ИНФОРМАТИКА

2009 **июль-сентябрь** **№ 3**

УДК 519.7

Ю.В. Поттосин, Н.Р. Торопов, Е.А. Шестаков

МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ НЕ ПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается задача минимизации системы не полностью определенных булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) при задании исходной системы функций в интервальной форме. Критерием минимизации является общее число различных элементарных конъюнкций в получаемой системе ДНФ. Предлагается метод решения данной задачи, который представляет собой обобщение предложенного авторами ранее метода минимизации системы полностью определенных булевых функций. В основе метода лежит оригинальный способ сведения данной задачи к задаче о кратчайшем покрытии, использующий простую операцию пересечения множеств. Приводятся результаты испытаний компьютерной программы, реализующей предлагаемый метод.

Введение

В работе [1] описан подход к решению задачи минимизации системы полностью определенных функций, позволяющий применить метод Блейка – Порецкого, не прибегая на последнем этапе к получению громоздкой системы совершенных ДНФ. Предлагаемый в настоящей статье метод можно рассматривать как распространение метода, изложенного в статье [1], на случай системы не полностью определенных булевых функций. Метод рассчитан на представление исходной системы в интервальной форме, которая является парой матриц ($\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$), где $\boldsymbol{U}$ – троичная матрица, задающая своими строками интервалы булева пространства аргументов, общих для всех функций из заданной системы, а $\boldsymbol{V}$ – троичная матрица, строки которой представляют значения этих функций на заданных интервалах [2].

Рассматриваемая задача, как и в известных методах минимизации булевых функций, сводится в настоящей работе к задаче покрытия булевой матрицы, однако для такого сведения, как и в статье [1], применяется оригинальный способ, основанный на использовании совокупности подмножеств строк троичной матрицы, которая близка к понятию покрытия троичной матрицы. Это понятие было первоначально введено при исследовании задачи декомпозиции булевых функций [3].

1. Основные определения и постановка задачи

Пусть задана система не полностью определенных булевых функций $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ от общего множества аргументов $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, образующих булево пространство M. Множества $M^1_{f_i} \subseteq M$ и $M^0_{f_i} \subseteq M$ представляют соответственно области единичных и нулевых значений функции f_i ($i = 1, 2, \dots, m$). В случае не полностью определенных функций для каждой функции f_i существует еще область неопределенных значений $M^-_{f_i} \subseteq M$. Если для задания полностью определенной функции достаточно одного из множеств $M^1_{f_i}$ и $M^0_{f_i}$, то для представления не полностью определенной функции необходимо задавать не менее двух множеств из $M^1_{f_i}$, $M^0_{f_i}$ и $M^-_{f_i}$. Удобными для этой цели являются множества $M^1_{f_i}$ и $M^0_{f_i}$. Интервальное задание системы не полностью определенных функций, как уже было сказано, представляет собой пару матриц ($\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$), где для каждой функции f_i ($i = 1, 2, \dots, m$) множество $M^1_{f_i}$ задается строками матрицы $\boldsymbol{U}$, которым соответствуют строки матрицы $\boldsymbol{V}$ с единицами в i-м столбце, а множество $M^0_{f_i}$ – строками матрицы $\boldsymbol{U}$, соответствующими строкам матрицы $\boldsymbol{V}$ с нулями в i-м столбце.

На множестве полностью и не полностью определенных булевых функций вводится отношение *реализации* и полагается, что функция g *реализует* функцию f (или функция f реализуется функцией g), если $M_f^1 \subseteq M_g^1$ и $M_f^0 \subseteq M_g^0$. Система $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ булевых функций, полностью или не полностью определенных, реализует систему не полностью определенных функций $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, если φ_i реализует f_i для всякого $i = 1, 2, \dots, m$. Задачу минимизации системы не полностью определенных булевых функций в классе ДНФ поставим следующим образом: для заданной системы не полностью определенных булевых функций F найти систему ДНФ, кратчайшую (с наименьшим общим числом элементарных конъюнкций) среди всех систем ДНФ, которые представляют системы полностью определенных функций, реализующих систему F.

Рассмотрим пару множеств (I, G), где I – интервал булева пространства M, а G – множество тех функций $f_i \in F$, для которых $I \subseteq M_{f_i}^1 \cup M_{f_i}^-$ и $I \cap M_{f_i}^1 \neq \varnothing$. Назовем пару (I, G) *g-интервалом* для системы функций F. *Максимальным* g-интервалом для системы F является такой g-интервал (I, G), что $I \cap M_{f_j}^0 \neq \varnothing$ или $I \cap M_{f_j}^1 = \varnothing$ для любой функции $f_j \notin G$ из F, а любое расширение интервала I нарушает условие $I \subseteq M_{f_i}^1 \cup M_{f_i}^-$ хотя бы для одной из функций $f_i \in G$.

Теперь задачу минимизации можно поставить следующим образом: для системы не полностью определенных булевых функций, заданной в интервальной форме, найти минимальную совокупность максимальных g-интервалов, покрывающую все пары вида (m_k, f_l), где $f_l \in F$ и $m_k \in M_{f_l}^1$.

Пара матриц $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$, представляющая кратчайшую систему ДНФ для заданной системы не полностью определенных булевых функций, строится следующим образом. Для каждого g-интервала (I, G) из найденной совокупности в матрицу $\boldsymbol{U}$ вводится строка в виде троичного вектора, представляющего интервал I, а в матрицу $\boldsymbol{V}$ – строка в виде булева вектора, представляющего множество G.

