА

2009 **июль-сентябрь** **№ 3**

УДК 519.8

Я.М. Шафранский

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГЛОБАЛЬНО ОПТИМАЛЬНЫХ РАСПИСАНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ БЕЛЛМАНА – ДЖОНСОНА ДЛЯ ДВУХ ПРИБОРОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассматривается известная задача Беллмана – Джонсона для двух приборов при условии, что длительности обслуживания требований не заданы, известны лишь множества их возможных значений. Приводятся достаточные условия существования расписания, являющегося оптимальным при любых значениях длительностей обслуживания требований из заданных множеств.

Введение

Задача Беллмана – Джонсона для двух приборов состоит в следующем. В системе, состоящей из двух приборов, каждое требование j обслуживается сначала первым прибором в течение a_j единиц времени, затем вторым прибором в течение b_j единиц времени. Обслуживание требования прибором протекает без прерываний, в каждый момент времени прибор обслуживает не более одного требования, и каждое требование не может одновременно обслуживаться двумя приборами. Необходимо построить *оптимальное по быстродействию расписание* обслуживания требований, т. е. расписание, доставляющее минимум функции $C_{\max}(s) = \max\{C_j(s) | j = 1, \ldots, n\}$, где $C_j(s)$ – момент завершения обслуживания требования j вторым прибором при расписании s, а n – количество обслуживаемых требований. Обычно предполагается, что числа a_j и b_j являются рациональными, $j = 1, \ldots, n$.

В отличие от сформулированного детерминированного варианта задачи, в условиях неопределенности длительности обслуживания требований приборами могут принимать любые значения из заданных множеств, причем процесс выбора того или иного конкретного значения не является управляемым и не зависит от воли или действий лица, принимающего решения либо формирующего расписание.

Итак, в условиях неопределенности каждому требованию j сопоставлена пара множеств $A(j)$ и $B(j)$, каждое из которых является подмножеством множества рациональных чисел. Предполагается, что каждое множество $A(j)$ содержит минимальный элемент $A_j^{\min}$ и максимальный элемент $A_j^{\max}$. Аналогично, минимальный и максимальный элементы $B_j^{\min}$ и $B_j^{\max}$ присутствуют во множестве $B(j)$. Длительности обслуживания требований первым и вторым приборами могут принимать значения из множеств $A(j)$ и $B(j)$ соответственно. Набор длительностей a_j, b_j, $j = 1,\ldots, n$, называется *допустимым*, если для каждого требования j выполняются соотношения $a_j \in A(j)$ и $b_j \in B(j)$. Множество всех требований обозначим через N.

Нетрудно показать, что в обоих вариантах задачи – детерминированном и в условиях неопределенности – можно ограничиться рассмотрением расписаний, в которых порядок обслуживания требований обоими приборами один и тот же, и при заданном порядке обслуживание требования каждым прибором начинается в наиболее ранний момент времени, при котором не нарушаются приведенные выше условия обслуживания. Тем самым расписание однозначно определяется перестановкой π требований, задающей порядок прохождения требованиями каждого из приборов.

Чтобы подчеркнуть зависимость в условиях неопределенности целевого функционала от набора длительностей обслуживания требований, будем использовать обозначение $C_{\max}(\pi, a_j, b_j)$ вместо $C_{\max}(\pi)$, используемого для детерминированного варианта задачи.

В силу неопределенности длительностей обслуживания требований перестановка π^*, доставляющая минимум целевому функционалу $C_{\max}(\pi, a_j, b_j)$ при любых допустимых значениях длительностей обслуживания требований, может не существовать. Поэтому для поиска перестановки, выбираемой в качестве решения задачи, используются либо алгоритмы, обеспечивающие относительно небольшую погрешность результата в среднем (см., например, работу [1]), либо алгоритмы, основанные на введении вспомогательных критериев оптимальности, обеспечивающих переход к решению некоторой детерминированной задачи (описание подходов такого рода можно найти в работах [2, 3]).

В статье описываются те редкие ситуации, в которых существует перестановка π^*, являющаяся оптимальной одновременно для каждого из допустимых наборов длительностей обслуживания требований. Такие перестановки будем называть *глобально оптимальными*.

Поиску условий существования глобально оптимальных перестановок для задачи Беллмана – Джонсона для двух приборов при условии, что каждое из множеств $A(j)$ и $B(j)$ представляет собой отрезок числовой оси, посвящены (среди прочих) работы [4, 5].

1. Неравенство Джонсона

Для решения детерминированного варианта задачи (когда $|A(j)| = |B(j)| = 1$ для всех j) в работе [6] предложен алгоритм сложности $O(n \log n)$, известный как *алгоритм Джонсона*. Существует несколько интерпретаций этого алгоритма. В соответствии с одной из них множество N разбивается на два подмножества N_1 и N_2. Множество N_1 включает все такие $j \in N$, что $a_j < b_j$, N_2 включает все такие $j \in N$, что $a_j > b_j$, а требования, удовлетворяющие условию $a_j = b_j$, относят к любому из этих множеств, причем часть может быть отнесена к N_1, часть – к N_2 произвольным образом. Начало формируемой оптимальной перестановки состоит из элементов множества N_1, упорядоченных по неубыванию величин a_j, за ними следуют элементы множества N_2, упорядоченные по невозрастанию величин b_j. Любая перестановка, построенная в соответствии с описанным алгоритмом, является оптимальной для детерминированного варианта задачи.

