

УДК 539.3

О.Л. Швед, А.А. Абрамов

ПЕРЕХОД ОТ АКТИВНОГО НАГРУЖЕНИЯ К ПАССИВНОМУ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Предлагается модель нелинейно упругопластического материала. Формулируется условие непрерывности при переходе от активного нагружения к пассивному, которое обеспечивается в регулярной точке поверхности текучести с неположительной удельной мощностью деформации. В противном случае непрерывность перехода отсутствует. Рассматривается возможность описания явления «запирания» области высокого давления при переходе материала из пластического состояния в упругое.

Введение

В работах [1–3] представлена модель нелинейно упругопластического материала. Она предназначена прежде всего для математического моделирования процессов обработки металлов давлением, которые не описываются существующими теориями. Идея построения состоит в обобщении модели нелинейной упругости на упругопластичность на основе фундаментального закона упругости Мурнагана [4, 5]. При применении менее сложного закона упругости в данном подходе эффективность модели резко снижается. Несмотря на простоту идеи, она обладает новизной и является нестандартной. Используются принцип сохранения потенциальной природы упругой деформации (существования потенциалов напряжений и их скоростей) и принцип попеременного чередования упругого и пластического состояний элементов деформируемого твердого тела. В пластическом состоянии материал предполагается несжимаемым. Требование потенциальности в скоростях напряжений с учетом вида дифференциального определяющего уравнения позволяет определить кусочно-вогнутые девиаторные сечения поверхности текучести. Они получаются путем соединения в сингулярных точках представителей двух семейств вогнутых поверхностей, отвечающих за процессы растяжения и сжатия. При этом просто учитывается эффект Баушингера. Поверхность текучести образуется своими девиаторными сечениями с учетом экспериментальных данных. Понятие пластической деформации не является рабочим и в общем случае не определяется, поскольку в условиях геометрической нелинейности однозначно это сделать невозможно [6]. Поэтому для описания процесса течения вводятся два независимых параметра упрочнения по типу классического параметра Р. Шмидта, совпадающих с ним в частных случаях. При однородной деформации пластическую деформацию можно определить путем полной разгрузки материала.

В работе [3] естественным образом описываются вызывающие затруднения при моделировании следующие экспериментальные факты: одноосное растяжение больше действует в смысле упрочнения на последующее растяжение в ортогональном направлении и меньше – на последующее сжатие; одноосное сжатие меньше действует в смысле упрочнения на последующее сжатие в ортогональном направлении и больше – на последующее растяжение. В [7] описывается явление увеличения пластичности материала под действием дополнительного всестороннего сжатия. Требование существования потенциалов напряжений позволяет описать важный экспериментальный факт роста анизотропии при пластической деформации. Ниже будут рассматриваться возможности описания необычного с точки зрения механики материалов явления «запирания» области высокого давления, связанного с переходом материала от активного нагружения к пассивному – разгрузкой [8]. Так, при сжатии тонкого диска на наковальне Бриджмена [9], начиная с некоторой величины усилия, в центре диска образуется и расширяется упругая область, и никаким сколь угодно большим давлением не удастся изменить остаточную толщину. В первую очередь приведем необходимые соотношения и рассмотрим вопрос о возможном учете условия непрерывности материала при разгрузке в данной модели для ее небольшого уточнения.

1. Модель нелинейно упругопластического материала

Геометрически нелинейная модель упругости [1–3] обобщается на геометрически нелинейную модель упругопластичности. Транспонированный градиент деформации $\overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T$ в упругом законе заменяется неособенным тензором \mathbf{F}_e , который при течении находится из решения системы определяющих уравнений. Удельная потенциальная энергия упругой деформации представляется в виде

$$\begin{aligned} \vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + c, \quad \vartheta_0 = 4^{-1}(4^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9v_1 + 18v_2 + 8v_3)I_1 + 4^{-1}(2\lambda + 4\mu - 3v_1 - 10v_2 - 8v_3)I_1^2 + \\ + (-2\mu + 3v_2 + 4v_3)I_2 - (v_2 + 2v_3)I_1I_2 + 12^{-1}(v_1 + 6v_2 + 8v_3)I_1^3 + 2v_3I_3), \end{aligned} \quad (1)$$

где ϑ_0 – изотропный потенциал; $\vartheta_2 = \delta_1(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2 + \dots$; $\vartheta_3 = \delta_{22}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^3 + \dots$ – анизотропные структуры второй и третьей степени по компонентам тензора упругой деформации Коши – Грина \mathbf{C} ; c – минимальная постоянная, обеспечивающая условие $\vartheta \geq 0$, начальное ее значение $c = 8^{-1}(9\lambda + 6\mu - 2^{-1}9v_1 - 9v_2 - 4v_3)$; λ, μ – постоянные Ляме второго и v_1, v_2, v_3 – третьего порядков; \mathbf{G} – мера упругой деформации Коши – Грина ($\mathbf{G} = 2\mathbf{C} + \mathbf{E}$); I_1, I_2, I_3 – первый, второй и третий главные инварианты меры $\mathbf{G} = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e$ и меры упругой деформации Фингера $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T$, $\mathbf{F} = \mathbf{V}^2$; \mathbf{V} – мера упругих искажений. Для изотропного материала все параметры анизотропии являются нулевыми.