2. Свед́ение к задаче о кратчайшем покрытии

При решении задачи минимизации одной не полностью определенной булевой функции f классическим методом рассматриваются два варианта ее доопределения до полностью определенной функции [4]: функция $f_{\min}$, которая имеет значение 0 на области неопределенных значений функции f, и функция $f_{\max}$, которая имеет значение 1 на этой области. Решение получается в виде кратчайшего покрытия области $M_{f_{\min}}^1$ максимальными интервалами функции $f_{\max}$. Этот подход можно распространить на случай системы не полностью определенных булевых функций следующим образом.

Для каждой функции f_i из заданной системы F получим $f_{i\,\min}$ и $f_{i\,\max}$. Обозначим полученные системы полностью определенных функций соответственно $F_{\min}$ и $F_{\max}$. Матричное представление системы $F_{\min}$ находится довольно просто: надо знаки «–» в матрице $\boldsymbol{V}$ заменить на нули, удалить из нее строки, оказавшиеся нулевыми, и удалить соответствующие им строки из матрицы $\boldsymbol{U}$. Матричное представление системы $F_{\max}$ получается заменой знаков «–» в матрице $\boldsymbol{V}$ на единицы, дополнением матрицы $\boldsymbol{U}$ строками до представления ею всего булева пространства и добавлением строк, соответствующих новым строкам матрицы $\boldsymbol{U}$ и содержащих только единицы, в матрицу $\boldsymbol{V}$.

Найдем сокращенную систему ДНФ, или множество всех максимальных g-интервалов, для $F_{\max}$. Пусть любая пара одноименных (имеющих один и тот же номер) строк $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ матриц $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$, задающая некоторую систему полностью определенных булевых функций H, представляет g-интервал (I, G) для H. Троичный вектор $\boldsymbol{u}$ задает интервал I, а булев вектор $\boldsymbol{v}$ своими единицами – множество функций G. Способ получения всех максимальных g-интервалов в матричном представлении для системы полностью определенных функций, какой является $F_{\max}$, подробно описан в статье [1]. Для этого введены три операции над парами одноименных строк матриц $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$: обобщенное склеивание, пересечение и поглощение. Пусть имеются две пары строк матриц $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ – $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i)$ и $(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j)$.

Обобщенное склеивание. Матрица $\boldsymbol{U}$ дополняется продуктом обобщенного склеивания троичных векторов $\boldsymbol{u}_i$ и $\boldsymbol{u}_j$, а матрица $\boldsymbol{V}$ – результатом выполнения поразрядной конъюнкции над булевыми векторами $\boldsymbol{v}_i$ и $\boldsymbol{v}_j$. Операция обобщенного склеивания выполняется только тогда, когда векторы $\boldsymbol{u}_i$ и $\boldsymbol{u}_j$ смежны [5] (т. е. ортогональны только по одной компоненте), а результат поразрядной конъюнкции векторов $\boldsymbol{v}_i$ и $\boldsymbol{v}_j$ отличен от нулевого вектора.

Пересечение. Матрица $\boldsymbol{U}$ дополняется результатом пересечения троичных векторов $\boldsymbol{u}_i$ и $\boldsymbol{u}_j$, а матрица $\boldsymbol{V}$ – результатом выполнения поразрядной дизъюнкции над булевыми векторами $\boldsymbol{v}_i$ и $\boldsymbol{v}_j$. Операция пересечения выполняется только при неортогональности векторов $\boldsymbol{u}_i$ и $\boldsymbol{u}_j$.

Поглощение. Если вектор $\boldsymbol{u}_i$ поглощает вектор $\boldsymbol{u}_j$ [5], а вектор $\boldsymbol{v}_i$ имеет единицы везде, где имеет единицы вектор $\boldsymbol{v}_j$, то строки $\boldsymbol{u}_j$ и $\boldsymbol{v}_j$ удаляются из матриц $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$.

В результате преобразований, использующих данные операции, получаем пару матриц ($\boldsymbol{U}^*$, $\boldsymbol{V}^*$), которая представляет все максимальные g-интервалы. Эту пару можно рассматривать как представление сокращенной системы ДНФ для системы $F_{\max}$.

Множество максимальных g-интервалов для $F_{\max}$ легко преобразуется в множество максимальных интервалов для заданной системы F. Для этого надо из полученного множества удалить те g-интервалы (I, G), у которых $I \cap M^1_{f_i} = \varnothing$ для любой функции $f_i \in G$ (такие интервалы I не являются полезными [6]), и из множества G любого g-интервала (I, G) удалить те функции f_i, для которых $I \cap M^1_{f_i} = \varnothing$. Для получения окончательного решения рассматриваемой задачи среди оставшихся g-интервалов надо выделить совокупность, составляющую кратчайшее покрытие всех пар вида (m_k, f_l).

Следующим этапом процесса минимизации является построение булевой матрицы покрытия $\boldsymbol{B}$, строкам которой соответствуют максимальные g-интервалы для системы F, а столбцам – пары вида (m_k, f_l), где $f_l \in F$ и $m_k \in M^1_{f_l}$ и на пересечении строки, соответствующей g-интервалу (I, G), и столбца, соответствующего паре (m_k, f_l), находится единица тогда и только тогда, когда $m_k \in I$ и $f_l \in G$. В этой матрице надо найти минимальное количество строк так, чтобы каждый столбец имел единицу хотя бы в одной из этих строк, т. е. найденные строки должны покрывать все столбцы.