Лемма 1. *Пусть $i, w \in N$, тогда для существования оптимальной перестановки вида $\pi^0 = (\ldots, i, \ldots, w, \ldots)$ достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\min\{a_i, b_w\} \le \min\{a_w, b_i\}. \tag{1}$$

Доказательство. Если (1) выполняется как строгое неравенство, то соответствующее доказательство можно найти, например, в монографии [7] (см. лемму 6.9, где при доказательстве не используются параметры требований из множества $N \backslash \{i, w\}$). Пусть $\min\{a_i, b_w\} = \min\{a_w, b_i\}$. Тогда возможны следующие варианты: *а)* $a_i = a_w$, $a_i \le b_w$ и $a_w \le b_i$; *б)* $a_i = b_i$, $a_i \le b_w$ и $b_i \le a_w$; *в)* $b_w = a_w$, $b_w \le a_i$ и $a_w \le b_i$; *г)* $b_w = b_i$, $b_w \le a_i$ и $b_i \le a_w$.

В случае *а)* требования i и w можно рассматривать как элементы множества N_1 и существование π^0 следует из описания алгоритма Джонсона. Для остальных вариантов рассуждения аналогичны с той лишь разницей, что в случае *б)* требование $i \in N_1$ и либо $w \in N_1$ и $a_i \le a_w$, либо $w \in N_2$; в случае *в)* $w \in N_2$, а $i \in N_1$ либо $i \in N_2$ и $b_w \le b_i$; в случае *г)* оба требования принадлежат N_2, причем $b_i = b_w$. ■

Соотношение (1) называется *неравенством Джонсона.*

Перестановка π^0 называется *перестановкой Джонсона*, если для любой пары i, w требований, расположенных в π^0 в указанном выше порядке, выполняется соотношение (1).

Следствие 1. *Для существования перестановки Джонсона вида $\pi^0 = (\ldots, i, \ldots, w, \ldots)$ необходимо и достаточно выполнения соотношения (1).*

Справедливость этого утверждения следует непосредственно из определения перестановки Джонсона и леммы 1. Из леммы 1 следует также, что любая перестановка Джонсона является оптимальной для детерминированного варианта задачи.

Рассмотрим еще одно вспомогательное утверждение. Пусть действительные функции $f(x_1, \ldots, x_\mu)$ и $g(y_1, \ldots, y_\nu)$ действительных переменных являются неубывающими по каждой своей переменной, $x_p \in X_p$, $y_r \in Y_r$, $p = 1, \ldots, \mu$, $r = 1, \ldots, \nu$, и каждое множество X_p (каждое множество Y_r) содержит минимальный элемент $X_p^{\min}$ и максимальный элемент $X_p^{\max}$ (соответственно минимальный элемент $Y_r^{\min}$ и максимальный элемент $Y_r^{\max}$). Тогда очевидна справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. *Неравенство* $f(x_1, \ldots, x_\mu) \le g(y_1, \ldots, y_\nu)$ *справедливо для любых значений* $x_p \in X_p$, $y_r \in Y_r$, $p = 1,\ldots, \mu$, $r = 1,\ldots, \nu$, *тогда и только тогда, когда справедливо неравенство* $f(X_1^{\max},\ldots, X_\mu^{\max}) \le g(Y_1^{\min},\ldots, Y_\nu^{\min})$.

Вернемся к рассмотрению задачи в условиях неопределенности.

Поскольку утверждения леммы 1 и следствия 1 справедливы независимо от значений длительностей обслуживания требований из множества $N\backslash\{i, w\}$, то в силу леммы 2 справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Для того чтобы при любых* $a_i \in A(i)$, $b_i \in B(i)$ *и любых* $a_w \in A(w)$, $b_w \in B(w)$ *существовала перестановка Джонсона вида* $\pi = (\ldots, i, \ldots, w, \ldots)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\min\{A_i^{\max}, B_w^{\max}\} \le \min\{A_w^{\min}, B_i^{\min}\}. \tag{2}$$

Можно привести несколько условий, эквивалентных соотношению (2). Например, соотношение (2) справедливо тогда и только тогда, когда выполняется по крайней мере одно из неравенств

$$A_i^{\max} \le \min\{A_w^{\min}, B_i^{\min}\} \text{ и } B_w^{\max} \le \min\{A_w^{\min}, B_i^{\min}\}, \tag{3}$$

или соотношение (2) справедливо тогда и только тогда, когда выполняются оба неравенства

$$\min\{A_i^{\max}, B_w^{\max}\} \le A_w^{\min} \text{ и } \min\{A_i^{\max}, B_w^{\max}\} \le B_i^{\min}. \tag{4}$$

Сравнивая соотношения (3) и теорему 1 из работы [5], нетрудно заметить, что теорема 1 из [5] является простым следствием соотношений (3). При этом в теореме 1 из [5] первая из приведенных пар неравенств является избыточной.

Прямым следствием леммы 3 является следующее утверждение.

Следствие 2. *Для того чтобы при любом допустимом наборе длительностей обслуживания требований перестановка* π^* *была перестановкой Джонсона, необходимо и достаточно, чтобы соотношение (2) выполнялось для любой такой пары требований i и w, что i расположено в* π^* *левее требования w.*

Алгоритм проверки существования перестановки π^*, удовлетворяющей условиям следствия 2, можно построить следующим образом. По аналогии с [5] построим разбиение множества N на четыре подмножества: $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$, полагая $N_4 = \{j \in N |\ A(j)=B(j)=\{a_j\}\}$, $N_1 = \{j \in N\backslash N_4 |\ A_j^{\max} \le B_j^{\min}\}$, $N_2 = \{j \in N\backslash N_4 |\ A_j^{\min} \ge B_j^{\max}\}$, $N_3 = N\backslash(N_1 \cup N_2 \cup N_4)$. В свою очередь, построим разбиение множества N_4. Положим $N_4^1 = \{i \in N_4 |\ \exists\, w \in N_3$: (2) выполнено для i и $w\}$, $N_4^2 = \{w \in N_4\backslash N_4^1 |\ \exists\, i \in N_3$: (2) выполнено для i и $w\}$, $N_4^0 = N_4\backslash(N_4^1 \cup N_4^2)$.