Из (1) получаем соотношение для тензора напряжений Коши:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = 2(\sqrt{I_3})^{-1} \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T = \mathbf{T}_0 + \sum_j \delta_j \mathbf{T}_j, \\ \mathbf{T}_0 = 2(\sqrt{I_3})^{-1}(\varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{F} + \varphi_2 \mathbf{F}^2)(\varphi_0 = a_0 I_3, \varphi_1 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + b_3 I_2, \varphi_2 = c_0 + c_1 I_1), \\ a_0 = 2^{-1}v_3, \quad b_0 = 16^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9v_1 + 18v_2 + 8v_3), \quad b_1 = 8^{-1}(2\lambda - 3v_1 - 4v_2), \\ b_2 = 16^{-1}(v_1 + 2v_2), \quad b_3 = -4^{-1}(v_2 + 2v_3), \quad c_0 = 4^{-1}(2\mu - 3v_2 - 4v_3), \quad c_1 = -b_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Явный вид скаляров ϑ_2, ϑ_3 и тензоров \mathbf{T}_j для ортотропного материала приведен в [10]. Уравнения в конечном виде для потенциала напряжений (1) и тензора напряжений (2) справедливы для упругого и пластического состояний материала.

Введем критериальный девиатор-оператор, через который будет записываться критерий текучести. Обозначим: $\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = \mathbf{T} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}$ ($\mathbf{\Omega} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}$ – тензор упругого спина [11], точка над символом означает материальную производную) – объективная О-производная тензора \mathbf{T} ; \mathbf{D} – тензор скорости деформаций; \mathbf{W} – тензор вихря; $\nabla \mathbf{v}$, $\nabla \mathbf{v}^T$ – градиенты скорости. Определим девиатор-оператор $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$ как О-производную девиатора $\text{dev } \mathbf{T}$, вычисленную при условии несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ по соотношению нелинейной упругости $\dot{\mathbf{F}}_e = \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F}_e$ [4]. Последнее уравнение задает тензор \mathbf{F}_e в упругом состоянии.

Вычислим материальную производную тензора \mathbf{T} . Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{G}} = (\mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e) \cdot = \mathbf{F}_e^T \cdot (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}_e = 2\mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}_e, \quad \dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T) \cdot = \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{v}, \\ \dot{I}_1 = \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{F}} = 2\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}, \quad \dot{I}_2 = (\mathbf{E} I_1 - \mathbf{F}) \cdot \dot{\mathbf{F}} = 2(I_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D}), \quad \dot{I}_3 = I_3 \mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}} = 2I_3 \nabla \cdot \mathbf{v}, \end{aligned}$$

$$((\sqrt{I_3})^{-1})' = -2^{-1}((\sqrt{I_3})^{-3})2I_3\nabla \cdot \mathbf{v} = -(\sqrt{I_3})^{-1}\nabla \cdot \mathbf{v},$$

$$(\varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{F} + \varphi_2 \mathbf{F}^2)' = \dot{\varphi}_0 \mathbf{E} + \dot{\varphi}_1 \mathbf{F} + \dot{\varphi}_2 \mathbf{F}^2 + \varphi_1 (\nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \varphi_2 (\nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F}^2 + \mathbf{F}^2 \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}),$$

$$\dot{\varphi}_1 = (b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + b_3 I_2)' = 2(d \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + c_1 \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D}) \quad (d = b_1 + (2b_2 - c_1)I_1),$$