Пусть $\boldsymbol{U}$ – троичная матрица, представляющая множество интервалов, которое составляет область M^1 некоторой булевой функции f. Рассмотрим совокупность $P(\boldsymbol{U})$ непустых подмножеств множества номеров строк матрицы $\boldsymbol{U}$, такую, что для каждого элемента множества M^1 имеется подмножество в совокупности $P(\boldsymbol{U})$, состоящее из номеров всех строк матрицы $\boldsymbol{U}$, которые представляют интервалы, содержащие данный элемент, и других подмножеств в $P(\boldsymbol{U})$ нет.

Задачу кратчайшего покрытия области M^1 интервалами из множества, заданного матрицей $\boldsymbol{U}$, можно сформулировать следующим образом: для матрицы $\boldsymbol{U}$ построить минимальную совокупность ее строк, такую, чтобы любой элемент множества $P(\boldsymbol{U})$ содержал номер хотя бы одной строки из данной совокупности.

Способ нахождения множества $P(\boldsymbol{U})$ для заданной троичной матрицы $\boldsymbol{U}$ основан на следующем утверждении, доказанном в работе [1].

Утверждение. *Если из матриц $\boldsymbol{U}'$ и $\boldsymbol{U}''$ построить матрицу $\boldsymbol{U}$, приписав столбцы матрицы $\boldsymbol{U}''$ к столбцам $\boldsymbol{U}'$, то множество $P(\boldsymbol{U})$ можно получить, взяв за его элементы всевозможные непустые парные пересечения элементов $P(\boldsymbol{U}')$ с элементами $P(\boldsymbol{U}'')$.*

Если матрица $\boldsymbol{U}$ состоит из одного столбца и произвольного числа одноэлементных строк, то $P(\boldsymbol{U})$ состоит не более чем из двух элементов. Один из них представляет множество, состоящее из номеров всех строк, имеющих нули и «–», второй – множество, состоящее из номеров всех строк, имеющих единицы и «–». Если все элементы одностолбцовой матрицы $\boldsymbol{U}$ имеют одно и то же значение, то $P(\boldsymbol{U})$ состоит из одного элемента, который является множеством, содержащим номера всех элементов множества $\boldsymbol{U}$.

Пусть матрица $\boldsymbol{U}$ имеет n столбцов. Для минора $\boldsymbol{U}_1$ матрицы $\boldsymbol{U}$, состоящего из ее единственного первого столбца, получим $P(\boldsymbol{U}_1)$, как указано выше. Множество $P(\boldsymbol{U}_2)$ для минора, состоящего из двух первых столбцов матрицы $\boldsymbol{U}$, получим путем всевозможных пересечений элементов множества $P(\boldsymbol{U}_1)$ с элементами подобного множества для второго столбца. Для минора $\boldsymbol{U}_3$, состоящего из трех первых столбцов матрицы $\boldsymbol{U}$, получим $P(\boldsymbol{U}_3)$ аналогично путем всевозможных пересечений элементов множества $P(\boldsymbol{U}_2)$ с элементами подобного множества для третьего столбца. Продолжая таким образом выполнять операцию пересечения множеств, получим, наконец, $P(\boldsymbol{U}_n) = P(\boldsymbol{U})$.

Допустим, имеется пара матриц ($\boldsymbol{U}_{\min}$, $\boldsymbol{V}_{\min}$), представляющая некоторую произвольную систему ДНФ для $F_{\min} = \{f_{1\max}, f_{2\max}, \ldots, f_{m\max}\}$, и пара матриц ($\boldsymbol{U}^*$, $\boldsymbol{V}^*$), представляющая сокращенную систему ДНФ для $F_{\max}$. Выделим строчные миноры $\boldsymbol{U}^1{}^*$, $\boldsymbol{U}^2{}^*$, …, $\boldsymbol{U}^m{}^*$ в матрице $\boldsymbol{U}^*$ с сохранением нумерации строк, где $\boldsymbol{U}^i{}^*$ представляет ДНФ соответствующей функции $f_{i\max}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) и определяется единицами i-го столбца матрицы $\boldsymbol{V}^*$. Строкам упомянутой выше матрицы покрытия $\boldsymbol{B}$ соответствуют пары одноименных строк матриц $\boldsymbol{U}^*$ и $\boldsymbol{V}^*$, представляющие g-интервалы системы $F_{\max}$, а столбцам – некоторые элементы множеств $P(\boldsymbol{U}^i{}^*)$ ($i = 1, 2, \ldots, m$). Для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ здесь не должны присутствовать те элементы из $P(\boldsymbol{U}^i{}^*)$, которые не покрываются множеством $M^1_{f_i}$.