Целевой функционал в обоих вариантах задачи – детерминированном и в условиях неопределенности – является приоритето-порождающим [2, 3]. С точки зрения рассматриваемой задачи достаточно, чтобы $C_{\max}(\pi, a_j, b_j)$ был 1-приоритето-порождающим функционалом. Определим для $a_j \in A(j), b_j \in B(j)$ функционал 1-приоритета $\omega(j, a_j, b_j)$ следующим образом. Пусть $M = \max\{A_j^{\max} + B_j^{\max} | j \in N\}$, тогда полагаем

$$\omega(j, a_j, b_j) = \begin{cases} M - a_j, & j \in N_1 \cup N_4^1; \\ -M + b_j, & j \in N_2 \cup N_4^2; \\ \operatorname{sign}(b_j - a_j)(M - \min\{a_j, b_j\}), & j \in N_3; \\ 0, & j \in N_4^0, \end{cases} \quad \text{где } \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Полагаем $\omega_{\min}(j) = \min\{\omega(j, a_j, b_j)|\ a_j \in A(j), b_j \in B(j)\}$ и $\omega_{\max}(j) = \max\{\omega(j, a_j, b_j)|\ a_j \in A(j), b_j \in B(j)\}$.

Замечание 1. Нетрудно заметить, что для любых $i, w \in N \backslash N_4$ соотношение (2) выполняется тогда и только тогда, когда справедливо $\omega_{\min}(i) \geq \omega_{\max}(w)$, и для любых $i, w \in N$ из справедливости $\omega_{\min}(i) \geq \omega_{\max}(w)$ следует справедливость (2).

Теорема 1. *Перестановка π^*, удовлетворяющая условиям следствия 2, существует тогда и только тогда, когда существует такая перестановка π^0, что для любых $i, w \in N$ справедливо неравенство $\omega_{\min}(i) \geq \omega_{\max}(w)$, если элемент i расположен в π^0 левее элемента w.*

Доказательство. Достаточность следует из второй части замечания 1.

Необходимость. Из определения N_3 следует, что $N_3 = \{j \in N|\ A_j^{\min} < B_j^{\max}$ и $A_j^{\max} > B_j^{\min}\}$. Поэтому ни для каких двух элементов $i, w \in N_3$ ни неравенство $\omega_{\min}(i) \geq \omega_{\max}(w)$, ни соотношение (2) не выполнены. Следовательно, для существования перестановки π^* необходимо, чтобы $|N_3| \leq 1$. Если $N_3 \neq \varnothing$, то обозначим единственный элемент множества N_3 через $j^{(3)}$. Если $i = j^{(3)}$, а $w \in N_1$, то соотношение (2) не может быть выполнено (как и неравенство $\omega_{\min}(i) \geq \omega_{\max}(w)$). Поэтому в перестановке π^* (если она существует) все элементы множества N_1 расположены справа от $j^{(3)}$. Аналогичная ситуация имеет место и для множества N_2: все элементы множества N_2 расположены в π^* слева от $j^{(3)}$.

Сравним элементы множеств N_4 и N_3. Если $N_3 \neq \varnothing$ и $N_4^0 \neq \varnothing$, то перестановка π^* не существует. Из определения множеств N_4^1 и N_4^2 следует, что при поиске перестановки π^*, удовлетворяющей соотношению (2), можно ограничиться рассмотрением перестановок, в которых все элементы N_4^1 расположены в π^* слева от $j^{(3)}$, а все элементы N_4^2 – справа от $j^{(3)}$.

Во всех рассмотренных ситуациях точно такой же порядок следования элементов определяет и неравенство $\omega_{\min}(i) \geq \omega_{\max}(w)$. Во всех остальных случаях соотношение (2) и неравенство $\omega_{\min}(i) \geq \omega_{\max}(w)$ задают один и тот же порядок следования элементов i и w. ■

Для построения перестановки π^* достаточно упорядочить элементы множества N по невозрастанию значений $\omega_{\min}(j)$ (в случае равенства левее располагается элемент с большим значением $\omega_{\max}(j)$), а затем для каждой пары соседних требований i, w в полученной перестановке проверить справедливость неравенства $\omega_{\min}(i) \geq \omega_{\max}(w)$. Если это неравенство не выполнено хотя бы для одной пары соседних требований, то π^* не существует. В противном случае перестановка π^* построена.

Итак, перестановка π^*, удовлетворяющая условиям следствия (2), существует тогда и только тогда, когда она может быть построена в соответствии с описанной процедурой, а временная сложность выполнения процедуры ограничена величиной $O(n \log n)$.

Необходимые и достаточные условия существования глобально оптимальной перестановки в классе перестановок Джонсона, представленные в несколько иной форме (без использования неравенства (2)) и имеющие такую же сложность их проверки, приведены в работах [4, 5] (без доказательства).

Замечание 2. Функционал 1-приоритета $\omega(j, a_j, b_j)$ может быть определен следующим, несколько нестандартным образом:

$$\omega(j,a_j,b_j) = \begin{cases} \operatorname{sign}(b_j - a_j)(M - \min\{a_j, b_j\}), & j \in N_1 \cup N_2 \cup N_3; \\ \{M - a_j, a_j - M, 0\}, & j \in N_4, \end{cases} \quad \text{где } \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Сравнивая требование $j \in N_4$ с другими требованиями, в качестве значения функционала 1-приоритета для $j \in N_4$ можно выбирать любое из трех значений $M - a_j$, $a_j - M$ и 0. Нетрудно убедиться, что, во-первых, $\omega(j, a_j, b_j)$ действительно является функционалом 1-приоритета и, во-вторых, для любых $i, w \in N$ соотношение (2) справедливо тогда и только тогда, когда для требования из множества N_4 существует такое значение функционала 1-приоритета, что справедливо неравенство $\omega_{\min}(i) \geq \omega_{\max}(w)$, причем если последнее неравенство справедливо при некотором значении функционала 1-приоритета, то выполняется и соотношение (2).