$$\dot{\varphi}_0 = (a_0 I_3)' = 2a_0 I_3 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = (c_0 + c_1 I_1)' = 2c_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{D},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_0 + \sum_j \delta_j \mathbf{S}_j, \quad \mathbf{T}_j = 2(\sqrt{I_3})^{-1} \mathbf{S}_j, \quad \dot{\mathbf{T}}_j = -\nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{T}_j + \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{T}_j + \mathbf{T}_j \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{S}_j, \quad \dot{\mathbf{T}}_0 = -\nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{T}_0 + \\ &+ \mathbf{T}_0 \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{T}_0 + 4L_3^{-1}(a_0 I_3 \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{E} + (d \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + c_1 \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D}) \mathbf{F} + c_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \mathbf{F}^2 - \varphi_0 \mathbf{D} + \varphi_2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}). \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая, что $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$, $\nabla \mathbf{v}^T = \mathbf{D} + \mathbf{W}$, и используя (2), из (3) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{D}) &= (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) + \mathbf{Q}_0(\mathbf{D}) + \mathbf{Q}_1(\mathbf{D}) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{D}), \quad \mathbf{Q}_0 = \text{dev} 4I_3^{-\frac{1}{2}} ((d \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + \\ &+ c_1 \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D}) \mathbf{F} + c_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \mathbf{F}^2 + \varphi_1 2^{-1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}) + \varphi_2 (2^{-1} (\mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}^2) + \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F})). \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения для тензоров \mathbf{S}_j , $\mathbf{Q}_1(\mathbf{D})$, $\mathbf{Q}_2(\mathbf{D})$ в (3) и (4) являются громоздкими и представлены в работе [9].

Критерий текучести в точках поверхности текучести запишем как

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \geq 0 \quad (\mathbf{D} \neq 0). \quad (5)$$

Переход от активного нагружения к пассивному в пластическом состоянии происходит при нарушении неравенства (5). Ранее в (5) использовалось строгое неравенство [1–3], поэтому ограничение $\mathbf{D} \neq 0$ было излишним.

О п р е д е л е н и е 1. Если в соотношении (5) выполняется $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} = 0$, нагружение назовем нейтральным.

В силу положительной определенности оператора $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}$ неравенство (5) можно заменить неравенством $\mathbf{D} \cdot \mathbf{N} \geq 0$ и равенство $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} = 0$ равносильно равенству $\mathbf{D} \cdot \mathbf{N} = 0$. При векторной интерпретации симметричных тензоров второго ранга направления векторов \mathbf{Q} , \mathbf{D} являются близкими.

Уравнения в дифференциальном виде для напряжений, потенциала напряжений и параметров анизотропии при течении в регулярной точке поверхности текучести получены в [1, 2]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} &= K(\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N}), \quad ((\sqrt{I_3})^{-1})' = P \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}, \quad \dot{\delta}_j = k_j \beta \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_j (\sqrt{\mathbf{T}_j \cdot \mathbf{T}_j})^{-1} \\ &(\mathbf{T}_j \neq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \beta \rightarrow \min, \quad k_j = \pm 1), \end{aligned} \quad (6)$$

где \mathbf{N} – вектор внешней нормали к поверхности девиаторного сечения ($\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$). Он выбирается из двух собственных векторов оператора $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$. Скаляр β характеризует скорость роста анизотропии. При значении $\beta = 0$ параметры анизотропии не изменяются.

В уравнениях (6) возможны два случая. В первом (основном) случае величина удельной мощности деформации является положительной: $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} > 0$, во втором – неположительной: $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \leq 0$. В зависимости от этого задаются скаляры K и P .

В первом случае не зависящий от девиатора \mathbf{D} малый скаляр $K > 0$ определяется в экспериментах по двухосному растяжению ($K = K_1$) и по двухосному сжатию ($K = K_2$):

$$K = K_i, \quad P = 1 - \alpha_i \quad (i = 1, 2). \quad (7)$$

Близкая к единице величина α_i определяется в одноосных растяжении и сжатии и имеет смысл относительной части рассеиваемой работы деформации.

Во втором случае полагаем

$$K = K_0 + \theta K_i, \quad P = 1, \quad \theta = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N} / \sqrt{\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}} \sqrt{1 - (\text{dev } \mathbf{T} \cdot \mathbf{N})^2 / \text{dev } \mathbf{T} \cdot \text{dev } \mathbf{T}}. \quad (8)$$

Значения скаляра θ равномерно изменяются в промежутке $0 \leq \theta \leq 1$ при значениях величины скорости деформаций от $\mathbf{D} \cdot \mathbf{N} = 0$ до $\mathbf{D} \cdot \mathbf{T} = 0$. Ранее в работе [1] выбиралось $\theta = 1$. Скаляр K_0 определяется следующим образом: надо положить в (6) $P = 1, \beta = 0$, затем из системы уравнений (1), (2), (6) для неизвестных $\overset{\Omega}{\mathbf{V}}, K_0$ определить значение $K_0 = 0$. Для изотропного материала можно выбирать в качестве неизвестных $\overset{\Omega}{\mathbf{F}}, K_0$. При $\mathbf{D} \cdot \mathbf{T} = 0$ получаем $K_0 = 0$. Теряется потенциальность в скоростях напряжений, но первое уравнение в (6) остается однородным первой степени относительно компонентов тензора \mathbf{D} . Необходимое условие по Р. Хиллу для определяющего уравнения теории пластичности выполняется.