Выполнение данного условия можно обеспечить в процессе построения множеств $P(\boldsymbol{U}^i{}^*)$ одновременно с построением множеств $P(\boldsymbol{U}^i_{\min})$, где $\boldsymbol{U}^i_{\min}$ – строчный минор матрицы $\boldsymbol{U}_{\min}$, определяемый аналогично $\boldsymbol{U}^i{}^*$ по единицам i-го столбца матрицы $\boldsymbol{V}_{\min}$. Нетрудно установить взаимно однозначное соответствие между элементами множества $P(\boldsymbol{U}^i_{\min})$ и некоторыми элементами множества $P(\boldsymbol{U}^i{}^*)$ при любом $i = 1, 2, \ldots, m$. Для каждой пары соответствующих элементов, один из которых взят из множества $P(\boldsymbol{U}^i_{\min})$, другой – из $P(\boldsymbol{U}^i{}^*)$, это соответствие определяется общим элементом множества $M^1_{f_i}$. Оно прослеживается на протяжении всего указанного процесса.

Каждый шаг процесса построения множеств $P(\boldsymbol{U}^i_{\min})$ и $P(\boldsymbol{U}^i{}^*)$, характеризуемый переходом от одного столбца матрицы к следующему, свяжем с расширением булева пространства аргументов заданной системы функций на единицу при начальной размерности, равной 1. Тогда для каждого подмножества строк матрицы, получаемого в результате выполнения очередного шага, нетрудно сформировать булев вектор – часть элемента множества $M^1_{f_i}$. На каждом шаге к такому вектору добавляется одна компонента, и по окончании процесса он будет определять некоторый элемент множества $P(\boldsymbol{U}^i_{\min})$ и соответствующий ему элемент множества $P(\boldsymbol{U}^i{}^*)$. Пустое множество, получаемое на очередном шаге в результате пересечения двух подмножеств строк матрицы $\boldsymbol{U}^i_{\min}$, означает, что формируемый вектор не является частью никакого элемента множества $M^1_{f_i}$. Соответствующий элемент множества $P(\boldsymbol{U}^i{}^*)$, даже получаемый как непустое множество, исключается из дальнейшего рассмотрения.

Обозначим символом $P'(\boldsymbol{U}^i{}^*)$ результат удаления указанных элементов из множества $P(\boldsymbol{U}^i{}^*)$. Теперь, чтобы найти кратчайшее покрытие множества всех пар вида (m_k, f_l) g-интервалами, представленными парами строк матриц $\boldsymbol{U}^*$ и $\boldsymbol{V}^*$, надо построить минимальную совокупность строк матрицы $\boldsymbol{U}^*$, такую, чтобы любой элемент множества $P'(\boldsymbol{U}^*) = P'(\boldsymbol{U}^1{}^*) \cup P'(\boldsymbol{U}^2{}^*) \cup \ldots \cup P'(\boldsymbol{U}^m{}^*)$ содержал номер хотя бы одной строки из данной совокупности.

Для сокращения перебора вариантов при построении кратчайшего покрытия применяются следующие правила редукции, которые согласуются с правилами, сформулированными в работе [6]:

1. Если $A \in P(\boldsymbol{U})$, $B \in P(\boldsymbol{U})$ и $A \subseteq B$, то B удаляется из $P(\boldsymbol{U})$.

2. Если номер i присутствует только в тех элементах множества $P(\boldsymbol{U})$, где присутствует номер k, то i удаляется отовсюду.

После преобразования множества $P'(\boldsymbol{U}^*)$ согласно приведенным правилам редукции перейдем к матрице покрытия $\boldsymbol{B}$, строки которой соответствуют строкам матрицы $\boldsymbol{U}^*$, а столбцы – элементам множества $P'(\boldsymbol{U}^*)$. Каждый столбец является векторным представлением соответствующего элемента множества $P'(\boldsymbol{U}^*)$. Задача теперь заключается в том, чтобы в матрице $\boldsymbol{B}$ выделить минимум строк так, чтобы каждый столбец имел единицу хотя бы в одной из выделенных строк.

Окончательное решение – кратчайшая система ДНФ – представляется в виде пары матриц ($\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$), где $\boldsymbol{U}$ – троичная матрица, составленная из строк матрицы $\boldsymbol{U}^*$, соответствующих строкам полученного покрытия булевой матрицы $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{V}$ – булева матрица, составленная из строк матрицы $\boldsymbol{V}^*$, соответствующих выбранным строкам матрицы $\boldsymbol{U}^*$. Столбец матрицы $\boldsymbol{V}$, соответствующий функции f_i из заданной системы, своими единицами показывает, какие элементарные конъюнкции (представленные строками матрицы $\boldsymbol{U}$) входят в полученную ДНФ функции f_i. Некоторые из этих конъюнкций, будучи неизбыточными для какой-то другой ДНФ, для данной ДНФ могут оказаться избыточными (они могут поглощаться другими конъюнкциями) и поэтому подлежат удалению из данной ДНФ. Это удаление выражается заменой нулями соответствующих единиц в матрице $\boldsymbol{V}$.