Приведенная формула позволяет заменить (эквивалентным образом) использование соотношения (2) использованием неравенства вида $\omega_{\min}(i) \geq \omega_{\max}(w)$.

Замечание 3. Любая перестановка Джонсона является оптимальной, но существуют оптимальные перестановки, которые не являются перестановками Джонсона. Поэтому следствие 2 дает достаточные, но не необходимые условия глобальной оптимальности перестановки π^*.

2. Дополнительные условия существования глобально оптимальной перестановки

Поскольку приведенные в предыдущем разделе условия существования глобально оптимальной перестановки не являются необходимыми, есть шанс дополнить их новыми условиями (в ситуациях, где «старые» условия не работают или работают не в полной мере), получив за счет этого более полное описание класса глобально оптимальных перестановок. Для этого желательно найти удобную форму использования ранее найденных условий.

На основе свойств приоритето-порождающих функционалов на множестве N можно итеративно задать отношение строгого порядка $\to$. Построим ориентированный граф $G = (N, U)$, являющийся графом редукции отношения $\to$, где вначале $U = \varnothing$. Для $i, w \in N$ будем писать $i \sim w$, если в текущем графе G отсутствуют и пути из i в w, и пути из w в i.

Перестановка $\pi = (j_1, \ldots, j_r)$, $r \leq n$, из элементов множества N называется *допустимой относительно строгого порядка* $\to$, если из соотношения $j_k \to j_l$ следует $k < l$ (т. е. элемент j_k расположен в допустимой перестановке π левее элемента j_l). Множество всех допустимых перестановок требований множества N обозначим через $\Pi(G)$.

Приведенные ниже теорема 2 и лемма 4 представляют собой соответственно теорему 4 и лемму 3 из работы [8], переформулированные для случая рассматриваемой задачи Беллмана – Джонсона в условиях неопределенности.

Теорема 2. *Пусть* $i, w \in N$, $i \sim w$ *и* $\omega_{\min}(i) \geq \omega_{\max}(w)$. *Тогда для любой перестановки* $\pi = (\ldots, w, \ldots, i, \ldots) \in \Pi(G)$ *при любом допустимом наборе* a_j, b_j, $j = 1, \ldots, n$, *длительностей обслуживания требований найдется такая перестановка* $\pi^0 = (\ldots, i, w, \ldots) \in \Pi(G)$, *что* $C_{\max}(\pi^0, a_j, b_j) \leq C_{\max}(\pi, a_j, b_j)$.

Теорема имеет простую интерпретацию. В условиях теоремы 2 в текущий граф G вводится новая дуга (i, w). При этом полученный граф G' обладает тем свойством, что $\Pi(G') \subset \Pi(G)$, а теорема 2 гарантирует сохранение во множестве $\Pi(G')$ перестановок, оптимальных при каждом конкретном допустимом наборе длительностей обслуживания требований. Преобразование, состоящее во введении в граф G дуги (i, w) в условиях теоремы 2, обозначим через II–(i, w).

Лемма 4. *Пусть граф* G' *получен в результате многократного применения к графу* G *преобразований II. Тогда для любого допустимого набора* a_j, b_j, $j = 1, \ldots, n$, *длительностей обслуживания требований во множестве* $\Pi(G')$ *найдется перестановка, доставляющая минимум функционалу* $C_{\max}(\pi, a_j, b_j)$.

Используя преобразования II, перейдем от исходного графа $G = (N, \varnothing)$ к такому графу $G' = (N, U)$, что для G' нет допустимых преобразований II.

Приведенный ниже алгоритм последовательно формирует множество U дуг графа G'.

Алгоритм 1

Шаг 1. Строим список L элементов множества N, упорядочивая их по невозрастанию значений $\omega_{\min}(j)$ (в случае равенства левее располагается элемент с большим значением $\omega_{\max}(j)$).

Шаг 2. Выбираем первый элемент i из списка L. Просматриваем последовательно элементы w из списка L и полагаем $(i, w) \in U$, если преобразование II–(i, w) является допустимым для текущего графа G. Удаляем элемент i из списка L.

Шаг 3. Если список L пуст, то удаляем из текущего графа G все транзитивные дуги и полагаем $G' = G$. В противном случае переходим к выполнению шага 2.

Нетрудно заметить, что алгоритм 1 построит перестановку π^*, удовлетворяющую условиям следствия 2, если π^* существует. В этом случае граф G' будет цепью.

Рассмотрим ситуацию, когда G' не является цепью, т. е. ситуацию, когда глобально оптимальная перестановка (если она существует) не является перестановкой Джонсона.

В этом случае может оказаться, что в графе G' существует такая максимальная по включению цепь $(i_1, ..., i_\tau)$, что $i_\tau \to j$ для всех $j \in N \backslash \{i_1, \ldots, i_\tau\}$, и/или такая вершина $i^0 \notin \{i_1, \ldots, i_\tau\}$ и такое множество N^0, что $i \to i^0$ и $i^0 \to j$ для всех $i \in N^0$ и $j \in N \backslash (N^0 \bigcup \{i^0\})$, где $\{i_1, \ldots, i_\tau\} \subset N^0$. Возможно, при этом существует глобально оптимальная перестановка, начало которой имеет вид $(i_1, \ldots, i_\tau, (N'), i^0)$, где (N') – перестановка элементов множества N', а $N' = N^0 \backslash \{i_1, \ldots, i_\tau\}$, и процесс построения глобально оптимальной перестановки может быть итеративно продолжен. Для этого необходимо отыскать достаточные условия существования перестановки (N').