Неубывающий параметр упрочнения Р. Шмидта определяется как $\dot{\chi} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$, где под тензором \mathbf{D} понимается тензор скорости пластических деформаций. Скалярная величина в правой части последнего уравнения является неотрицательной. Начальное значение для изотропного материала $\chi = 0$. В локальном базисе собственных векторов критериального оператора справедливы соотношения $\text{dev } \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i + \dots, \mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i + \dots$, где \mathbf{N}_i – вектор нормали к поверхности девиаторного сечения. Учитывая, что выполняются неравенства $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_i > 0, \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_i \geq 0$, два неотрицательных и неубывающих параметра упрочнения можно задать следующим образом:

$$\dot{\chi}_i = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_i \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_i, \quad \dot{\chi}_j = 0 \quad (i, j = 1, 2; i \neq j). \quad (9)$$

Начальные значения будут $\chi_1 = 0, \chi_2 = 0$. При одноосных нагружениях активный параметр упрочнения, который соответствует вектору нормали \mathbf{N}_i , в силу пропорциональности девиаторов $\text{dev } \mathbf{T}, \mathbf{D}, \mathbf{N}_i$ совпадает с параметром Р. Шмидта.

2. Условие непрерывности при переходе от пластического состояния к упругому

В линейной теории пластичности с поверхностью текучести существует понятие нейтрального нагружения. Если приращение вектора напряжений направлено в наружную сторону поверхности текучести, оно сопровождается пластической деформацией и называется активным. Если приращение направлено внутрь объема, ограниченного данной поверхностью, нагружение называют пассивным, или разгрузкой. Промежуточный случай называют нейтральным нагружением. В этом случае должна отсутствовать пластическая деформация. Так, в деформационной теории ее наличие явилось серьезным дефектом.

В рассматриваемой нелинейной модели материала при течении согласно этому определению все нагружения являются нейтральными и должны сопровождаться пластической дефор-

мацией за исключением предельного случая. Поэтому будем использовать указанную выше формулировку нейтрального нагружения. Условие непрерывности можно сформулировать следующим образом.

Определение 2. Пусть в соотношении (5) выполняется $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \rightarrow 0$. Следовательно, выполняется и $\mathbf{D} \cdot \mathbf{N} \rightarrow 0$. Тогда величина прироста пластической деформации должна стремиться к нулю и должно иметь место затухание роста параметров анизотропии, т. е. в (6) $\beta \rightarrow 0$.

Как будет показано ниже, полностью устранить появление пластических деформаций не удастся в силу особенностей модели. Для пояснения дальнейших рассуждений обратимся к примеру [1, 3].

Пример 1. Рассмотрим ортотропный идеально упругопластический материал ($\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} = 0$), который первоначально является изотропным (рис. 1, а). Используем данные по вольфраму. Рассчитывалось нагружение типа растяжение и сжатие по трем осям, когда удельная мощность деформации становится неположительной. Вектор \mathbf{D} направлен в створ угла, обозначенного двумя дугами. На начальной кривой пластичности, соответствующей одноосному растяжению, отрезком указана точка, в которой находится точка процесса (рис. 1). В эксперименте это соответствует растяжению по первой, второй оси и сжатию по третьей оси с искажениями 1,0001, 1,00136 и 0,99913. При течении происходило перемещение точки процесса по кривой пластичности влево в точку, соответствующую ее положению в одноосном растяжении, при малом приросте анизотропии. Согласно (9) значения параметров упрочнения остаются нулевыми ($\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0$) при нейтральном нагружении.