3. Пример

Пусть задана система $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ не полностью определенных булевых функций:

$$\boldsymbol{U} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & - \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \end{array}; \quad \boldsymbol{V} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & - \\ 0 & - & 1 \\ - & 0 & 0 \\ 0 & - & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ - & 1 & 0 \\ 1 & 1 & - \end{bmatrix} \end{array}.$$

Получим системы $F_{\min}$ и $F_{\max}$, реализующие заданную систему F:

$$\boldsymbol{U}_{\min} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & - \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}, \quad \boldsymbol{V}_{\min} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}; \quad \boldsymbol{U}_{\max} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & - \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - \\ - & 1 & 0 & - \end{bmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{V}_{\max} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Сокращенная система ДНФ для $F_{\max}$ представляется следующими матрицами:

$$\boldsymbol{U}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & - \\ 0 & - & 1 & 0 \\ - & 0 & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & 0 \\ 0 & - & 0 & - \\ 1 & - & 0 & - \\ 1 & 1 & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & - & 1 & 0 \\ 1 & - & - & - \\ 0 & - & - & 0 \\ 1 & - & - & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \quad \boldsymbol{V}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Из матрицы $\boldsymbol{U}^*$ необходимо удалить строки, не пересекающиеся со строками матрицы $\boldsymbol{U}_{\min}$, а также соответствующие им строки матрицы $\boldsymbol{V}^*$. Таким образом, удаляются первая, третья и пятая строки из матриц $\boldsymbol{U}^*$ и $\boldsymbol{V}^*$. Поскольку интервал, представляемый второй строкой матрицы $\boldsymbol{U}^*$, не пересекается с множеством $M^1_{f_2}$, а интервал, представляемый ее седьмой строкой, не пересекается с множеством $M^1_{f_3}$, необходимо удалить единицы из матрицы $\boldsymbol{V}^*$ на пересечении второй строки и столбца f_2 и на пересечении седьмой строки и столбца f_3. В результате имеем следующую пару матриц:

$$\boldsymbol{U}^* = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & - & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & - & 0 & - \\ 1 & 1 & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & - & 1 & 0 \\ 1 & - & - & - \\ 0 & - & - & 0 \\ 1 & - & - & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}; \qquad \boldsymbol{V}^* = \begin{array}{c} \begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Зададим теперь функции f_1, f_2 и f_3 на интервалах, представляемых соответственно матрицами $\boldsymbol{U}^1*$, $\boldsymbol{U}^2*$ и $\boldsymbol{U}^3*$, которые являются строчными минорами матрицы $\boldsymbol{U}^*$, определяемыми единицами матрицы $\boldsymbol{V}^*$:

$$\boldsymbol{U}^1* = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & - & 0 & - \\ 1 & 1 & - & - \\ 1 & - & - & - \\ 1 & - & - & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{matrix}; \quad \boldsymbol{U}^2* = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & - & 0 & - \\ 1 & 1 & - & - \\ - & 1 & - & - \\ 1 & - & - & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{matrix}; \quad \boldsymbol{U}^3* = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & - & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 & 0 \\ - & 1 & - & - \\ - & - & 1 & 0 \\ 0 & - & - & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{matrix}.$$

Аналогично получим строчные миноры матрицы $\boldsymbol{U}_{\min}$, определяемые единицами матрицы $\boldsymbol{V}_{\min}$:

$$\boldsymbol{U}^1{}_{\min} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & - \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix}; \quad \boldsymbol{U}^2{}_{\min} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & - \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}; \quad \boldsymbol{U}^3{}_{\min} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}.$$

Первый шаг получения $P'(\boldsymbol{U}^1*)$ включает выполнение двух операций пересечения – множества всех строк матрицы $\boldsymbol{U}^1{}_{\min}$ с множеством ее строк, где столбец x_1 имеет 0 и «–», и множества всех строк матрицы $\boldsymbol{U}^1{}_{\min}$ с множеством строк, где столбец x_1 имеет 1 и «–». В первом случае при соответствующем однокомпонентном векторе (0) получаем пустое множество $\varnothing$, во втором – множество $\{3, 4, 6\}$ (при соответствующем векторе (1)). Поскольку в первом случае получено пустое множество, для матрицы $\boldsymbol{U}^1*$ надо выполнить только одно пересечение – множества всех строк матрицы $\boldsymbol{U}^1{}_{\min}$ с множеством строк, где столбец x_1 имеет 1 и «–», в результате которого получим $\{2, 3, 4, 7, 9\}$.

В результате аналогичных вычислений на втором шаге получим соответственно $\{3, 4\}$ и $\{2, 3, 7, 9\}$ при векторе (1 0) и $\{6\}$ и $\{2, 3, 4, 7, 9\}$ при векторе (1 1).

Третий шаг дает $\{3\}$ и $\{3, 7, 9\}$ при векторе (1 0 0), $\{4\}$ и $\{2, 7, 9\}$ при векторе (1 0 1). Пустое множество, получаемое на этом шаге для матрицы $\boldsymbol{U}^1{}_{\min}$ при векторе (1 1 0), позволяет не выполнять пересечения множеств $\{2, 3, 4, 7, 9\}$ и $\{3, 4, 7, 9\}$ для матрицы $\boldsymbol{U}^1*$. При векторе (1 1 1) получаем $\{6\}$ для матрицы $\boldsymbol{U}^1{}_{\min}$ и $\{2, 4, 7, 9\}$ для матрицы $\boldsymbol{U}^1*$.

Выполнив последний, четвертый шаг, получаем $P'(\boldsymbol{U}^1*) = \{\{3, 7\}, \{3, 7, 9\}, \{2, 7\}, \{2, 4, 7\}, \{4, 7, 9\}\}$. Первое правило редукции можно применять отдельно для каждого $P'(\boldsymbol{U}^i*)$ ($i = 1, 2, \ldots, m$). Применив его для $P'(\boldsymbol{U}^1*)$, получим $P'(\boldsymbol{U}^1*) = \{\{3, 7\}, \{2, 7\}, \{4, 7, 9\}\}$.