Чтобы избежать излишней громоздкости обозначений, сформулируем задачу поиска перестановки (N') в упрощенном виде, который не меняет сути задачи.

Множество требований задачи Беллмана – Джонсона для двух приборов в условиях неопределенности состоит из $r + 2$ требований $J_0, J_1, \ldots, J_r, J_{r+1}$. На множестве требований задано отношение строгого порядка $\to$, порожденное неравенствами вида $\omega_{\min}(J_i) \geq \omega_{\max}(J_w)$, т. е. из $J_i \to J_w$ следует $\omega_{\min}(J_i) \geq \omega_{\max}(J_w)$. Предполагается, что $J_0 \to J_k$, $k = 1, \ldots, r + 1$, и $J_k \to J_{r+1}$, $k = 1, \ldots, r$. Нужно найти достаточные условия существования глобально оптимальной перестановки вида $(J_0, J_{j_1}, ..., J_{j_r}, J_{r+1})$. Сформулированную задачу обозначим через *P1*.

Найдем условия, при которых перестановка $\pi^* = (J_0, J_1, ..., J_r, J_{r+1})$ является глобально оптимальной для задачи *P1*. Отметим, что перестановка π^* не обязательно является допустимой относительно порядка $\to$, зафиксированы лишь требования, занимающие позиции 0 и $r + 1$.

Сохраняя наследственность обозначений, будем считать, что длительность обслуживания требования J_j первым и вторым прибором равна a_j и b_j соответственно, $a_j \in A(j)$, $b_j \in B(j)$.

Для фиксированного набора a_j, b_j, $j = 0, 1, \ldots, r + 1$, длительностей имеем

$$C_{\max}(\pi, a_j, b_j) = \max_{0 \leq l \leq r+1} \{\sum_{j=0}^{l} a_j + \sum_{j=l}^{r+1} b_j\}.$$

Если $l^0 = \arg \max_{0 \leq l \leq r+1} \{\sum_{j=0}^{l} a_j + \sum_{j=l}^{r+1} b_j\}$, то l^0 называется *критическим индексом* для перестановки π^*.

Теорема 3. *Перестановка* $\pi^* = (J_0, J_1, \ldots, J_r, J_{r+1})$ *является глобально оптимальной для задачи P1, если выполнено по крайней мере одно из условий*

$$\sum_{j=0}^{\nu-1} B_j^{\min} \geq \sum_{j=1}^{\nu} A_j^{\max}, \quad \nu = 1, ..., r, \tag{6}$$

и

$$\sum_{j=r-\nu+2}^{r+1} A_j^{\min} \geq \sum_{j=r-\nu+1}^{r} B_j^{\max}, \quad \nu = 1, ..., r. \tag{7}$$

Доказательство. Для любого фиксированного набора a_j, b_j, $j = 0, 1, \ldots, r + 1$, длительностей обслуживания требований и любой допустимой перестановки π справедливо неравенство $C_{\max}(\pi, a_j, b_j) \geq a_0 + \max\{LB_1, LB_2\} + b_{r+1}$, где $LB_1 = \sum_{j=0}^{r} b_j$, $LB_2 = \sum_{j=1}^{r+1} a_j$. Это означает, что справедливость равенства $C_{\max}(\pi, a_j, b_j) = a_0 + \max\{LB_1, LB_2\} + b_{r+1}$ является свидетельством оптимальности перестановки π для данного набора a_j, b_j, $j = 0, 1, \ldots, r + 1$, длительностей.

Пусть $\sigma_l = \sum_{j=0}^{l} a_j + \sum_{j=l}^{r+1} b_j$, тогда $C_{\max}(\pi^*, a_j, b_j) = \max_{0 \leq l \leq r+1}\{\sigma_l\}$.

Чтобы индекс $l = q$ был критическим для перестановки π^*, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma_q \ge \sigma_v$ для всех $v \in \{0, 1, \ldots, r+1\}$. Поэтому хотя бы один из индексов $l = 0$ и $l = r + 1$ является критическим тогда и только тогда, когда выполняется по крайней мере одно из условий

$$\sigma_0 \ge \sigma_v, \ v = 1, \ldots, r \tag{8}$$

и

$$\sigma_{r+1} \ge \sigma_v, \ v = 1, \ldots, r. \tag{9}$$

Необходимость очевидна, докажем достаточность условий. Если справедливо (8), то либо $\sigma_0 \ge \sigma_{r+1}$, либо $\sigma_0 < \sigma_{r+1}$. Соответственно либо индекс $l = 0$ является критическим, либо $\sigma_{r+1} > \sigma_0 \ge \sigma_v$ для всех $v = 1, \ldots, r$ и, следовательно, индекс $l = r + 1$ является критическим. Если справедливо (9), то рассуждения аналогичны.

Если индекс $l = 0$ является критическим, то $C_{\max}(\pi^*, a_j, b_j) = a_0 + LB_1 + b_{r+1}$ и, следовательно, π^* – оптимальная перестановка для данного набора длительностей. Если индекс $l = r + 1$ является критическим, то $C_{\max}(\pi^*, a_j, b_j) = a_0 + LB_2 + b_{r+1}$, что снова говорит об оптимальности перестановки π^*. Условия (8) и (9) эквивалентны соответственно условиям

$$\sum_{j=0}^{v-1} b_j \ge \sum_{j=1}^{v} a_j, \quad v = 1, \ldots, r, \tag{10}$$

и

$$\sum_{j=r-v+2}^{r+1} a_j \ge \sum_{j=r-v+1}^{r} b_j, \quad v = 1, \ldots, r. \tag{11}$$

Таким образом, показано, что условия (10) и (11) являются достаточными для оптимальности перестановки π^* для заданного набора длительностей. В силу леммы 2 условия (10) и (11) справедливы для любых допустимых наборов длительностей тогда и только тогда, когда справедливы условия (6) и (7) соответственно, т. е. (6) и (7) являются достаточными условиями для глобальной оптимальности перестановки π^*. ■

Следствие 3. *Равенство $C_{\max}(\pi^*) = a_0 + \max\{LB_1, LB_2\} + b_{r+1}$ выполняется при любых допустимых наборах длительностей обслуживания требований тогда и только тогда, когда справедливо по крайней мере одно из условий (6) и (7).*

Справедливость этого утверждения следует непосредственно из доказательства теоремы 3, поскольку равенство $C_{\max}(\pi^*) = a_0 + \max\{LB_1, LB_2\} + b_{r+1}$ выполняется тогда и только тогда, когда по крайней мере один из индексов $l = 0$ и $l = r + 1$ является критическим.