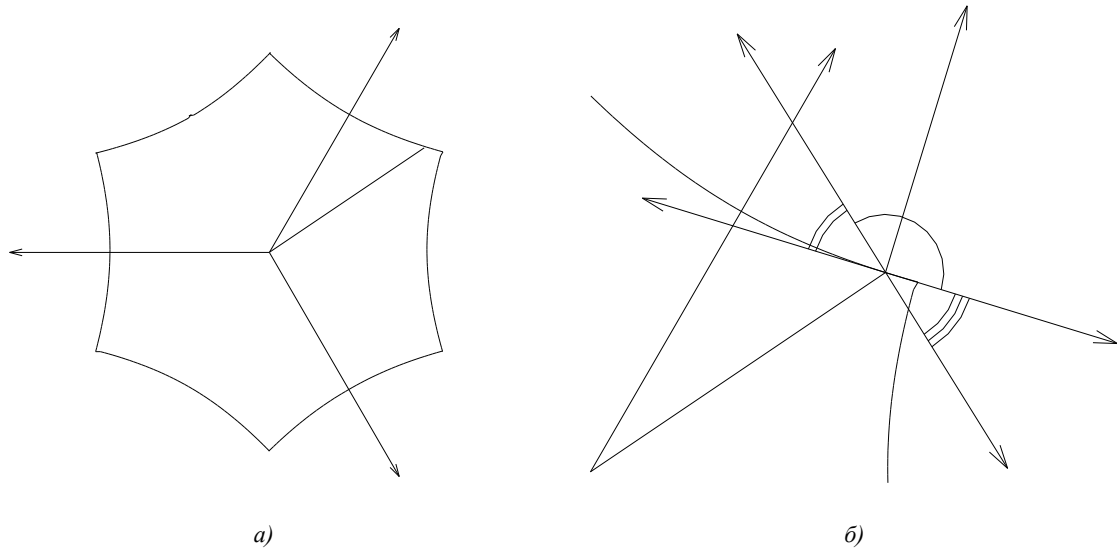


Рис. 1. Кривая пластичности (а) и ее увеличенный участок (б)

Далее, вычисляя из (2) \mathbf{T} , а из (1) $\dot{\epsilon}$, получаем систему одного тензорного и одного скалярного уравнений для определения \mathbf{F} и K_0 :

$$\begin{aligned}
 & -2^{-1} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} \mathbf{T} + 2\sqrt{I_3} (\varphi_0 \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} \mathbf{E} + (d \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} + c_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) \mathbf{F} + c_1 \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} \mathbf{F}^2 + \varphi_1 \mathbf{F} + \\
 & + \varphi_2 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{F})) - K_0 \mathbf{Q} = 0, \quad (\sqrt{I_3})^{-1} (\varphi_1 \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} + \varphi_2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} + (\varphi_0 - 2^{-1} \varphi_0) \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Умножаем в (10) первое уравнение на $2^{-1} \sqrt{I_3}$, второе – на $\sqrt{I_3}$. Пусть $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ – ортонормированный триэдр главных осей анизотропии.

При течении выполняется условие несжимаемости в скоростях $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = 0$. В упругом состоянии для ортотропного материала справедливо соотношение $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$. Вероятно, при нейтральном нагружении должно выполняться условие $K_0 = 1$ в (6), (8) из соображений непрерывности перехода из пластического состояния в упругое.

Следовательно, получаем $\mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}) = 2\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = 0$. В первом уравнении (10) девиаторная часть обращается в нуль по определению девиатора \mathbf{Q} . Система сводится к двум скалярным уравнениям

$$A\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} + B\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = 0, \quad \varphi_1 \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} + \varphi_2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (A = dI_1 + c_1d_2 + \varphi_1, \quad B = c_1I_1 + 2\varphi_2). \quad (11)$$

С точностью до малых величин $d'_2 = \mathbf{E} \cdot \text{dev} \mathbf{F}^2$, $I_1 - 3$ справедливы оценки [9]

$$I_1 = 3, \quad d_2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^2 = 3, \quad I_3 = 1, \quad c_1 = 4^{-1}(\nu_2 + 2\nu_3), \quad d = 4^{-1}(\lambda - 2\nu_2 - 6\nu_3), \\ \varphi_1 = -2^{-1}\mu - \nu_3, \quad \varphi_2 = 2^{-1}(\mu + \nu_3).$$

Находим определитель системы (11):

$$\Delta = A\varphi_2 - B\varphi_1 = 8^{-1}(3\lambda\mu + 2\mu^2 + 3\lambda\nu_3 + 3\nu_2\nu_3 + 4\nu_3^2).$$

Согласно данным по вольфраму находим $\frac{\Delta}{\mu^2} = 1,76$. Таким образом, решения системы (11) будут только нулевыми. Переходим к системе

$$\mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}} = 0, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (12)$$

относительно тензора скорости деформаций. Определитель системы уравнений (12) будет нулевым тогда и только тогда, когда выполняется по крайней мере одно из соотношений $\mathbf{F} \cdot \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{c}_j \mathbf{c}_j$ ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$). Это условие равносильно выполнению соотношений $\text{dev} \mathbf{T} \cdot \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i = \text{dev} \mathbf{T} \cdot \mathbf{c}_j \mathbf{c}_j$. Следовательно, искомая точка должна находиться на пересечении кривой пластичности и проекций (с учетом ее продолжения) базисных диад $\mathbf{c}_j \mathbf{c}_j$, которые показаны стрелками на рис. 1, а. Однако в данных точках имеет место условие положительности удельной мощности деформации при течении. Значит, рассматриваемый случай не реализуется. Заданное перемещение по кривой пластичности при пассивном нагружении возможно только при условии $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \neq 0$. Поэтому в расчетах не достигается значение $K_0 = 1$, а получается величина $K_0 = 1 \pm \varepsilon$, где согласно расчетам $\varepsilon = 0,0013$. Наблюдается расхождение величин скоростей общих и упругих искажений порядка 0,1 %. Поэтому неизбежно накапливается пренебрежительно малая величина пластических деформаций.