Табл. 1 представляет процесс получения множества $P'(\boldsymbol{U}^2*)$. Прочерк в таблице означает, что получение соответствующего подмножества не является необходимым. На пересечении последней строки и последнего столбца имеем $P'(\boldsymbol{U}^2*) = \{\{3\}, \{3, 9\}, \{9\}, \{4, 5\}, \{4, 5, 9\}\}$. Применив первое правило редукции, получим $P'(\boldsymbol{U}^2*) = \{\{3\}, \{9\}, \{4, 5\}\}$.

Процесс получения множества $P'(\boldsymbol{U}^3*)$ представлен в табл. 2. Результатом является $P'(\boldsymbol{U}^3*) = \{\{1, 6, 8\}, \{1, 5, 6, 8\}, \{5\}, \{2, 6\}\}$, а после применения первого правила редукции – $P'(\boldsymbol{U}^3*) = \{\{1, 6, 8\}, \{5\}, \{2, 6\}\}$.

Таблица 1

Получение множества $P'(U^2*)$

Шаг	Вектор	$U^2_{\min}$	U^2*
1	(0) (1)	∅ {3, 5, 6}	– {3, 4, 5, 9}
2	(1 0) (1 1)	{3, 5} {6}	{3, 9} {3, 4, 5, 9}
3	(1 0 0) (1 0 1) (1 1 0) (1 1 1)	{3} {5} ∅ {6}	{3, 9} {9} – {4, 5, 9}
4	(1 0 0 0) (1 0 0 1) (1 0 1 0) (1 0 1 1) (1 1 1 0) (1 1 1 1)	{3} {3} ∅ {5} {6} {6}	{3} {3, 9} – {9} {4, 5} {4, 5, 9}

Таблица 2

Получение множества $P'(U^3*)$

Шаг	Вектор	$U^3_{\min}$	U^3*
1	(0) (1)	{1, 2} {4}	{1, 5, 6, 8} {2, 5, 6}
2	(0 0) (0 1) (1 0) (1 1)	{1} {2} {4} ∅	{1, 6, 8} {1, 5, 6, 8} {2, 6} –
3	(0 0 0) (0 0 1) (0 1 0) (0 1 1) (1 0 0) (1 0 1)	∅ {1} ∅ {2} ∅ {4}	– {1, 6, 8} – {1, 5, 6, 8} – {2, 6}
4	(0 0 1 0) (0 0 1 1) (0 1 1 0) (0 1 1 1) (1 0 1 0) (1 0 1 1)	{1} ∅ {2} {2} {4} ∅	{1, 6, 8} – {1, 5, 6, 8} {5} {2, 6} –

Объединением трех полученных множеств является {{3, 7}, {2, 7}, {4, 7, 9}, {3}, {9}, {4, 5}, {1, 6, 8}, {5}, {2, 6}}. После применения первого правила редукции получим {{2, 7}, {3}, {9}, {1, 6, 8}, {5}, {2, 6}}, а после применения итерации обоих правил – {{2}, {3}, {9}, {1, 6, 8}, {5}}. Строки 2, 3, 5 и 9, как видно из данного результата, являются обязательными, а из строк 1, 6 и 8 следует выбрать строку 6 или строку 8 как представляющие интервал меньшего ранга по сравнению со строкой 1. Выбрав строку 6, приходим к следующему результату:

$$\boldsymbol{U} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & - & 0 & - \\ - & 1 & - & - \\ - & - & 1 & 0 \\ 1 & - & - & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \quad \boldsymbol{V} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

После дальнейшего упрощения (уменьшения числа термов в ДНФ) получим

$$\boldsymbol{U} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & - & 0 & - \\ - & 1 & - & - \\ - & - & 1 & 0 \\ 1 & - & - & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \quad \boldsymbol{V} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

4. Программная реализация алгоритма

Описанный в разд. 3 алгоритм, именуемый далее MiSe, программно реализован на языке C++ и экспериментально испытан на PC Intel Celeron 952 MHz, 384 MB RAM на известных типовых примерах Benchmark [7] и на потоке псевдослучайных систем булевых функций. При этом он сравнивался с алгоритмом MiSe_K, решающим ту же задачу.

Сравниваемые алгоритмы различаются только способами построения булевой матрицы покрытия $\boldsymbol{B}$, строки которой поставлены в соответствие элементам множества W максимальных g-интервалов системы $F_{\max}$. Для алгоритма MiSe столбцы матрицы $\boldsymbol{B}$ поставлены в соответствие минимальным совокупностям элементов множества W, а для алгоритма MiSe_K – парам вида (m_k, f_l), где $f_l \in F$ и $m_k \in M^1_{f_l}$, т. е. алгоритм MiSe_K работает по классической схеме [4], когда часть булева пространства, покрытая заданными интервалами, представляется в явном виде путем перечисления булевых векторов – элементов этого пространства.