Замечание 2. Если одно из требований J_0 или J_{r+1} отсутствует в формулировке задачи $P1$, то условия (7) и (6) являются достаточными для глобальной оптимальности перестановок $\pi^* = (J_1, \ldots, J_r, J_{r+1})$ и $\pi^* = (J_0, J_1, \ldots, J_r)$ соответственно.

Ниже приводится описание алгоритма проверки существования перестановки π^* и ее формирования, если π^* существует. Временная сложность алгоритма – $O(r \log r)$.

Алгоритм 2

Шаг 1. Полагаем $m = 0$, $\delta_l = B_l^{\min} - A_l^{\max}$, $l = 1, \ldots, r$. Строим разбиение множества требований $\{J_1, \ldots, J_r\}$ на два подмножества X_1 и X_2, где к X_1 относим все такие требования J_l, что $\delta_l \ge 0$, а к X_2 – все остальные требования.

Шаг 2. Формируем перестановку π_1 элементов множества X_1, упорядочивая их по неубыванию величин $A_l^{\max}$. Формируем перестановку π_2 элементов множества X_2, упорядочивая их по невозрастанию величин $B_l^{\min}$. Полагаем $\pi^{(0)} = (J_0, \pi_1, \pi_2, J_{r+1})$ и перенумеровываем элементы перестановок π_1 и π_2 в соответствии с их позициями в перестановке $\pi^{(0)}$.

Шаг 3. Проверяем, удовлетворяет ли перестановка $\pi^{(0)}$ условию (6). Если проверка дает положительный результат, то переходим к выполнению шага 7, а в случае отрицательного результата – к выполнению шага 4.

Шаг 4. Полагаем $m = 1$, $\delta_l = A_l^{\min} - B_l^{\max}$, $l = 1, \ldots, r$. Строим разбиение множества требований $\{J_1, \ldots, J_r\}$ на два подмножества Y_1 и Y_2, где к Y_1 относим все такие требования J_l, что $\delta_l \geq 0$, а к Y_2 – все остальные.

Шаг 5. Формируем перестановку π_1 элементов множества X_1, упорядочивая их по невозрастанию величин $B_l^{\max}$. Формируем перестановку π_2 элементов множества X_2, упорядочивая их по неубыванию величин $A_l^{\min}$. Полагаем $\pi^{(r+1)} = (J_0, \pi_2, \pi_1, J_{r+1})$ и перенумеровываем элементы перестановок π_1 и π_2 в соответствии с их позициями в перестановке $\pi^{(r+1)}$.

Шаг 6. Проверяем, удовлетворяет ли перестановка $\pi^{(r+1)}$ условию (7). Если проверка дает положительный результат, то переходим к выполнению шага 7, а в случае отрицательного результата полагаем $m = 2$ и переходим к выполнению шага 7.

Шаг 7. Если $m = 2$, то искомая перестановка π^* не существует. Если $m = 0$, то полагаем $\pi^* = \pi^{(0)}$, а при $m = 1$ полагаем $\pi^* = \pi^{(r+1)}$.

Теорема 4. *Алгоритм 2 формирует перестановку π^*, удовлетворяющую условиям теоремы 3, либо устанавливает, что она не существует.*

Доказательство. Пусть существует перестановка π, удовлетворяющая условию (6). Положим $\pi^* = \pi^{(0)}$ и $\delta_0 = B_0^{\min}$. Условие (6) может быть представлено в следующей форме:

$$\sum_{j=0}^{v-1} \delta_j \geq A_v^{\max}, \quad v = 1, \ldots, r. \tag{12}$$

Предположим, что перестановка $\pi = (J_0, J_1, \ldots, J_r, J_{r+1})$ отличается от перестановки π^*. Пусть начала перестановок π и π^* совпадают до индекса l включительно, $0 \leq l < r-1$, а на позиции $l+1$ в них расположены разные элементы J_{l+1} и J'_{l+1} соответственно. Если $\delta(J'_{l+1}) \geq 0$, то переместим в π элемент J'_{l+1} на позицию $l+1$, сохранив взаимное расположение остальных элементов. Из описания шага 2 следует, что $A^{\max}(J'_{l+1}) \leq A^{\max}(J_{l+1})$ и, следовательно, $\sum_{j=0}^{l} \delta_j \geq A^{\max}(J'_{l+1})$. Кроме того, из $\delta(J'_{l+1}) \geq 0$ следует справедливость и остальных неравенств из (12) для полученной перестановки. Повторив описанные действия достаточное число раз, перейдем от π к перестановке π', в которой расположение всех элементов множества X_1 совпадает с их расположением в π^*.