В первом случае при течении (6) соблюдение условия непрерывности представляется искусственным. В третьем случае (в сингулярной точке) [1] перейти к разгрузке можно только тривиальным образом при условии $\mathbf{D} = 0$. В упругом состоянии непрерывность перехода соблюдается. Разгрузка происходит при перемещении точки процесса внутрь области, ограниченной поверхностью текучести.

Отметим, что обеспечение непрерывности не является целью исследования, гораздо важнее создать условия для описания проблемных течений, в частности таких, при которых имеет место явление «запирания» области высокого давления. Важным обстоятельством при этом является кусочная вогнутость полученной из обоснованных предположений поверхности текучести. Если вектор \mathbf{Q} направлен в створ угла, обозначенного на рис. 1 тремя дугами, то происходит разгрузка. Именно такой случай имеет место в следующем примере.

3. Возможности описания явления «запирания» области высокого давления

Пример 2. Рассмотрим модельный пример, заключающийся в наложении нагружения сжатия по третьей оси на нагружение простого сдвига по первым двум осям [12]. Расчет процесса простого сдвига проведен для вольфрама в предположении идеальной упругопластичности материала. В промежуточном состоянии, близком к конечному, по третьей оси прикладывается нагружение сжатия при помощи гладких подвижного и неподвижного штампов. Тензор скорости деформаций при этом имеет вид $\mathbf{D} = -3^{-1} \dot{p} \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 - 3^{-1} \dot{p} \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + 3^{-1} 2 \dot{p} \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3 + \dot{s} 2^{-1} (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_1)$, где \dot{p} – скорость подвижного штампа, \dot{s} – скорость изменения параметра сдвига. В результате вычислительных экспериментов установлено, что при условии $\dot{p} = -k\dot{s}$, $k \geq 0,6$, имеет место нарушение критерия текучести, приводящее к разгрузке. Оно реализуется, как указано в конце разд. 2. При этом величина удельной мощности деформации является положительной (см. рис. 1, б). Расчет модельного примера 2 также выполнен с использованием системы LS-DYNA для материала Баммана [13]. Установлено, что разгрузка не реализуется.

Вероятно, явление «запирания» области высокого давления будет описываться таким же образом. Численная реализация рассматриваемой модели материала для решения краевой задачи расчета процесса сжатия с кручением тонкого диска на наковальне Бриджмена пока не разработана. Используем систему LS-DYNA для модели Баммана. В качестве материала возьмем свинец, необходимые данные для расчетов получены в работе [14]. Для наглядного представления процесса осадки с кручением первоначально рассмотрим нагружение толстого диска.

Пример 3. Осадка круглого диска производится двумя бойками, нижний из которых с некоторого момента времени начинает вращаться относительно верхнего. Ось вращения бойка совпадает с осью осаживаемой заготовки, трение между ними принималось максимальное, т. е. выбрано условие прилипания. Размеры дисков составляли: радиус $R = 0,1$ м, высота $H = 0,1$ м и $H = 0,005$ м. Модель пластичности Баммана реализована в системе LS-DYNA в виде материала MAT_BAMMAN [15]. Параметры материала приведены в таблице.

Параметры материала (свинца) для модели Баммана

Параметр	Обозначение	Значение
Плотность	RO	11 340 кг/м ³
Модуль Юнга	E	1,6000E+10 Па
Коэффициент Пуассона	PR	0,4
Параметры модели Баммана	c1	3,9000E+5 Па
	c3	1,0000E+7 Па
	c5	0,002
	c7	5,8390E-7 Па
	c9	6,7460E+7 Па
	c15	1,1340E+7 Па
	c2, c9, c4, c6, c8...	0

Угловая скорость вращения нижнего бойка взята 0,314 1/с, общая степень обжатия составляла 10 % от высоты заготовки, отношение скорости вращения к относительной скорости осадки получалось 31,4. Вращение нижнего бойка начинается в момент, когда осадка выполнена на половину общего обжатия. Оба бойка рассматривались как абсолютно твердые тела. Геометрия заготовки моделировалась с помощью объемных элементов с равномерным распределением напряжения в форме гексаэдров. Задача решалась в неявной постановке с автоматическим выбором шага и нелинейным методом решения. Для учета больших деформаций и связанных с ними больших перемещений узлов задавалось подавление искажения формы элементов в картах HOURGLASS и CONTROL_HOURGLASS, благодаря чему программа более корректно рассчитывает усилия скручивания и снижает вероятность критического искажения форм элементов.