В табл. 3 приведены результаты минимизации систем булевых функций из некоторых известных примеров серии Benchmark [7] с помощью рассматриваемых алгоритмов. Используются следующие обозначения:

n – число переменных;

m – число функций;

p – число различных интервалов в задании системы функций и число различных элементарных конъюнкций в полученной системе ДНФ;

u – сумма рангов заданных интервалов и сумма рангов полученных конъюнкций;

q – число различных интервалов в задании системы функций и число различных элементарных конъюнкций в полученной системе ДНФ с учетом их кратности;

v – сумма рангов заданных интервалов и сумма рангов полученных конъюнкций с учетом их кратности;

impl – число максимальных g-интервалов системы $F_{\max}$;

nimpl – число полезных g-интервалов, т. е. тех максимальных g-интервалов системы $F_{\max}$, которые пересекаются хотя бы с одной из областей $M^1_{f_l}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$;

col – число столбцов в матрице покрытия $\boldsymbol{B}$;

nuc – число обязательных g-интервалов;

t – общее время в секундах выполнения алгоритма.

Таблица 3

Минимизация систем булевых функций из набора Benchmark

Примеры, алгоритмы	*n*	*m*	*p*	*u*	*q*	*v*	*impl*	*nimpl*	*col*	*nuc*	*t*
exps	8	38	196	1568	1625	13000					
MiSe			132	975	1035	7811	852	828	257	56	26,62
MiSe_K				964	992	7485			1503		61,27
ALU2	10	8	185	1432	194	1503					
MiSe			68	272	82	317	434	430	192	36	2,31
MiSe_K				272	82	317			1328		2,92
B10	15	11	135	1338	449	4373					
MiSe			100	830	181	1484	938	643	95	51	8,11
MiSe_K				846	185	1550			62024		514,69
bce	26	45	245	3681	1222	18355					
MiSe			137	1914	616	8703	237	237	26	119	3,08
exep	30	63	149	1795	149	1795					
MiSe			108	1168	108	1168	558	511	50	82	55,07

Отсутствие данных относительно алгоритма MiSe_K в последних строках таблицы означает, что минимизация на соответствующих примерах не была доведена до конца, так как она занимала много времени.

В табл. 4–7 приведены результаты экспериментальных испытаний алгоритма на потоке псевдослучайных систем булевых функций по различным осям пространства параметров. Кроме обозначений, используемых в табл. 3, в них используются следующие обозначения:

nr – средний ранг интервала;

mr – среднее число функций, имеющих значение 1 на одном интервале;

tb – время, затраченное на получение максимальных *g*-интервалов системы $F_{\max}$;

tt – время, затраченное на построение таблицы покрытия.

Таблица 4

Результаты минимизации псевдослучайных систем булевых функций при $n = 10$, $nr = 5$, $m = 10$, $mr = 7$ и различных значениях p

№ примера, алгоритмы	*p*	*u*	*q*	*v*	*impl*	*nimpl*	*col*	*nuc*	*tb*	*tt*	*t*
1	50	245	148	720							
MiSe	43	198	101	455	1186	1164	196	17	14,31	1,64	16,11
MiSe_K		203	101	464			9063		14,29	36,42	52,01
2	100	500	292	1450							
MiSe	39	134	81	272	1316	1316	1303	3	49,69	12,47	63,99
MiSe_K		134	78	269			17800		49,71	99,32	162,44
3	150	741	434	2118							
MiSe	17	38	46	97	223	223	264	2	3,60	5,21	8,91
MiSe_K		37	46	97			29419		3,61	107,75	112,74
4	199	985	573	2810							
MiSe	10	12	13	12	54	54	19	3	1,72	0,84	2,60
MiSe_K		10	13	10			37178	3	1,72	111,01	112,95

Таблица 5

Результаты минимизации псевдослучайных систем булевых функций при $n = 10$, $p = 100$ (исходное), $m = 10$, $mr = 7$ и различных значениях nr

№ примера, алгоритмы	*nr*	*p* рез.	*u*	*q*	*v*	*impl*	*nimpl*	*col*	*nuc*	*tb*	*tt*	*t*
1	9		678	282	1927							
MiSe		90	572	227	1444	2831	2590	516	24	53,69	3,44	58,41
MiSe_K			577	229	1467			4264		53,85	29,84	90,60
2	8		640	420	2702							
MiSe		92	547	311	1814	3415	3334	932	17	124,32	9,01	137,23
MiSe_K			550	311	1821			9236		124,43	87,71	249,69
3	7		607	422	2573							
MiSe		80	438	240	1282	3683	3643	896	13	167,66	8,19	181,71
MiSe_K			445	243	1329			12170		167,66	132,86	356,13
4	5		500	292	1450							
MiSe		39	134	81	272	1316	1316	1303	3	50,30	12,65	64,84
MiSe_K			134	78	269			17800		49,79	99,64	164,00

Таблица 6

Результаты минимизации псевдослучайных систем булевых функций при $nr = 5$, $p = 100$ (исходное), $m = 10$, $mr = 7$ и различных значениях n

№ примера, алгоритмы	*n*	*p* рез.	*u*	*q*	*v*	*impl*	*nimpl*	*col*	*nuc*	*tb*	*tt*	*t*
1	8		448	242	1078							
MiSe		10	15	29	40	57	53	14	4	0,04	0,06	0,12
MiSe_K			16	29	44			4541		0,05	1,81	1,89
2	9		454	292	1359							
MiSe		27	80	71	200	658	658	891	0	13,43	5,22	20,21
MiSe_K			80	76	215			10044		12,90	28,28	56,68
3	10		500	292	1450							
MiSe		39	134	81	272	1316	1316	1303	3	49,76	12,88	64,62
MiSe_K			134	78	269			17800		49,75	99,86	164,06

В табл. 5 отсутствуют данные для значения $nr = 6$ из-за большого времени выполнения, которое измерялось часами.