Предположим, что перестановки π' и π^* различны и в них совпадают последние l элементов, а на позиции $r+1-l$ расположены разные элементы J_{r+1-l} и J'_{r+1-l} соответственно. Пусть в π' элемент J'_{r+1-l} занимает позицию $k < r+1-l$. Положим $\delta = \delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_k + \ldots + \delta_{r-l}$. Тогда в (12) при $v = r+1-l$ имеем $\delta \geq A_{r+1-l}^{\max}$. Положим $\delta' = \delta - \delta_k + \delta_{r+1-l} = \delta - B_k^{\min} + A_k^{\max} + B_{r+1-l}^{\min} - A_{r+1-l}^{\max}$. Переместим в π' элемент J_k на позицию $r+1-l$, сохранив взаимное расположение остальных элементов. Поскольку $\delta_k < 0$, все неравенства из (12) останутся справедливыми для полученной перестановки за исключением, возможно, неравенства для перемещенного элемента, т. е. неравенства $\delta' \geq A_k^{\max}$. Покажем, что и это неравенство справедливо. Действительно, неравенство $\delta' \geq A_k^{\max}$ эквивалентно неравенству $\delta - B_k^{\min} + B_{r+1-l}^{\min} \geq A_{r+1-l}^{\max}$. Из описания шага 2 алгоритма 2 следует, что $B_k^{\min} \leq B_{r+1-l}^{\min}$, т. е. неравенство $\delta - B_k^{\min} + B_{r+1-l}^{\min} \geq A_{r+1-l}^{\max}$ верно.

Повторив описанные действия достаточное число раз, перейдем от перестановки π' к π^*. Если перестановка, удовлетворяющая условию (6), отсутствует, но существует перестановка, удовлетворяющая условию (7), то доказательство строится аналогичным образом. ■

Замечание 4. Из описания алгоритма 2 следует существование глобально оптимальной перестановки, допустимой относительно строгого порядка $\to$, если множество глобально оптимальных перестановок не пусто.

Введем понятие поглощающего достаточного условия. Пусть α и β – условия, при которых истинно некоторое утверждение γ. Будем говорить, что условие α *поглощает* условие β, если справедливость α следует из справедливости β. Условие α *строго поглощает* условие β, если α *поглощает* β, а обратное не верно. Если условие α строго поглощает условие β, это означает, что α налагает на γ более слабые ограничения по сравнению с условием β.

В работе [5] сформулированы достаточные условия существования глобально оптимальной перестановки для задачи, аналогичной задаче *P1*. В работе [5] рассмотрен случай, когда отношение строгого порядка на множестве $\{J_1, \ldots, J_r\}$ обязательно пусто, что заметно ограничивает возможность использования результатов, а для проверки условий существования глобально оптимальной перестановки авторы [5] предлагают перебирать $r!$ перестановок. В [5] достаточные условия сформулированы в виде утверждений 8 и 9 и их частных случаев для $r = 2$ и $r = 3$, представленных утверждениями 2 и 5 и утверждениями 4 и 7 соответственно. Из всех перечисленных утверждений лишь утверждения 2 и 5 сопровождаются в [5] доказательствами. Утверждение 8 из [5] (если исправить опечатки) совпадает с первой частью теоремы 3 (см. условие (6)). Утверждение 9 из [5] прочесть не удается, поскольку не указана область изменения параметра s, а область изменения s из утверждения 8 не подходит для утверждения 9. Поэтому дальнейшее обсуждение ограничим утверждениями 4 и 7 из [5].

В силу следствия 3 условия теоремы 3 поглощают каждое из 20 достаточных условий, представленных утверждениями 4 и 7 из [5], поскольку все эти условия основаны на использовании равенства $C_{\max}(\pi^*) = a_0 + \max\{LB_1, LB_2\} + b_{r+1}$. Более того, условие (7) строго поглощает каждое из 20 упомянутых условий. Рассмотрим, например, условия (96)–(101) из утверждения 7 [5]. В наших обозначениях условия (99)–(101) из [5] имеют следующий вид:

$$A_3^{\min} \le B_2^{\max}; \tag{13}$$

$$A_2^{\min} + A_3^{\min} \ge B_1^{\max} + B_2^{\max}; \tag{14}$$

$$A_3^{\min} + A_4^{\min} \ge B_2^{\max} + B_3^{\max}. \tag{15}$$

Перепишем условия (7) для случая r=3:

$$A_4^{\min} \ge B_3^{\max}; \tag{16}$$

$$A_3^{\min} + A_4^{\min} \ge B_2^{\max} + B_3^{\max}; \tag{17}$$

$$A_2^{\min} + A_3^{\min} + A_4^{\min} \ge B_1^{\max} + B_2^{\max} + B_3^{\max}. \tag{18}$$

Из (13) и (15) можно заключить, что $A_4^{\min} \ge B_3^{\max}$, т. е. справедливо (16). Неравенство (17) совпадает с (15). Из (13) и (14) следует $A_2^{\min} \ge B_1^{\max}$. Комбинация этого неравенства и (15) дает нам (18). Итак, условия (16)–(18) поглощают условия (13)–(15), а ограничения (96)–(98) из [5] являются избыточными.

В работе [5] на основе перечисленных и некоторых других утверждений предложен приближенный алгоритм решения исходной задачи Беллмана – Джонсона для двух приборов в условиях неопределенности и приведены результаты вычислительного эксперимента, выполненного с целью оценки качества получаемых решений в среднем. Авторы работы [5] по каким-то причинам не провели сравнение полученных ими результатов с результатами по оценке качества решений, получаемых другими приближенными алгоритмами. Например, в работе [1] предложено несколько алгоритмов для решения той же задачи. Результаты вычислительных экспериментов, изложенные в [1], демонстрируют существенное преимущество описанных в [1] алгоритмов над алгоритмами, предложенными в [5]. Сравним приведенные в [1] и [5] результаты.