Результаты моделирования толстого диска приведены на рис. 2 и 3. Изображена половина диска с двух точек зрения (рис. 2). Наблюдается бочкообразование при осадке и сильное равномерное скручивание элементов. На рис. 3 показана зависимость усилия осадки от времени. В момент времени $t = 5$ с (когда начинается кручение заготовки) усилие осадки резко падает. Этот факт соответствует опытным данным [16]. К сожалению, в последней работе имеются некоторые математические неточности.

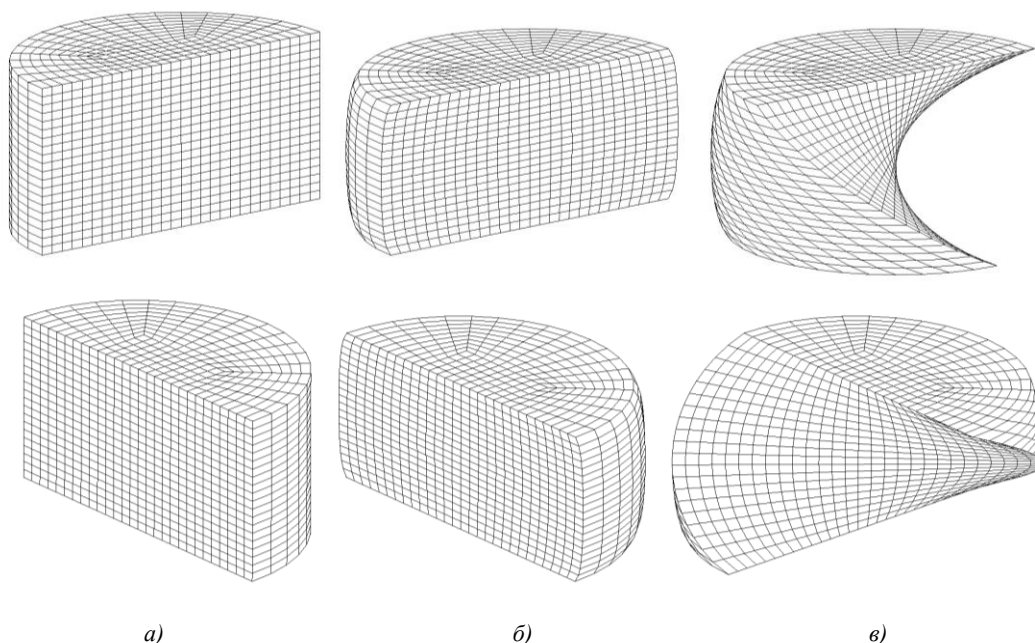


Рис. 2. Результаты моделирования формоизменения толстого диска: а) исходное состояние; б) после осадки на 5 % без кручения; в) после осадки на 10 % с поворотом бойка на 90°

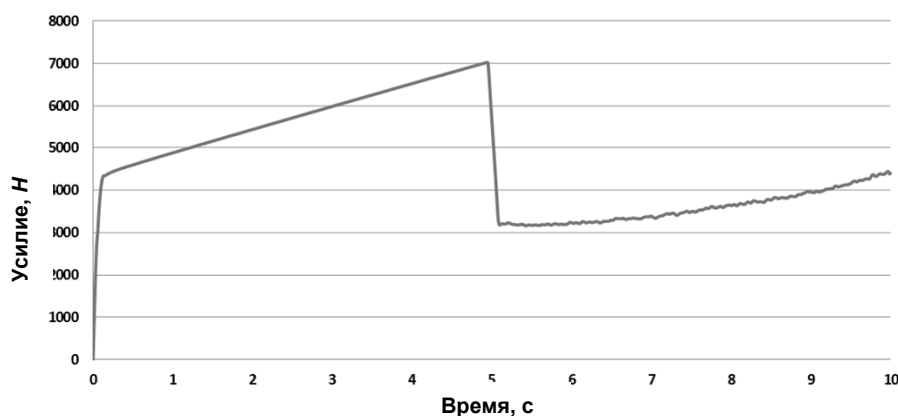


Рис. 3. Зависимость усилия осадки от времени

Пример 4. На рис. 4 показаны результаты вычислительного эксперимента нагружения тонкого диска на наковальне Бриджмена. Как и следовало ожидать, явление разгрузки в объеме диска не наблюдается и явление «запирания» области высокого давления не описывается.