Таблица 7

Результаты минимизации псевдослучайных систем булевых функций при $n = 10$, $nr = 5$, $m = 10$, различных значениях mr и различных исходных значениях p

№ примера, алгоритмы	*mr*	*p*	*u*	*q*	*v*	*impl*	*nimpl*	*col*	*nuc*	*tb*	*tt*	*t*
1	1	84	417	108	549							
MiSe		76	364	91	439	2500	2450	794	19	27,57	3,76	32,58
MiSe_K			366	93	453			5546		27,02	35,16	70,97
2	2	53	273	60	305							
MiSe		42	190	48	217	3056	2606	648	4	104,71	2,41	107,92
MiSe_K			195	48	222			3473		104,86	25,25	132,78
3	3	88	448	156	803							
MiSe		80	374	116	521	4841	4729	2104	4	469,04	24,65	526,92
MiSe_K			376	116	526			8691		468,35	119,34	682,62
4	4	95	484	211	1069							
MiSe		76	358	144	666	5944	5780	2321	3	588,03	43,18	692,01
MiSe_K			361	144	669			11089		585,53	186,66	964,21
5	5	88	447	169	838							
MiSe		37	131	69	242	3506	3399	658	2	151,13	5,00	157,32
MiSe_K			140	69	263			10398		151,27	114,99	276,42

Оба алгоритма MiSe и MiSe_K получают точное решение (кратчайшую систему ДНФ) и, как было сказано, различаются только способами построения булевой матрицы покрытия B. Поэтому такие характеризующие их параметры, как p, $impl$, $nimpl$ и nuc, совпадают. Небольшие расхождения во времени получения сокращенной системы ДНФ обусловлены погрешностью измерения.

Заключение

Описанный метод предназначен для минимизации систем не полностью определенных булевых функций, заданных в интервальной форме. Реализующий его алгоритм можно использовать для оценки качества решений, получаемых приближенными алгоритмами минимизации систем булевых функций; в этом случае его можно использовать как эталон. Диапазон размеров решаемых задач для предлагаемого алгоритма определяется возможностями используемой вычислительной техники. Персональный компьютер, который указан в разд. 3 и на котором производились экспериментальные вычисления, позволял, как показывают приведенные в таблицах данные, минимизировать системы булевых функций с числом аргументов до 30, с числом функций порядка 10 и более и с числом интервалов булева пространства, на которых заданы функции, до 100 и более. При этом время выполнения алгоритма не превышало 12 мин. Что касается размера памяти, то эта величина определяется количеством g-интервалов системы $F_{\max}$, которая в рассмотренных примерах не превышала 4000.

Приведенные результаты испытаний программы MiSe, реализующей данный метод, показывают его явное преимущество по сравнению с известным классическим методом. Выигрыш во времени решения составляет от 42 до 98 % на типовых примерах Benchmark и от 18 до 93 % на псевдослучайных примерах. Это дает основание говорить о расширении области практического применения метода, получающего точное решение рассматриваемой задачи минимизации.

Список литературы

1. Поттосин, Ю.В. Метод минимизации системы полностью определенных булевых функций / Ю.В. Поттосин, Н.Р. Торопов, Е.А. Шестаков // Информатика. – 2008. – № 2 (18). – С. 102–110.

2. Торопов, Н.Р. Минимизация систем булевых функций в классе ДНФ / Н. Р. Торопов // Логическое проектирование. – Минск : Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 1999. – Вып. 4. – С. 4–19.

3. Шестаков, Е.А. Декомпозиция системы полностью определенных булевых функций по покрытию аргументов / Е.А. Шестаков // Автоматика и вычислительная техника. – 1994. – № 1. – С. 12–20.

4. Фридман, А. Теория и проектирование переключательных схем / А. Фридман, П. Менон. – М. : Мир, 1978. – 580 с.

5. Закревский, А.Д. Логический синтез каскадных схем / А.Д. Закревский. – М. : Наука, 1981. – 416 с.

6. Закревский, А.Д. Логические основы проектирования дискретных устройств / А.Д. Закревский, Ю.В. Поттосин, Л.Д. Черемисинова. – М. : Физматлит, 2007. – 592 с.

7. Yang, S. Logic Synthesis and Optimization Benchmarks. User Guide: Version 3.0 / S. Yang. – Technical Report, Microelectronics of North Carolina. – USA, 1991. – 43 p.

Поступила 19.03.09

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: pott@newman.bas-net.by

Yu.V. Pottosin, N.R. Toropov, E.A. Shestakov

A METHOD FOR MINIMIZING THE SYSTEM OF INCOMPLETELY SPECIFIED BOOLEAN FUNCTIONS

The problem of minimization of a system of incompletely specified boolean functions in the class of disjunctive normal forms (DNFs) when the initial system of functions is given in the interval form is considered. The criterion of minimization is the total number of different elementary conjunctions in the obtained DNF system. A method to solve this problem is suggested. It can be considered as a generalization of the method of minimization of a system of completely specified Boolean functions suggested by the authors earlier. The results of testing software that implements the suggested method are provided.