Из описания схемы генерации примеров в [5, с. 1007] следует, что генерируемые величины $A_j^{\min}$ и $A_j^{\max}$ равномерно распределены на интервале [10, 1000] таким образом, что выполняется равенство $A_j^{\max} = \dfrac{200+L}{200-L} A_j^{\min}$, где управляемый параметр L принимает значения 1, …, 10 для примеров от 10 до 100 требований [5, табл. 2–4]. Величины $B_j^{\min}$ и $B_j^{\max}$ генерируются аналогичным образом. Для $L = 10$ получаем $A_j^{\max} \le 1{,}106 \cdot A_j^{\min}$ и $B_j^{\max} \le 1{,}106 \cdot B_j^{\min}$, т. е. верхние границы интервалов возможных значений длительностей обслуживания требований отличаются от нижних не более чем на 10,6 %.

В [1] рассмотрено несколько схем генерации исходных данных, в каждой из которых верхние и нижние границы упомянутых интервалов выбираются случайным образом из интервала [20, 1000]. В одной из схем величины $A_j^{\max}$ и $B_j^{\max}$ равномерно распределены в интервалах [$1{,}15 \cdot A_j^{\min}$, $1{,}5 \cdot A_j^{\min}$] и [$1{,}15 \cdot B_j^{\min}$, $1{,}5 \cdot B_j^{\min}$] соответственно. Алгоритм A1 – один из простейших рассмотренных в [1] алгоритмов – основан на принципе гарантированного результата. Для упомянутой схемы генерации примеров алгоритм A1 дает следующие результаты: средняя относительная погрешность для $C_{\max}$ равна 0,024 % для 10 требований и 0,0007 % для 100 требований [1, табл. 4, строка 1]. В [5] при $L = 10$ имеем 0,67 % для 10 требований и 0,17 % для 100 требований [5, табл. 2]. Для другой схемы генерации примеров в [1] величины $A_j^{\max}$ и $B_j^{\max}$ равномерно распределены в интервалах [$2{,}4 \cdot A_j^{\min}$, $3{,}0 \cdot A_j^{\min}$] и [$2{,}4 \cdot B_j^{\min}$, $3{,}0 \cdot B_j^{\min}$] соответственно. В этом случае средняя относительная погрешность для $C_{\max}$ составила 0,342 % для 10 требований и 0,0091 % для 100 требований [1, табл. 4, строка 6], т. е. даже в ситуации, когда верхние границы интервалов возможных значений длительностей обслуживания требований отличаются от нижних более чем в 2,5 раза, алгоритм A1 имеет погрешность, заметно меньшую по сравнению с алгоритмом из работы [5], работающим в условиях, когда разница между верхними и нижними границами составляет менее 11 %.

Временная сложность алгоритма A1, равная $O(n \log n)$, не выше сложности алгоритма из [5], который только на предварительном этапе требует выполнения $O(n^2)$ операций.

Заключение

Для задачи Беллмана – Джонсона для двух приборов в условиях неопределенности предложены достаточные условия существования глобально оптимального расписания (расписания, которое является оптимальным одновременно для всех допустимых значений неопределенных параметров). Временная сложность проверки найденных условий – $O(n \log n)$.

Введенное понятие глобально оптимального расписания очевидным образом обобщается на случай произвольной задачи дискретной оптимизации в условиях неопределенности (в этом случае следует говорить о глобально оптимальном варианте). В работе [8] сформулированы условия, которые можно трактовать как условия существования глобально оптимальной перестановки для задачи минимизации произвольного приоритето-порождающего функционала в условиях неопределенности. В случае строгого приоритето-порождающего функционала приведенные в [8] условия являются не только достаточными, но и необходимыми.

Автор выражает признательность М.Я. Ковалеву за полезные рекомендации и замечания.

Список литературы

1. Шафранский, Я.М. Свойства расписаний для 2×n задачи Беллмана – Джонсона с точки зрения вычислительного эксперимента / Я.М. Шафранский, М.С. Баркетов // Доклады Третьей Междунар. конф. «Танаевские чтения». – Минск : ОИПИ НАН Беларуси, 2007. – С. 163–168.

2. Шафранский, Я.М. Задачи теории расписаний с неопределенными параметрами: направления исследований и некоторые результаты / Я.М. Шафранский // Информатика. – 2005. – № 3 (7). – С. 5–15.

3. Shafransky, Y. Scheduling jobs with uncertain parameters: analysis of research directions / Y. Shafransky // Operations Research Proc. 2005 / Eds. : H.-D. Haasis, H. Kopfer, J. Schoenberger. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2006. – P. 709–714.

4. Лещенко, Н.М. Оптимальное по быстродействию обслуживание конфликтных требований с нефиксированными длительностями / Н.М. Лещенко, Ю.Н. Сотсков // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2006. – № 4. – С. 103–110.

5. Schedule execution for two-machine flow-shop with interval processing times / N.M. Matsveichuk [et al.] // Mathematical and Computer Modelling. – 2009. – Vol. 49. – P. 991–1011.

6. Johnson, S.M. Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included / S.M. Johnson // Naval Research Logistic Quarterly. – 1954. – Vol. 1. – P. 61–68.

7. Brucker, P. Scheduling Algorithms / P. Brucker. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1995. – 326 p.

8. Шафранский, Я.М. Задачи теории расписаний с неопределенными параметрами: приоритето-порождающие функционалы / Я.М. Шафранский // Информатика. – 2009. – № 1 (21). – С. 5–16.

Поступила 14.05.09

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: shafr@newman.bas-net.by

Y.M. Shafransky

ON THE EXISTENCE OF GLOBALLY OPTIMAL SCHEDULES FOR TWO-MACHINE BELLMAN – JOHNSON PROBLEM UNDER THE CONDITIONS OF UNCERTAINTY

The paper addresses the known two-machine Bellman – Johnson scheduling problem under the assumption that job processing times are unknown and only sets of their possible values are available. Sufficient conditions of schedule existence that is optimal for any values of the job processing times taken from the given sets are adduced.