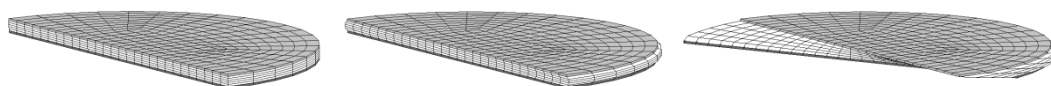


Рис. 4. Результаты моделирования формоизменения тонкого диска

Заключение

Сформулировано условие непрерывности при переходе от активного нагружения к пассивному. Установлено, что оно может быть обеспечено при состоянии течения в случае отрицательности удельной мощности деформации. Рассмотрен модельный пример для ортотропного материала, соответствующий этому случаю. В предельном состоянии задания скорости деформаций при указанном переходе параметры анизотропии остаются постоянными, обобщенный упругий закон не изменяется, однако наблюдается пренебрежительно малый рост пластической деформации. Причина состоит в том, что перемещение по кривой пластичности в упругом состоянии материала возможно только при сжимаемых полях скоростей перемещений. В активном нагружении поля скоростей перемещений являются несжимаемыми, что приводит к появлению малой пластической деформации.

В случае положительной удельной мощности деформации непрерывность при переходе отсутствует и не может быть соблюдена естественным образом. Исследовались возможности описания для этого случая явления «запирания» области высокого давления. Основанием для такого предположения является невыпуклость полученной поверхности текучести. Рассмотрен соответствующий модельный пример. С помощью системы LS-DYNA показано, что в данном случае разгрузка не происходит.

Для материала Баммана выполнено моделирование системой LS-DYNA процесса сжатия тонкого свинцового диска на наковальне Бриджмена. Установлено, что перехода материала из пластического состояния в упругое не наблюдается и явление «запирания» области высокого давления не описывается.

Список литературы

1. Швед, О.Л. Модель нелинейно упругопластического материала / О.Л. Швед // Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 1. – С. 63–68.
2. Швед, О.Л. О возможных определяющих соотношениях нелинейной упругопластичности / О.Л. Швед // Тр. VII Всерос. конф. по механике деформируемого твердого тела, Ростов-на-Д., 2013. – Ростов-на-Д., 2013. – Т. II. – С. 219–223.
3. Швед, О.Л. Определяющие соотношения ортотропного упругопластического материала / О.Л. Швед // Тр. VII Всерос. конф. по механике деформируемого твердого тела. – Ростов-на-Д., 2013. – Т. II. – С. 224–228.
4. Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
5. Murnagan, F.D. Finite deformation of an elastic solid / F.D. Murnagan. – N.Y. : Dover, 1967. – 140 p.
6. Naghdi, P.M. A critical review of the state of finite plasticity / P.M. Naghdi // ZAMP. – 1990. – Vol. 41, № 3. – P. 315–394.
7. Швед, О.Л. Численное моделирование эффекта увеличения пластичности металла при растяжении под действием высокого гидростатического давления / О.Л. Швед // Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2014. – № 4. – С. 18–23.
8. Левитас, В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении / В.И. Левитас. – Киев : Наукова думка, 1987. – 232 с.
9. Бриджмен, П. Исследование больших пластических деформаций и разрыва / П. Бриджмен. – М. : Изд-во иностр. лит., 1955. – 444 с.
10. Швед, О.Л. Определение девиаторного сечения поверхности текучести при математическом моделировании упругопластического поведения материалов / О.Л. Швед // Информатика. – 2014. – № 2(41). – С. 49–57.
11. Швед, О.Л. Определение тензора упругого спина в нелинейной теории пластичности / О.Л. Швед // Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 1. – С. 52–58.
12. Поздеев, А.А. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения / А.А. Поздеев, П.В. Трусов, Ю.И. Няшин. – М. : Наука, 1986. – 232 с.

13. Bammann, D.J. A model for finite deformation plasticity / D.J. Bammann, E.C. Aifantis // *Acta Mechanica*. – 1987. – Vol. 69. – P. 97–117.

14. Швед, О.Л. Исследование эффекта двойного бочкообразования при обработке металлов давлением с использованием системы LS-DYNA / О.Л. Швед, А.А. Абрамов // *Информатика*. – 2009. – № 1(21). – С. 17–24.

15. LS-DYNA: keyword user's manual. – Livermore : Livermore Software Technology Corporation, 2001. – Vol. 3. – 1421 p.

16. Воронцов, А.Л. Теория осадки с кручением заготовки / А.Л. Воронцов // *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением*. – 2007. – № 6. – С. 3–9.

Поступила 05.06.2015

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: swed@newman.bas-net.by*

O.L. Shwed, A.A. Abramow

TRANSITION FROM ACTIVE TO PASSIVE WEIGHTNING IN NONLINEAR ELASTO-PLASTIC PROCESS

A model of nonlinear elasto-plastic material is proposed. Continuity condition is formulated in transition from an active to passive weighting, which is provided in a regular point of the flow surface with a non-positive specific power of deformation. If the latter condition is not satisfied, there is no transition continuity. In this case, possibility of description of the phenomenon of «locking» the range of high pressure is considered in transition of material from plastic to elastic state.